X. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§1. Поняття визначеного інтеграла та його обчислення

Розглянемо деяку неперервну функцію $y = f(x)$, що задана і обмежена на інтервалі $[a;b]$ (рис.10.1).

Функція разом з прямими $x = a$, $x = b$та віссю OX утворює плоску фігуру, яка називається криволінійною трапецією. При обчисленні площі цієї криволінійної трапеції виникають певні труднощі. Якщо AB − пряма,то фігура утворює звичайну прямолінійну

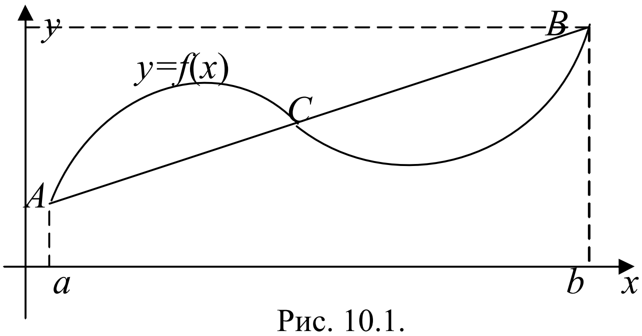

Рис. 10.1.

трапецію з відомою формулою для обчислення її площі: $S = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (b - a)$.

Застосування цієї формули до криволінійної трапеції призводить до великої помилки (відходить площа над відрізком AC і додається площа під відрізком CD, хоч ці площі нерівні між собою).

Для зменшення величини помилки розіб’ємо відрізок $(b-a)$ на частини (рис. 10.2) і отримаємо декілька криволінійних трапецій. В кожній з них кривизна функції завдяки малій величині відрізка кривої буде

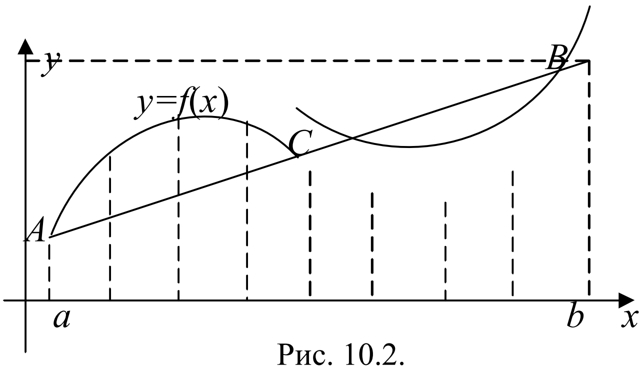

Рис. 10.2.

незначною, тому сам відрізок кривої буде дещо відрізнятись від прямої. Тому площа кожної криволінійної трапеції відрізнятиметься від відповідної площі прямолінійної трапеції, а сума площ утворює загальну площу всієї криволінійної трапеції. Чим на більшу кількість частин розбити відрізок $(b-a)$, тим точніше визначиться площа.

Якщо відрізок $(b-a)$ розбити на велику кількість частин, то відстань між двома найближчими значеннями $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ для деякої елементарної площі S_i буде настільки малою, що різниця між значеннями функції буде несуттєвою, а сам відрізок кривої мало відрізнятиметься від прямокутника. Основу прямокутника становитиме відрізок Δx, а висоту − відрізок $f(x_i)$, як значення функції в точці x_i. Тому:

$$S_i \approx f(x_i) \cdot \Delta x .$$

Сума всіх площ утворює площу криволінійної трапеції, тобто:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x .$$

Ця сума носить назву інтегральної суми Рімана. Абсолютно точне значення площі криволінійної трапеції отримаємо, якщо розбити всю площу на безліч частин, тобто коли $n \to \infty$, при цьому $\Delta x \to 0$. Отже, маємо формулу:

$$S = \lim_{\substack{y \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x .$$

Озн. Граничне значення інтегральної суми Рімана $S = \lim_{\substack{y \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$ називається визначеним інтегралом і позначається символом $\int_a^b f(x)dx.$

Отже: $$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (10.1)$$

За геометричним змістом визначений інтеграл є площею криволінійної трапеції, обмеженої знизу віссю OX, справа та зліва − прямими $x = a$ та $x = b$, а зверху − неперервною, невід'ємною та скінченною функцією. Саме тому введений Г.Лейбніцем значок інтеграла є стилізацією букви S як площі фігури (читається: інтеграл від а до бе від еф від ікс деікс). Визначений інтеграл як площа завжди є додатним числом.

Властивості визначеного інтегралу:

1. Якщо точка b наближається до точки a, то площа криволінійної трапеції зменшується, наближаючись до нуля. Тому $\int_a^a f(x)dx = 0,$ тобто визначений інтеграл з однаковими верхньою та нижньою границями завжди дорівнює нулю.

2. Якщо по осі абсцис замість змінної x ввести змінну t і мати вісь Ot та функцію $y = f(t)$, то величина площі при цьому не зміниться, тобто:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Заміна місцями в інтегралі верхньої та нижньої границь (операція називається зміною порядку інтегрування) змінює знак інтеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a); \int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b).$$

4. Якщо $a<c<b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. За формулою Ньютона − Лейбніца $F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a)$.

5. Визначений інтеграл суми двох функцій дорівнює сумі інтегралів цих функцій з тими ж межами: $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$.

6. Сталий множник можна винести за знак інтеграла, як і в невизначеному інтегралі: $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

З рис. 10.3. видно, що величина площі криволінійної трапеції буде змінюватись, якщо змінювати на осі OX положення точок a і b. Так: $S = \int_a^b f(x)dx \neq S_1 = \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx$. Отже, величина площі змінюється як зі зміною положення точки a, так і зі зміною положення точки b. Тому можемо стверджувати, що площа як визначений інтеграл є функцією обох границь: верхньої та нижньої. Отже: $S = S(a;b)$.

Якщо положення точки a не змінювати, а змінювати тільки положення точки b, то площа буде залежати тільки від зміни положення точки b, тобто $S = S(b)$.

Таким чином:

$$S(b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Враховуючи, що b − величина змінна, введемо заміну $b = x$.

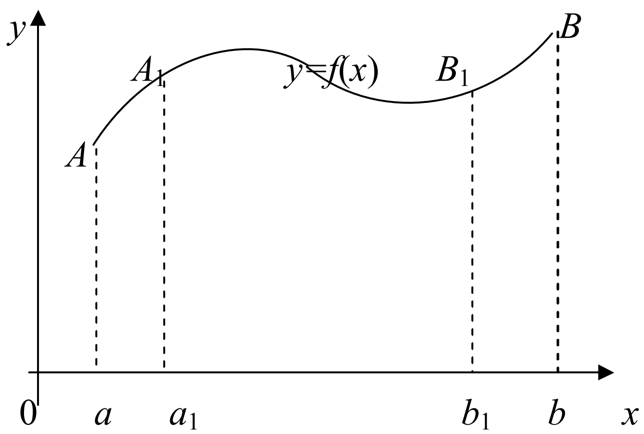

Рис.10.3.

Тоді отримаємо: $$S(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Відмітимо, що площа криволінійної трапеції $S(x)$ буде зростати, якщо аргумент зростає. Якщо x отримає приріст Δx, то площа $S(x)$ отримає приріст ΔS. Завдяки малості Δx значення функції в точках x та $x + \Delta x$ практично співпадають, тому вважаємо, що площа ΔS утворена прямокутником, тобто $\Delta S \approx f(x) \cdot \Delta x$. Звідси: $f(x) \approx \frac{\Delta S}{\Delta x} \Rightarrow f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x}$.

Але за визначенням похідної функції: $S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x}$.

Теорема Барроу: Похідна від визначеного інтеграла, як функції його верхньої границі дорівнює самій підінтегральній функції, тобто $S'(x) = f(x)$.

За введеними позначеннями $S(x) = \int_a^x f(t)dt$, $S(b) = \int_a^b f(t)dt$ і $S(a) =$

$= \int_a^a f(t)dt.$ Але $S(a) = 0$.

Таким чином, можемо записати:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = S(b) = S(b) - 0 = S(b) - S(a).$$

Але згідно з теоремою Барроу підінтегральна функція $f(x)$ є похідною від $S(x)$, тобто $S(x)$ є одна зі всіх можливих первісних (див. поняття визначеного інтеграла), а саме та з них, яка в точці x дорівнює нулю. Отже, $S(x)$ ─ первісна. Відомо, що всі первісні відрізняються між собою тільки на сталу, тобто $S(x) = F(x) + C.$ Якщо відомі методи інтегрування дають можливість знайти деяку первісну $F(x)$, то вона буде відрізнятись від необхідної первісної $S(x)$ лише на число: $S(b) = F(b) + C; S(a) = F(a) + C$, тобто:

$\int_a^b f(x)dx = S(b) - S(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a),$ де $F(a) \neq 0,$ і $b \geq a$.

Отже, одержали формулу: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$ Ця формула називається **формулою Ньютона − Лейбніца.**

Відмітимо, щоб обчислити визначений інтеграл, треба, не звертаючи уваги на межі інтегрування, обчислити невизначений інтеграл $\int f(x)dx = F(x) + C,$ після чого обчислити значення первісної в точках $x = b$ та $x = a$ і знайти різницю між ними $F(b) - F(a).$ Виходячи з цього, можемо формулу Ньютона-Лейбніца записати у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (10.2)$$

Приклад: Знайти інтеграли:

а) $\int_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$; б) $\int_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;

в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+cosx}$; г) $\int_0^1 arcsinxdx$.

Розв’язання:

а) $\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x-4}}=\int\limits_{-1}^{7}(3x+4)dx=\frac{1}{3}\frac{(3x+4)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{-1}^{7}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\Bigg|_{-1}^{7}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{25}-\sqrt{1}\right)=2\frac{2}{3};$

б) $\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}=\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{9-(x-2)^2}=arcsin\frac{x-2}{3}\Bigg|_{2}^{5}=arcsin1-arcsin0=\frac{\pi}{2};$

в) Скористаємося універсальною тригонометричною підстановкою $t=tgx$. Знайдемо $cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ і нові межі інтегрування $t_1=0$ при $x_1=0$, та $t_2=1$ при $x_2=\frac{\pi}{2}$. Тоді:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+cosx}=\int\limits_{0}^{1}\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{1}{\sqrt{3}}-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0=\frac{\pi}{3\sqrt{3}};$$

г) Виконаємо інтегрування частинами:

$$\int\limits_{0}^{1}arcsinxdx=\begin{vmatrix}u=arcsinx, & dv=dx\\ du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v=x\end{vmatrix}=xarcsinx\Bigg|_{0}^{1}-\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=1\cdot arcsin1-$$

$$0\cdot arcsin0+\sqrt{1-x^2}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{\pi}{2}-1.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти визначені інтеграли:

10.1. $\int\limits_{-2}^{3}\left(2x^3+x^2-5\right)dx$;

10.2. $\int\limits_{-2}^{2}\left(x^3+4x\right)dx$;

10.3. $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$;

10.4. $\int\limits_{2}^{-13}\frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$;

10.5. $\int\limits_{4}^{9}\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x}+1}$;

10.6. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+5}$;

10.7. $\int\limits_{2}^{3}\frac{xdx}{x^2+1}$;

10.8. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{cos^2x}$;

10.9. $\int\limits_{0}^{2}\frac{x+3}{x^2+4}dx$;

10.10. $\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{x^2+5x+4}$;

10.11. $\int_0^{\pi} sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}dx$;

10.12. $\int_0^{\pi} cos\frac{3x}{2}cos\frac{x}{2}dx$;

10.13. $\int_{-0,5}^{1}\frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$;

10.14. $\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;

10.15. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+cosx}$;

10.16. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{sin\frac{1}{x}dx}{x^2}$;

10.17. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{sinxdx}{cos^2x}$;

10.18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^2xdx$;

10.19. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{cosx-cos^3x}dx$;

10.20. $\int_2^3\frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

10.21. $\int_1^2 x\ln xdx$;

10.22. $\int_0^1 xe^{-x}dx$;

10.23. $\int_1^2 x\ln(x+1)dx$;

10.24. $\int_0^1 x^2e^{-2x}dx$;

10.25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2-1)sin2xdx$;

10.26. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}xcosxdx$.

Індивідуальне завдання

Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_{-1}^{1}\left(2x^{n-10}+x^{n-2}-3e^{nx}\right)dx$;

б) $\int_{1-n}^{1}\frac{(2x+n)dx}{x^2+nx+n}$;

де n – номер студента за списком.

§ 2. Застосування визначеного інтеграла на практиці.

Обчислення площ

За геометричним змістом визначений інтеграл є площею, обмеженою зліва прямою $x=a$, справа прямою $x=b$, знизу прямою $y=0$ (вісь Ox) і зверху неперервною функцією $f(x)$. За цих умов формула Ньютона − Лейбніца дає значення площі у вигляді додатного числа. Тому при розв’язуванні задач за допомогою визначеного інтеграла необхідно мати графік функції в межах інтегрування.

Якщо графіку функції відповідає рис. 10.4., то необхідно знайти окремо площі S_2 і S_1 (вона буде від’ємною, бо функція в інтервалі від a до b від’ємна), але оскільки площа за змістом від’ємною бути не може, то

$S=|S_1|+S_2$. Якщо ж графіку функції відповідає рис. 10.5., то спочатку розв'язують систему рівнянь з обох функцій і знаходять значення абсцис a та b точок перетину ліній.

За визначенням $\int_a^b f_1(x)dx$ є площею фігури між віссю OX та функцією $f_1(x)$, а $\int_a^b f_2(x)dx$ − площа між віссю OX та функцією $f_2(x)$. Тому $S=S_1-S_2$.

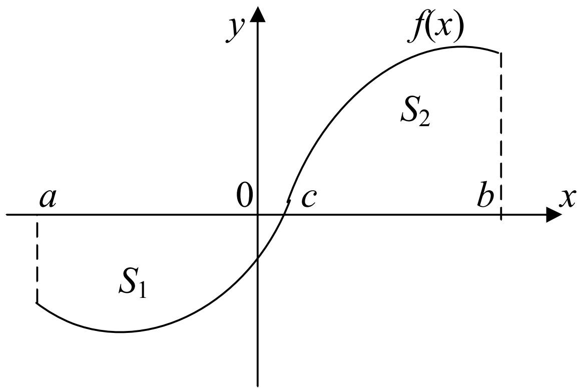

Рис. 10.4.

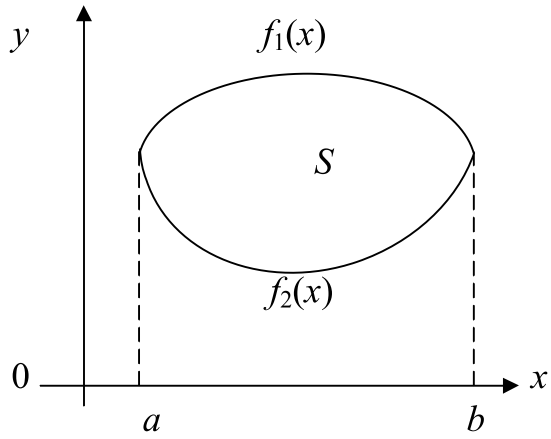

Рис. 10.5.

<u>Приклад:</u> Обчислити площу фігури, обмежену лініями $y=2x+3$ та $y=x^2$.

Знайдемо точки перетину функцій та побудуємо графіки заданих функцій. З системи рівнянь знаходимо: $x^2=2x+3 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x+1)(x-3)=0$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1=-1; y_1=1 \\ x_2=3; y_2=9 \end{cases}$, але $\int_{-1}^{3}(2x+3)dx$ є площею прямолінійної трапеції *aABb*, а $\int_{-1}^{3}x^2dx$ − площею криволінійної трапеції *aAOBb.* Шукана площа обмежена заданими лініями і знаходиться між ними, тому $S=S_1-S_2$.

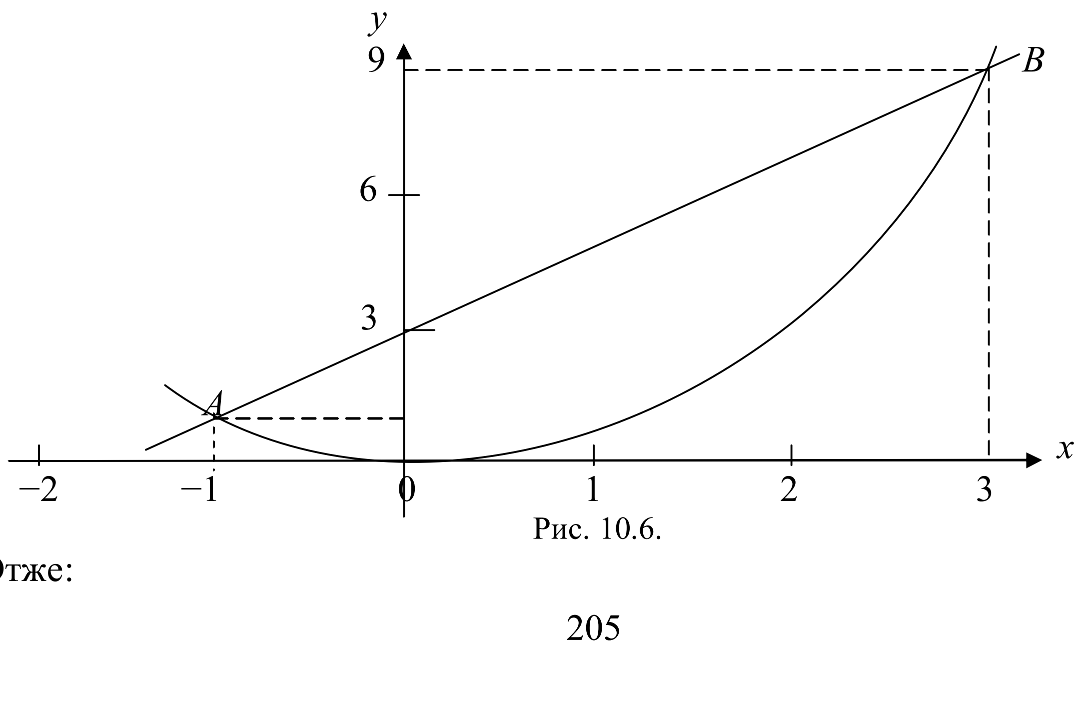

Рис. 10.6.

Отже:

$S=\int\limits_{-1}^{3}(2x+3)dx-\int\limits_{-1}^{3}x^2dx=\int\limits_{-1}^{3}2xdx+\int\limits_{-1}^{3}3dx-\int\limits_{-1}^{3}x^2dx=(x^2+3x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{3}=9+9-9-$
$-1+3-\frac{1}{3}=10\frac{2}{3}$(кв. од.).

Об'єм тіл обертання

Нехай необхідно обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням довільної кривої $y=f(x)$ навколо осі OX (рис.10.7). Якщо по осі OY відкладати значення площі перерізу тіла обертання, а по осі $OX-$ довжину відрізка осі обертання, то від фігури, зображеної на рис. 10.7, перейдемо до фігури, зображеної на рис. 10.8.

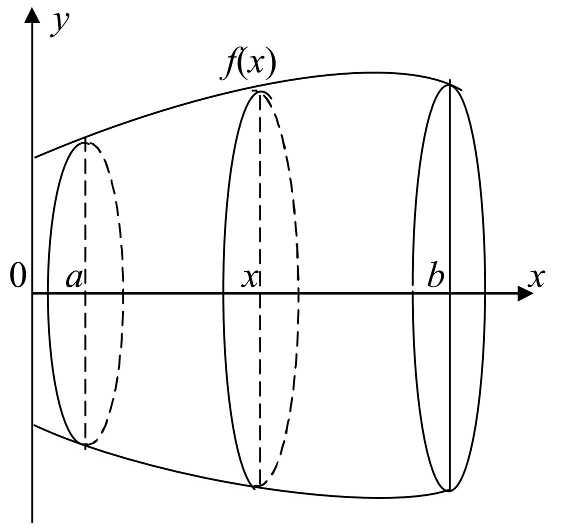

Рис. 10.7.

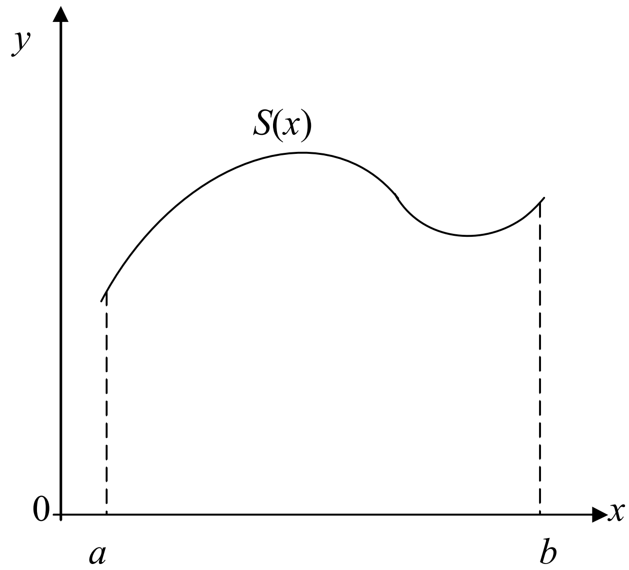

Рис. 10.8.

Тому $V=\int\limits_{a}^{b}S(x)dx,$ але для тіла обертання (рис.113) з довільною точкою x маємо: $S(x)=\pi y^2$ (ордината y грає роль радіуса кола).

Тому об'єм тіла обертання:

$$V=\int\limits_{a}^{b}\pi y^2dx \qquad (10.3)$$

Якщо тіло утворене обертанням кривої навколо осі OY, то $V=\int\limits_{c}^{d}\pi x^2dy$, де c і d − межі зміни величини y.

Приклад: Обчислити об'єм тіла обертання, утвореного обертанням кривої $y=\sqrt{x}$ навколо осі OX в межах: $a=0;b=9$.

Об'єм $V=\pi\int\limits_{0}^{9}y^2dx=\pi\int\limits_{0}^{9}xdx=\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{9}=\frac{\pi}{2}(81-0)=\frac{81}{2}\pi$ (*кв.од*).

Довжина дуги кривої

Відомо, що $\int dl = L + C$. Якщо $y = f(x)$ задана на $[a;b]$, то $L = \int_a^b dl$.

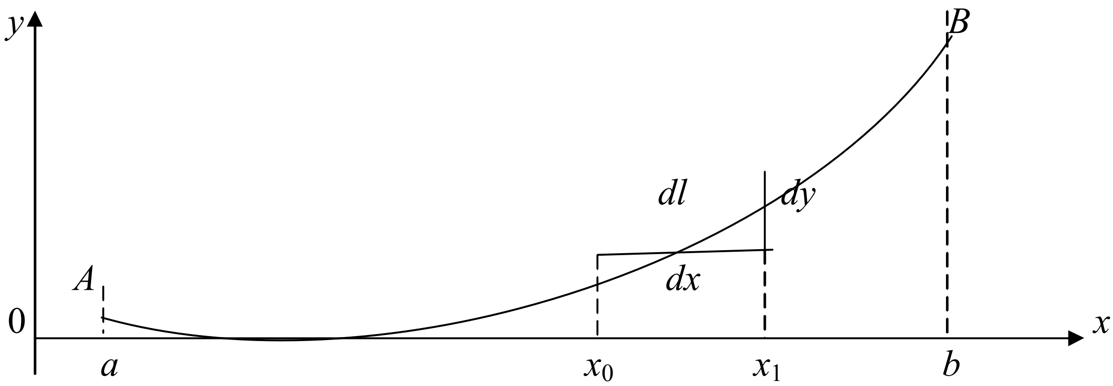

Рис. 10.9.

Якщо величина x (рис. 10.9.) отримає приріст Δx, то функція отримає приріст Δy, а довжина лінії збільшиться на величину Δl. Через малий приріст аргументу відрізок Δl кривої лише дещо відрізняється від прямої, тому за теоремою Піфагора можемо записати: $(\Delta l)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$, або в диференціальній формі: $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dx)^2 \cdot (1 + (\frac{dy}{dx})^2)$.

Тому $dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (y')^2} dx$.

Тоді довжина лінії:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \qquad (10.4)$$

<u>Приклад:</u> Обчислити довжину лінії $y = \frac{x^2}{2}$, якщо $x \in [0;1]$.

Відомо $y = \frac{1}{2}x^2$, тоді похідна заданої функції $y' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x \Rightarrow (y')^2 = x^2$.

Згідно формули (10.4), маємо:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \left| \begin{matrix} x = tgt; dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ t = 0; t = \dfrac{\pi}{4} \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sqrt{1 + tg^2 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{dt}{\cos^3 t} = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\cos t \cdot dt}{\cos^4 t} = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\cos t \cdot dt}{(1 - \sin^2 t)^2} = \left| \begin{matrix} \sin t = z; \cos t dt = dz \\ z = 0; z = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dz}{(1-z^2)^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dz}{(1-z)^2(1+z)^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{A}{1-z} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{1+z} + \frac{D}{(1+z)^2}\right)dz =$$

$$= \left|A = B = C = D = \tfrac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{dz}{1-z} + \frac{dz}{(1-z)^2} + \frac{dz}{1+z} + \frac{dz}{(1+z)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\ln(1-z) + \frac{1}{1-z} + \ln(1+z) - \frac{1}{1+z}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+z}{1-z} + \frac{2z}{1-z^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \ln\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Площа поверхні тіл обертання

Якщо $\int ds = S + C,$ то у межах обертання від a до b кривої $y = f(x)$ будемо мати $S = \int_a^b ds,$ де ds – елемент площі поверхні тіла обертання (рис. 10.10).

Через малість dx можемо вважати виділеним елемент об'єму циліндра, площа поверхні якого $ds = 2\pi y \cdot dl$ (y грає роль радіуса основи циліндра, а dl – його твірної).

Враховуючи, що $dl = \sqrt{1+(y')^2}dx,$ маємо $ds = 2\pi y\sqrt{1+(y')^2 dx}.$

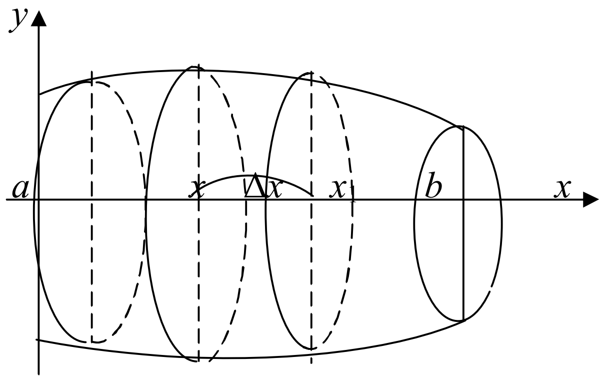

Рис. 10.10.

Тоді площа поверхні тіл обертання:

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx \qquad (10.5)$$

<u>Приклад:</u> Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = \dfrac{x^2}{2}$ навколо осі OX у межах: $a = 0, b = 1.$

Маємо: $y' = (\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2}\cdot 2x = x.$

Тоді $S = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{2}x^2\sqrt{1+x^2}dx = \pi\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}dx = \begin{vmatrix} x = tgt; dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \\ t = 0; t = \frac{1}{4}\pi \end{vmatrix} =$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{4}\pi} tg^2 t\cdot\cos t\cdot\frac{dt}{\cos^2 t} = \pi\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\frac{\sin^2 t}{\cos^5 t}dt = \pi\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^6 t}dt =$$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\frac{\sin^2 t}{(1-\sin^2 t)^3}\cos t\cdot dt = \begin{vmatrix} \sin t = z; \cos t\cdot dt = dz \\ z = 0; z = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \pi\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\frac{t^2 dt}{(1-t^2)^3} =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \left(\frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{(1-t)^3} + \frac{D}{1+t} + \frac{E}{(1+t)^2} + \frac{F}{(1+t)^3}\right) dt \Rightarrow$$

$$A = B = D = E = \frac{1}{16};\ C = F = \frac{1}{8}.$$

Необхідно самостійно визначити значення цих коефіцієнтів, провести інтегрування дробів і отримати:

$$\pi \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^3} = \tfrac{1}{16}\pi \left(\ln\frac{(1-t)^2}{1-t^2} + \frac{2t}{1-t^2} + \frac{4t}{(1-t^2)^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\pi}{16}\cdot\left(\ln\frac{(1-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sqrt{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} - \ln 1 - 0 - 0\right) = \frac{\pi}{16}\ln(3-2\sqrt{2}) + \tfrac{5}{8}\sqrt{2}$$

Економічна задача

Деякий банк приймає вклади під $p\%$ річних. Визначити суму, що набереться на рахунку через t років.

Звичайно, існує формула складних відсотків $N = N_0(1+p)^t$, де N_0 — початковий вклад, а N — остаточна сума вкладу. Але при великих значеннях t формула стає досить незручною в користуванні. Згадуємо, що у біномі Ньютона i—й член знаходиться за формулою: $\frac{t!}{i!(t-i)!}\cdot p^{t-i}$, де $t!$ (знак ! читається, як факторіал і означає добуток натуральних чисел від одиниці до t. Наприклад, $6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$), а кількість членів на один більша від показника степеня).

Якщо в момент t зроблено вклад N, то за час Δt його величина збільшиться на величину ΔN, яка буде пропорційною як часу t, так і внесеній сумі N. Тому ΔN пропорційна $N\Delta t$, звідки $\Delta N = kN\Delta t$, де k − коефіцієнт пропорційності, який повністю визначається відсотком прибутку p.

Тому: $\Delta N = pN\Delta t \Rightarrow dN = pNdt$, звідки $\frac{dN}{N} = pdt$. Для сталої величини p: $\int\frac{dN}{N} = p\int dt \Rightarrow \ln N = pt + \ln C \Rightarrow N = Ce^{pt}$. Якщо в момент $t = 0$ у банк була покладена початкова сума N_0, то $N_0 = Ce^{p\cdot 0} = C\cdot 1 = C$.

Отже: $C = N_0$, звідки маємо формулу

$$N = N_0 e^{pt} \qquad (10.6)$$

Якщо $p = 0{,}05$, що відповідає 5%, а $t = 20$ років, то $pt = 0{,}05 \cdot 20 = 1 \Rightarrow e^1 = e \approx 2{,}72$. Отже, вклад буде становити суму $N = 2{,}72 N_0$ (легендарний вклад Полуботька збільшився за 300 років у 3 269 017 разів).

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити площу фігур, що обмежені лініями. Зробити малюнки:

10.27. Параболою $y = x^2$ і прямою $y = x$.

10.28. Параболою $y = x^2 - 4$ і прямою $y = 1$.

10.29. Параболою $y = x^2 - 4x$ і прямою $y = 0$.

10.30. Параболою $y = x^2 - 4x + 4$ і прямою $y = 4$.

10.31. Параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $y = 1$.

10.32. Параболою $y = 2x - \frac{1}{4}x^2$ і прямою $4y = x + 6$.

10.33. Параболою $y = x^2 - 2$ і прямою $y = x$.

10.34. Параболою $y = 2x^2$ з прямими $x = 1$, $x = 2$ та віссю Ох.

10.35. Прямою $x = 4$, параболою $y = 3x^2 - 6x$ і віссю Ох на відрізку $[0;4]$.

10.36. Параболою $y = (x+2)^2$, прямою $y = 4 - x$ та віссю Ох.

10.37. Гіперболою $xy = 3$ і прямою $x + y = 4$.

10.38. Параболами $x^2 - 3y = 4$ і $x^2 + y = 8$.

10.39. Параболою $y = 5x - 2x^2$ та прямою $y = 2x - 2$.

10.40. Параболами $x = 4 - y^2$ і $x = y^2 - 2y$.

10.41. Параболами $x = 8 - y^2$ і $x = y^2$.

10.42. Параболою $x = 2y^2 + 6y$ і прямою $x - y + 2 = 0$.

Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ох* фігури, утвореної вказаними лініями. Зробити рисунок.

10.43. $\begin{cases} x = 0; x = 3 \\ y = 0; y = 4x - x^2 \end{cases}$.

10.44. $\begin{cases} x = -1; x = 2 \\ y = 0; y = 4 - x^2 \end{cases}$.

10.44. $\begin{cases} x = 0; x = \pi \\ y = 0; y = \sin x \end{cases}$.

10.45. $\begin{cases} x = 2; x = 8 \\ y = 0; y = \dfrac{8}{x} \end{cases}$.

Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Оу* фігури, утвореної вказаними лініями. Зробити рисунок.

10.46. $\begin{cases} y = 0; y = 4 \\ x = 0; x^2 = 4y \end{cases}$.

10.47. $\begin{cases} y = 1; y = 6 \\ x = 0; x = \dfrac{6}{y} \end{cases}$.

10.48. Визначити довжину дуги кривої $y = \ln x$ від $x_1 = 0{,}75$ до $x_2 = 2{,}4$.

10.49. Визначити довжину дуги кривої $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{3}$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = 12$.

10.50. Визначити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox параболи $y^2 = 2x + 1$ в межах від $x_1 = 1$ до $x_2 = 7$.

Індивідуальне завдання

Обчислити площу фігури, що обмежена параболою $y = n - (x-1)^2$ і прямою $y = n - 4$ (n – номер студента за списком). Зробити малюнок.

§ 3. Невласні інтеграли

З геометричного означення визначеного інтеграла випливає, що шукана площа обмежена неперервними лініями з чотирьох усіх сторін: з боків та знизу прямими $x = a, x = b, y = 0,$ а зверху неперервною та обмеженою функцією $y = f(x)$. При обчисленні таких інтегралів застосовується формула Ньютона − Лейбніца як спосіб обчислення площі. Такі визначені інтеграли, які у геометричному змісті визначають замкнену і обмежену зі всіх сторін площу**,** називаються **власними** інтегралами**.** Якщо умова обмеження чи замкнутості на визначеному інтервалі порушена, то інтеграл називається **невласним**.

Порушення умови обмеженості зі сторони вертикальних прямих $x = a$ та $x = b$ (обох чи хоч би однієї з них) призводить до появи так званих інтегралів І роду. Такі інтеграли легко побачити через їх специфічний вигляд :

$$\int_{-\infty}^{b} f_1(x)dx; \quad \int_{a}^{+\infty} f_2(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(x)dx.$$

Таким інтегралам відповідає рис. 10.11.

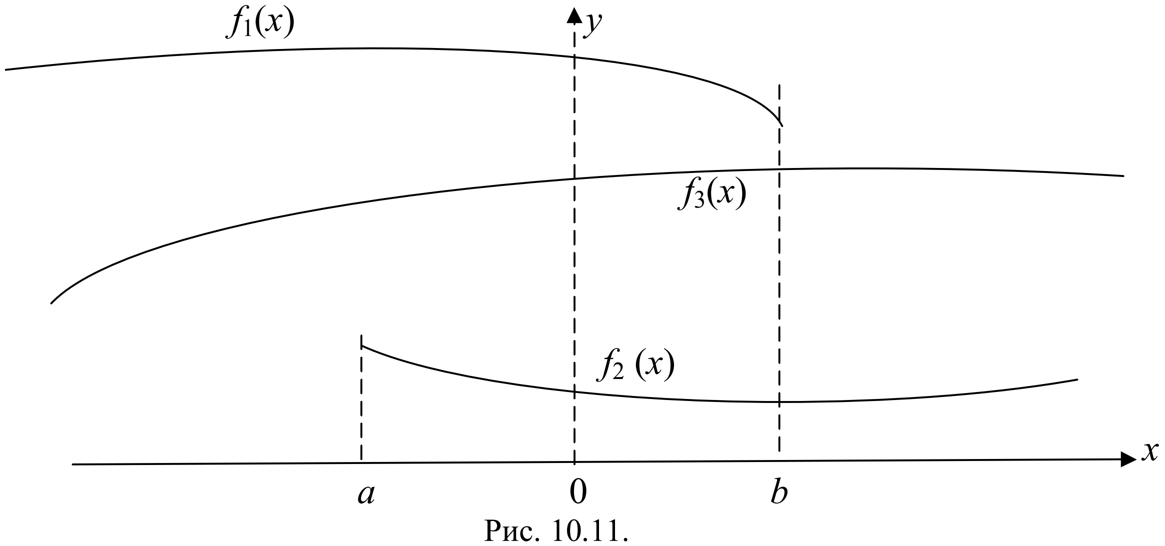

Рис. 10.11.

Безпосереднє застосування формули Ньютона-Лейбніца неможливе через відсутність обмеження границь, при якому ця формула справедлива. Тому такі інтеграли обчислюють таким чином: роблять штучне обмеження (рис. 10.12.) і замість, наприклад, $\int_a^\infty f(x)dx$, розглядають $\int_a^b f(x)dx$, де b − довільне стале число.

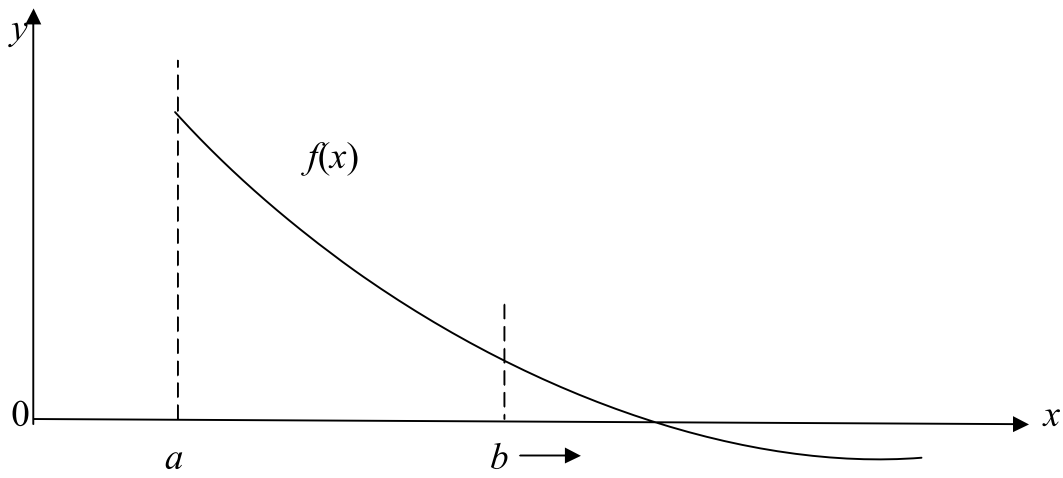

Рис. 10.12.

Тоді: $$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

згідно з формулою Ньютона-Лейбніца. Надалі розглядають:

$$\lim_{b\to\infty}(F(b) - F(a)).$$

Озн. Якщо границя $\lim_{b\to\infty}(F(b) - F(a))$ існує і дорівнює числу A, то невласний інтеграл збіжний. А якщо вказана границя не існує або безмежна, то інтеграл розбіжний.

Якщо невласний інтеграл збіжний, то площа фігури існує (не дивлячись на необмеженість границі), а якщо інтеграл розбіжний, то площа не існує.

<u>Приклад:</u> Обчислити: а) $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$; б) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.

Розв'язання: а) Розглянемо $\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b - 0 = \ln b$ та $\lim_{b\to\infty} \ln b = \ln\infty = \infty$.

Границя необмежена, тому інтеграл розбіжний.

б) Для $\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{b} \Rightarrow \lim_{b\to\infty}(1 - \frac{1}{b}) = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1.$

Отже, інтеграл збіжний.

Порушення умови неперервності та обмеженості самої функції $y = f(x)$ також призводить до порушення умови замкнутості площі навіть при обмеженості границь (рис.101), хоч сам інтеграл на перший погляд має "нормальний" вигляд, притаманний власному інтегралу: $\int\limits_a^b f(x)dx$. Такі інтеграли називаються невласними інтегралами II роду.

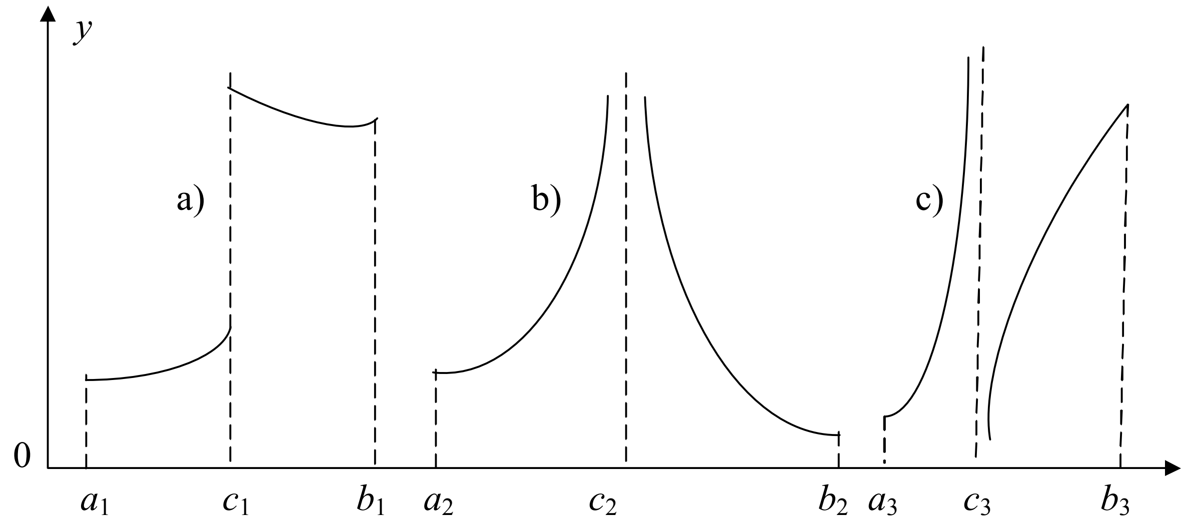

Рис. 10.13.

Приклади таких інтегралів:

$$\int\limits_{-4}^{4}\frac{dx}{x};\int\limits_{0}^{4}\frac{dex}{x^2};\int\limits_{-10}^{4}\frac{dx}{\sqrt{4-x}};\int\limits_{-4}^{1}\frac{dx}{x\ln x}\text{ тощо.}$$

Для інтегралів, які графічно відображені на рис.101 a, запишемо: $\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)dx = \int\limits_{a_1}^{c_1} f(x)dx + \int\limits_{c_1}^{b_1} f(x)dx$ (це так звана кусково-неперервна функція). До інтегралів, зображених на рис. 10.13. b, c, застосовують граничний перехід (рис. 10.13). Підінтегральна функція така, що при $x = b$ вона стає необмеженою.

Виберемо зліва від точки b точку c, для якої $f(c) = A$. Тоді $\int\limits_a^c f(x)dx = F(c) - F(a)$. Надалі розглядаємо $\lim\limits_{c\to b}(F(c) - F(a))$. Якщо ця границя існує у вигляді невід'ємного числа (при правильному порядку інтегрування та невід'ємній функції), то інтеграл збіжний, у іншому випадку – розбіжний.

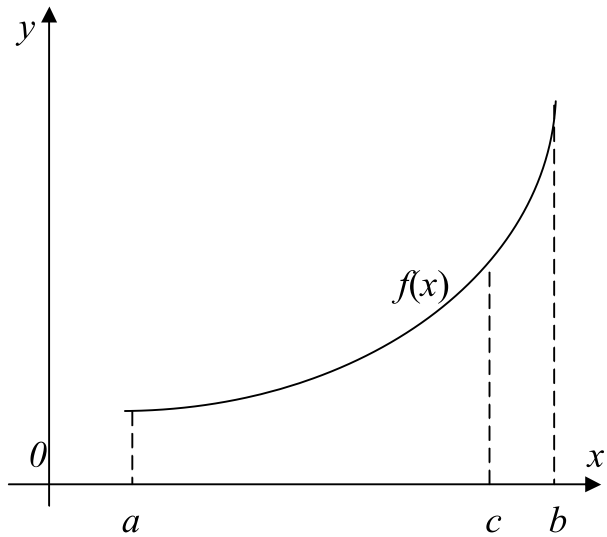

Рис. 10.14.

Якщо функція існує справа та зліва від точки розриву, то необхідно до точки розриву наближатись з обох сторін і розглянути дві границі.

Приклад: Обчислити $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}$.

Підінтегральна функція безмежно зростає при $x \to 0$, який входить в межі інтегрування. Отже, цей інтеграл є невласним інтегралом II роду.

Тому запишемо:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4} = \int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^4} + \int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^4}$$

і до кожного з них застосуємо граничний перехід.

а) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^4} = \lim\limits_{b\to 0-o}\int\limits_{-1}^{b}\frac{dx}{x^4} = \lim\limits_{b\to 0-o}(-\frac{1}{3x^3})\Big|_{-1}^{b} = -\frac{1}{3}\lim\limits_{b\to 0-o}(\frac{1}{b^3}+1) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(0-0)^3} - \frac{1}{3}$.

$\frac{1}{(0-o)^3} = -\infty$, тоді $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3}(-\infty) - \frac{1}{3} = \infty$.

б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^4} = \lim\limits_{a\to 0+o}\int\limits_{a}^{1}\frac{dx}{x^4} = \lim\limits_{a\to 0+o}(-\frac{1}{3x^3})\Big|_{a}^{1} = -\frac{1}{3}(1-\frac{1}{(0+o)^3}) = = -\frac{1}{3} + \infty = \infty$.

Отже, $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4} = \infty + \infty = \infty$, – інтеграл розбіжний.

Якщо не звертати увагу на те, що інтеграл невласний, і застосувати до нього формулу Ньютона-Лейбніца, то отримаємо: $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4} = \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{2}{3}$

Отримали від'ємне значення інтеграла при невід'ємній функції і правильному порядку інтегрування, що є неможливим. Приклад досить наглядно ілюструє, яку помилку можна допустити, якщо нехтувати поняттям невласного інтеграла.

Існують невласні інтеграли, які вміщують в собі ознаки як інтегралів I роду, так і II роду. Наприклад, $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2-4}$ має безмежну границю, що притаманно інтегралам I роду, а підінтегральна функція в області інтегрування не існує при значенні $x = 2$, що характерно для рівнянь II роду. Такі інтеграли також обчислюються через граничний перехід. Досить зручно цей інтеграл розбити на три окремих інтеграли:

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2-4} = \int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-4} + \int\limits_{2}^{k}\frac{dx}{x^2-4} + \int\limits_{k}^{\infty}\frac{dx}{x^2-4}$$

(число k може бути будь-яким числом, більшим числа 2, наприклад $k = 10$). Перші два інтеграли II роду, а третій − I роду.

Звернемо увагу на невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$, який називається інтегралом Пуассона і грає важливу роль в теорії ймовірностей та математичної статистики.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Дослідити невласні інтеграли на збіжність і при можливості обчислити:

10.51. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}$;

10.52. $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{x^2-4}$;

10.53. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{(x+2)^3}$;

10.54. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2}{e^{x^3}}dx$;

10.55. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}\pi}\frac{dx}{1-\cos 2x}$;

10.56. $\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$.

Індивідуальне завдання

Дослідити невласний інтеграл на збіжність: $\int\limits_{n}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2nx+\left(n^2+4\right)}$, n – номер студента за списком.

§5. Наближені методи інтегрування

Застосування формули Ньютона – Лейбніца викликає необхідність знаходження первісної $F(x)$. Крім певної кількості інтегралів, для яких взагалі неможливо виразити первісну через елементарні функції, сам процес знаходження її в багатьох випадках вимагає досить великих затрат часу.

Разом з тим, усі визначені інтеграли застосовують для тих чи інших практичних задач з певною точністю обчислення. Наприклад, при обчисленні земельних площ потрібна набагато менша точність, ніж при виготовленні деталей космічних апаратів. Тому застосовують існуючі в достатній кількості методи наближеного обчислення визначених інтегралів, з яких ми розглянемо найбільш вживані.

Формула трапецій

Для обчислення $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ розіб'ємо область інтегрування на n рівних частин (рис.122). Отримаємо n криволінійних трапецій, площу кожної з яких замінимо площею прямолінійної трапеції.

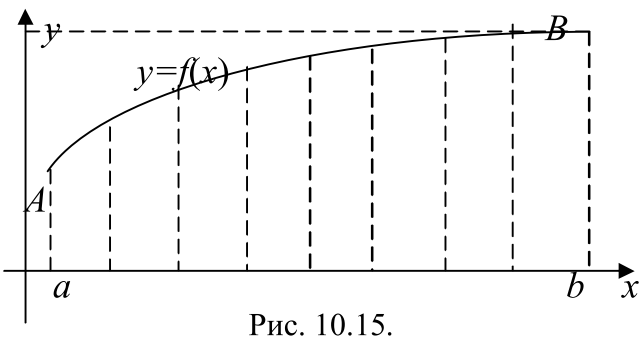

Рис. 10.15.

Тоді $S \approx s_1 + s_2 + ... + s_n$, де $s_1 = \frac{aA + x_1B}{2} \cdot (x_1 - a)$; $s_2 = \frac{x_1B + x_2C}{2}(x_2 - x_1)$ і т.д.

Якщо позначити $x_1 - a = x_2 - x_1 = ... = b - x_{n-1} = \Delta x$, то $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Разом з тим $aA = f(a)$, $x_1B = f(x_1)$ і т.д., тому

$$S \approx \frac{f(a) + f(x_1)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot \frac{b-a}{2} + \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + ...$$

$$... + \frac{f(x_{n-1}) + f(b)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2n} \cdot \left(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + f(b)\right).$$

Введемо позначення: $f(a) = y_a$, $f(b) = y_b, f(x_i) = y_i$. Отримаємо:

$$S \approx \frac{b-a}{2n}(y_a + y_b + 2y_1 + \quad + 2y_2 + ...).$$

Якщо ввести позначення $y_a + y_b = У_{кр}$ та $y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1} = У_{пром}$, то формула отримає досить простий вигляд:

$$S \approx \frac{b-a}{2n}(У_{кр} + 2У_{пром}) \tag{10.7}$$

Ця формула називається ***формулою трапецій***.

Приклад: Обчислити $\int_0^6 (x^3 - x^2 - 2x - 1)dx.$

За формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_0^6 (x^3 - x^2 - 2x - 1)dx = (\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 - x)\Big|_0^6 = \frac{6^4}{4} - \frac{6^3}{3} - 6^2 - 6 - 0 = 210.$$

Для обчислення за формулою трапецій розіб'ємо область інтегрування на 6 частин точками: $a = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$; $b = 6$. Знаходимо значення функції в цих точках:

$y_a = y(0) = -1$;

$y_b = y(6) = 6^3 - 6^2 - 12 - 1 = 216 - 36 - 13 = 180 - 13 = 167$;

$y_1 = y(1) = 1 - 1 - 2 - 1 = -3$;

$y_2 = y(2) = 8 - 4 - 4 - 1 = -1$;

$y_3 = y(3) = 27 - 9 - 6 - 1 = 11$;

$y_4 = y(4) = 64 - 16 - 8 - 1 = 39$;

$y_5 = y(5) = 125 - 25 - 10 - 1 = 89.$

Знаходимо: $У_{кр.} = y_a + y_b = -1 + 167 = 166$; $У_{пром} = -3 - 1 + 11 + 39 + 89 = 135.$

Тоді: $S \approx \frac{6-0}{2 \cdot 6}(166 + 2 \cdot 135) = \frac{1}{2}(166 + 270) = 83 + 135 = 218.$

Отримане значення площі на 8 одиниць більше від точного значення. Якщо область інтегрування розбити на більшу кількість частин, то точність обчислення збільшиться. Рекомендується провести самостійні обчислення при $n = 12$.

Формула парабол (мала формула Сімпсона)

Розглянемо $\int_a^b f(x)dx,$ де $f(x)$ − функція невеликої кривизни (рис. 10.16).

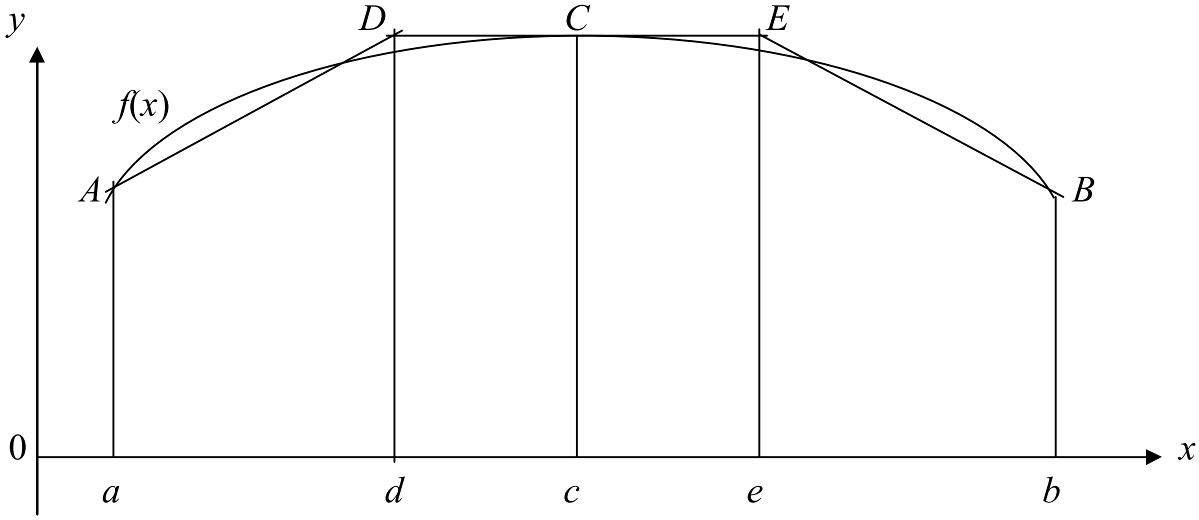

Рис. 10.16.

З середини відрізка $b-a$ (точка c) проводимо вертикаль cC і в точці C до кривої проведемо дотичну. Поділимо відрізок $b-a$ точками d і e на три рівні частини. З цих точок проводимо вертикалі до перетину з дотичною в точках D і E. Проводимо прямі AD та EB, перетворюючи криволінійні трапеції $aADd$ та $eEBb$ в прямолінійні. Шукану площу замінимо сумою трьох площ, утворених трапеціями: $aADd$, $dDEe$, $eEBb$.

Тоді $S \approx S_1 + S_2 + S_3$. Враховуємо, що $ad = de = eb = \dfrac{b-a}{3}.$

Отримаємо: $S_1 = S_{aADd} = \dfrac{b-a}{3} \cdot \dfrac{aA + dD}{2} = \dfrac{b-a}{6}(y_a + dD); S_2 = S_{dDEe} =$

$= \dfrac{b-a}{3} \cdot \dfrac{dD + eE}{2} = \dfrac{b-a}{6} \cdot (dD + eE); S_3 = S_{eEBb} = \dfrac{b-a}{3} \cdot \dfrac{eE + bB}{2} = \dfrac{b-a}{6}(eE + y_b)$

В сумі одержимо: $S \approx \dfrac{b-a}{6}\left(y_a + y_b + 2(dD + eE)\right).$

Розглянемо трапецію, $dDEe$ у якої cC – середня лінія, завдяки чому $dD + eE = 2cC = 2y_c$. Тому отримаємо:

$$S \approx \frac{b-a}{6}(y_a + y_b + 4y_c). \qquad (10.8)$$

Формула називається ***малою формулою Сімпсона*** або формулою парабол завдяки умові застосування її до ліній малої кривизни, до яких належить і парабола. Для многочленів степеня не вище третього (слабка кривизна) формула дає точні значення інтеграла.

<u>Приклад:</u> Обчислити $\int\limits_0^6 (x^3 - x^2 - 2x - 1)dx$.

Відомо, що $b - a = 6$, $y_a = -1$ $y_b = 167$, $y_c = y(3) = 11$.

Тоді $S \approx \frac{6}{6}(-1 + 167 + 4 \cdot 11) = 210$.

Велика формула Сімпсона

При малій кривизні лінії формула парабол дає чудові результати, але її неможливо застосувати до функції, зображеної на рис. 10.17, для якої $f(a) = f(c) = f(b) = 0$, а площа нулю не дорівнює.

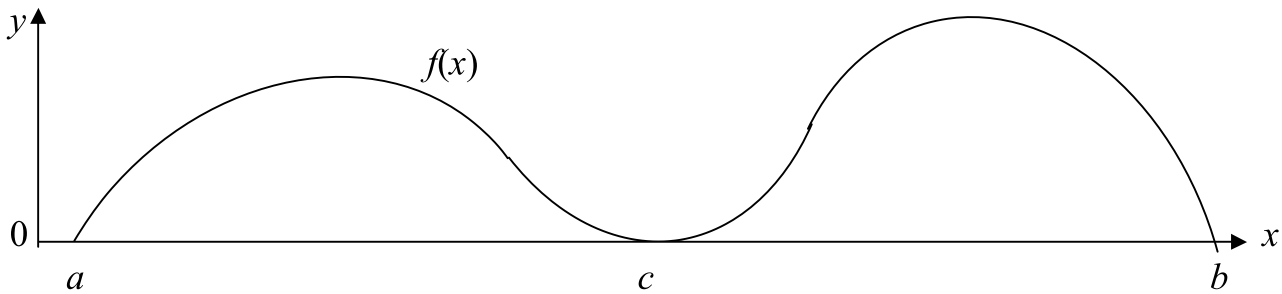

Рис. 10.17.

Якщо формулу парабол застосувати окремо до лівої та правої частин кривої, то отримаємо необхідну площу. Взагалі, якщо розглядати невелику ділянку кривої, то на ній кривизна лінії буде малою, тому до неї можливо застосувати формулу парабол (рис. 10.18).

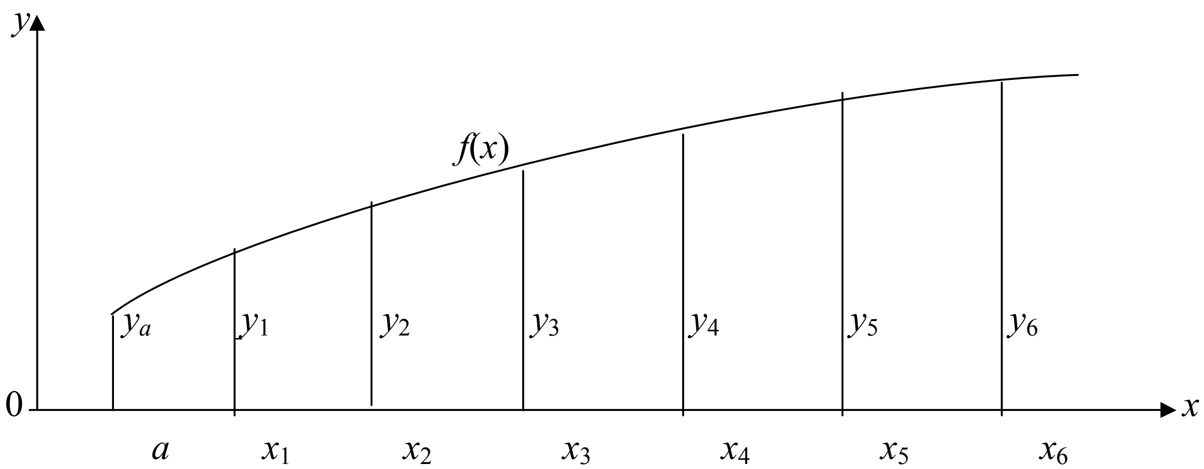

Рис. 10.18.

Розіб'ємо область інтегрування $[a;b]$ на n парних частин і до кожної пари застосуємо формулу парабол. Ординати кривої в точках a, x_2, x_4, x_6 і т.д. для кожної пари будуть основами трапецій, а в точках x_1, x_3, x_5 і т.д. – їх середніми лініями. Довжина основи кожної пари є величина $\frac{b-a}{n}\cdot 2$.

Тоді $S_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{2(b-a)}{n}(y_a + y_2 + 4y_1); S_2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{2(b-a)}{n}(y_2 + y_4 + 4y_3)$ і т.д.

Додаючи, отримаємо:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + ... = \frac{b-a}{3n}(y_a + 2y_2 + 4y_1 + 2y_4 + 4y_3 + ... + y_b) =$$

$$= \frac{b-a}{3n}(y_a + y_b + 2(y_2 + y_4 + y_6 + ...) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + ...)).$$

Якщо позначити $y_a + y_b = У_{кр.}$, $y_1 + y_3 + \; + y_5 + ... = У_{непар}$, $y_2 + y_4 + \; + y_6 + ... =$ $У_{пар}$, то отримаємо формулу:

$$S = \frac{b-a}{3n}\,(У_{кр}+2У_{пар}+4У_{непар}) \qquad (10.9)$$

Ця формула називається ***великою формулою Сімпсона*** і дає досить високу точність обчислення.

<u>Приклад:</u> Обчислити $\int\limits_0^6 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

За формулою Ньютона − Лейбніца: $I = \int\limits_0^6 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} =$

$$= \begin{vmatrix} x^2 + 2x + 2 = t^2 \\ 2(x+1)dx = 2tdt \\ t_1 = \sqrt{2}; t_2 = \sqrt{50} \end{vmatrix} = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{50}} \frac{tdt}{\sqrt{t^2}} = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{50}} dt = t\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{50}} = \sqrt{50} - \sqrt{2} = 5{,}657.$$

За формулою Сімпсона: нехай $n = 6$.

Тоді $a = 0;$ $b = 6;$ $x_1 = 1;$ $x_3 = 3;$ $x_5 = 5;$ $x_2 = 2;$ $x_4 = 4;$ $x_6 = 6;$ $y_a = \frac{1}{\sqrt{2}};$

$y_b = \frac{7}{\sqrt{50}};$ $y_1 = \frac{2}{\sqrt{5}};$ $y_3 = \frac{4}{\sqrt{17}};$ $y_5 = \frac{6}{\sqrt{37}};$ $y_2 = \frac{3}{\sqrt{10}};$ $y_4 = \frac{5}{\sqrt{26}}.$

Тоді $I \approx \frac{6}{3\cdot 6}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{7}{\sqrt{50}} + \; + 2(\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{5}{\sqrt{26}}) + 4(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{6}{\sqrt{37}}) = 5{,}653.$

Різниця між точним та наближеним значеннями становить всього $0{,}004$, хоч інтервал інтегрування розбито всього на 6 частин.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити визначені інтеграли за формулою Ньютона-Лейбніца і за формулою трапецій при діленні області інтегрування на 8 рівних частин.

10.57. $\int_{1}^{9}\sqrt[3]{9x-17}dx$;

10.58. $\int_{4}^{12}\sqrt[3]{9x-44}dx$;

10.59. $\int_{2}^{10}\sqrt[3]{9x-26}dx$;

10.60. $\int_{-4}^{4}\sqrt[3]{9x+28}dx$;

10.61. $\int_{-2}^{6}\sqrt[3]{9x+10}dx$;

10.62. $\int_{-3}^{5}\sqrt[3]{9x+19}dx$.

Обчислити визначені інтеграли за формулою Ньютона-Лейбніца та за формулами Сімпсона ($n=10$ для великої формули).

10.63. $\int_{-1}^{2}\ln(3x+4)dx$;

10.64. $\int_{2}^{5}\ln(3x-5)dx$;

10.65. $\int_{-4}^{-1}\ln(3x+13)dx$;

10.66. $\int_{1}^{4}\ln(3x-2)dx$;

10.67. $\int_{3}^{6}\ln(3x-8)dx$;

10.68. $\int_{0}^{3}\ln(3x+1)dx$.

Запитання до розділу X

1. Що називається визначеним інтегралом?
2. Який геометричний зміст визначеного інтеграла?
3. Що таке інтеграл зі змінною верхньою границею?
4. В чому полягає теорема Барроу?
5. Що таке формула Ньютона-Лейбніца?
6. Які властивості має визначений інтеграл?
7. Які особливості використання визначеного інтеграла до обчислення площ?
8. За якою формулою обчислюється об’єм тіла обертання?
9. За якою формулою обчислюється довжина дуги кривої?
10. Як обчислюється площа поверхні тіла обертання?
11. Як обчислюються довготермінові вклади?
12. В чому полягає різниця між власними та невласними інтегралами?
13. Чи може бути невизначений інтеграл невласним?
14. Що таке невласні інтеграли I роду?
15. Які інтеграли належать до невласних інтегралів II роду?
16. Чи можуть визначені інтеграли мати ознаки невласних інтегралів I та II роду?
17. Що таке збіжність та розбіжність невласного інтеграла?
18. Який вигляд має формула трапецій?
19. Що таке формула парабол?
20. Для чого потрібна велика формула Сімпсона та який вона має вигляд?