

**МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ УКРАЇНИ
БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

ЕКОНОМІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра вищої математики

**ЕЛЕМЕНТИ ВИЩОЇ АЛГЕБРИ.
МЕТОДИ І МОДЕЛІ**

**навчально-методичні рекомендації
для студентів економічного факультету денної та заочної форм навчання
за кредитно-модульною системою організації навчального процесу
Напрямок підготовки – «економіка підприємства»
ОКР 6.030504 «бакалавр»**

Біла Церква
2013

УДК 512/517 (07)

Рекомендовано до видання

Протокол № від 2013р.

Шевченко Р.Л., Мельниченко О.П. **Елементи вищої алгебри. Методи і моделі:** навчально-методичні рекомендації для студентів економічного факультету денної та заочної форм навчання за кредитно-модульною системою організації навчального процесу. – Біла Церква.– 2010.– 40с.

Навчально-методичні рекомендації включають теоретичний матеріал, задачі і приклади до розділу елементи вищої алгебри відповідно до програми загального курсу вищої математики для студентів економічного профілю денної форми навчання. Наведено необхідний довідковий матеріал, розв'язування типових прикладів та задач, набори завдань для самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Рецензент – **Гребельник О.П.**, кандидат техн. наук, доцент кафедри біофізики та основ технологічних процесів

© БДАУ, 2013

СТРУКТУРА ЗМІСТУ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Вища математика є нормативною дисципліною циклу природничо-наукової підготовки бакалавра напряму – «економіка підприємства».

У результаті вивчення дисципліни студент повинен:

знати: основи вищої математики, що є фундаментом математичної освіти спеціалістів економічного профілю; роль та місце математичних методів у розв'язуванні низки практичних задач;

вміти: формулювати прикладну задачу в математичних термінах і знаходити способи розв'язку цієї задачі; аналізувати одержані результати і на їх основі створювати практичні рекомендації.

Навчання проводиться у формі проведення лекцій, практичних занять, виконання індивідуальних завдань, контрольних робіт та самостійної роботи студентів.

Згідно з освітньо-професійною програмою та навчальними планами підготовки бакалавра напряму – «економіка підприємства» на вивчення дисципліни відведено 54 год, у тому числі 32 год – лекційні заняття, 48 год – практичні заняття, 54 год – самостійна робота.

Підсумковий контроль знань та умінь з дисципліни проводиться у формі складання екзамену.

Мета викладення дисципліни: навчити студентів володінню основ математичного апарату для розв'язування та аналізу прикладних задач. Сприяти набуттю студентами знань, необхідних для засвоєння відповідних знань з інших дисциплін, які викладаються на факультеті для застосування сучасних методів оптимізації та математичного моделювання в економіці.

Завдання курсу вищої математики для студентів економічного факультету полягає у відновленні у студентів набутих знань та навичок за курс середньої школи та формування нових знань та умінь їх практичного застосування. Студент повинен опанувати визначення основних математичних понять, вміти використовувати їх під час розв'язання прикладних задач.

Вивчення курсу проводиться на базі шкільної програми з математики, особливо таких її підрозділів: арифметика, алгебра, основи геометрії, а також елементи математичного моделювання, що застосовуються у вивченні мікро- та макроекономіки, математичного моделювання та інших предметів курсу для студентів економічного факультету.

До вивчення курсу входять наступні розділи: лінійна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу (теорія границь; диференціальне числення; інтегральне числення).

Навчальний курс дисципліни «Вища математика для економістів» проводиться протягом двох семестрів та має наступні види робіт:

- аудиторні заняття: 16 лекцій, 16 практичних робіт;

- самостійна робота студентів – 22 години;

Аудиторна робота з дисципліни здійснюється за тематичним планом (табл.1, 2).

Таблиця 1. Тематичний план аудиторної роботи

| № модуля | Теми | К-сть годин |
|--------------------|--|-------------|
| Модуль 1. | Лінійна алгебра та аналітична геометрія | |
| Тема 1. | Матриці та дії над ними | 4 |
| Тема 2. | Визначники. Мінори. Алгебраїчні доповнення | 4 |
| Тема 3. | Системи лінійних рівнянь | 4 |
| Тема 4. | Елементи аналітичної геометрії на площині | 4 |
| Всього за 1 модуль | | 16 |

Таблиця 2. Тематичний план та перелік тем і питань самостійної роботи, які не розглядаються на аудиторних заняттях

| № модуля | Теми | К-сть годин |
|------------------|---|-------------|
| Модуль 1. | Лінійна алгебра та аналітична геометрія | |
| 1. | Коротка історична довідка про розвиток математики, як науки. Ціль і завдання курсу. Роль математики у підготовці молодших спеціалістів для агропромислового комплексу України. Поняття про математичне моделювання. | 2 |
| 2. | Ранг матриці | 2 |
| 3. | Однорідна система лінійних рівнянь. Критерії сумісності системи лінійних рівнянь. | 2 |
| 4. | Прикладні задачі курсів спецдисциплін, які приводять до систем лінійних рівнянь та їх розв'язання. | 2 |
| 5. | Поняття вектора. Дії над векторами. Векторні простори. Проекція вектора на вісь. Базис на площині і в просторі. Поділ відрізка в даному відношенні. Розкладання вектора за базисом. | 2 |
| 6. | Пряма лінія в просторі. Різні види рівнянь прямої в просторі. | 2 |
| 7. | Кут між двома прямими в просторі. Умова перпендикулярності та паралельності прямих в просторі. Задачі практичного змісту. | 2 |
| 8. | Застосування рівнянь прямих до дослідження їх взаємного розташування, знаходження кута між ними. | 2 |

| | |
|--|----|
| Всього за 1 модуль | 16 |
| Форма контролю: написання індивідуальних робіт | |

Кредитно-модульна система передбачає визначення за стобальною системою рейтингу студента на основі комплексної оцінки.

Орієнтовний розподіл балів по дисципліні з розглянутого модуля

| Назва контролю | Модуль I | |
|----------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| | Мінімальна кількість балів | Максимальна кількість балів |
| Відвідування лекцій | 0 | 1 |
| Відвідування практичних | 0 | 2 |
| Виконання індивідуальних завдань | 3 | 5 |
| Написання модуля | 3 | 8 |
| Усне опитування | 1 | 3 |
| Написання самостійних робіт | 3 | 5 |
| ВСЬОГО: | 10 | 24 |

Вступ

«Елементи вищої алгебри. Методи і моделі: навчально-методичні рекомендації для студентів економічного факультету денної та заочної форм навчання за кредитно-модульною системою організації навчального процесу» створено з огляду на сучасні вимоги щодо істотного підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки таких фахівців і посилення прикладної її спрямованості.

Лінійна алгебра – це один із найбільш важливих підрозділів вищої алгебри, яка займається вивченням довільних систем першого порядку. Вивчення таких систем привело до введення понять визначника та матриці. Причому, теорія матриць виявилась настільки плідною, що її застосування вийшло далеко за межі лінійної алгебри.

Широке застосування симплексного методу, як методу оптимізації в лінійному програмуванні, спонукало до вивчення основ лінійної алгебри як необхідної бази до розуміння основних понять цього на сьогодні неперевершеного методу послідовного покращення.

Векторна алгебра дає можливість оперувати відрізками безпосередньо, а не обхідним шляхом, через координати точок, як це робить аналітична геометрія. Поняття лінійної алгебри, векторного простору та векторного числення широко використовується в математичному програмуванні економічних задач та в економетриці.

При написанні методичних рекомендацій «Елементи вищої алгебри. Методи і моделі» було використано ряд задач та прикладів, взятих із відомих задачників та навчальних посібників, які, як правило, використовуються на практичних заняттях зі студентами.

І. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

§1. Матриці та дії над ними

Нехай задано множину чисел, розміщених у вигляді квадратної таблиці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| \quad (1.1).$$

Таку впорядковану множину називають матрицею ($m \times n$). Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі. Коротко матрицю позначають так: $A = (a_{ij})_{mn}$, або $A = \|a_{ij}\|_{mn}$. В цьому записі вказується кількість рядків i та стовбців j матриці.

Озн. Матрицею називається упорядкована по рядках та стовпцях таблиця елементів: букв, чисел, функцій тощо. Так, наприклад, сторінка газети є матрицею, оскільки вона має рядки тексту і стовпці у вигляді колонок тексту.

Матриці позначають великими латинськими літерами A, B, C тощо.

Числа a_{ij} називають елементами матриці.

Добуток числа рядків m на число стовбців n називають розміром матриці і позначають $m \times n$.

Матриці мають однакові розміри, якщо у них однакова кількість рядків і стовбців.

Озн. Матриці A та B називають рівними між собою, якщо вони мають однакові розміри, а їх елементи, що знаходять на однакових місцях, рівні між собою. При цьому пишуть $A = B$.

Озн. Квадратною називають таку матрицю $A = (a_{ij})_{mn}$, в якій $m = n$, тобто кількість рядочків дорівнює кількості стовпчиків.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Озн. Діагональною називають матрицю, по головній діагоналі якої розта-

шовані елементи a_{ij} , а інші елементи є нулями, тобто $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$.

Озн. Одиничною називають діагональну матрицю, по головній діагоналі

якої розташовані одиниці, тобто $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Озн. Нульовою називають матрицю, всі елементи якої нулі:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Властивість: Якщо до заданої матриці A додати нульову, то отримаємо задану матрицю A .

Дії над матрицями:

Нехай задано матриці A та B : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Сума матриць.

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць однакового розміру. Сумою матриць $A = (a_{ij})_{mn}$ та $B = (b_{ij})_{mn}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{mn}$, де $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. При цьому записують $C = A + B$.

Приклад:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & -2+1 & 0+0 \\ 3+(-11) & 5+4 & -3+5 \\ 2+(-3) & 0+(-1) & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 9 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Властивість: Для довільних матриць A , B та C однакових розмірів справджуються рівності: $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$.

2. Добуток матриці на число.

Добутком матриці $A = (a_{ij})_{mn}$ на число λ називається матриця $C = (c_{ij})_{mn}$, де $c_{ij} = \lambda a_{ij}$. При цьому записують $C = \lambda A$.

Приклад:

$$-4 \cdot A = \begin{pmatrix} -4 \cdot 1 & -4 \cdot (-2) & -4 \cdot 0 \\ -4 \cdot 3 & -4 \cdot 5 & -4 \cdot (-3) \\ -4 \cdot 2 & -4 \cdot 0 & -4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ -12 & -20 & 12 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Віднімання матриць.

Різницю матриць A та B розглядають, як суму матриць A та $-B$, при чому матриця $-B$ утворена множенням матриці B на -1 .

Властивості додавання та множення на число:

Для довільних матриць A , B однакових розмірів та довільних чисел μ і λ справджуються рівності:

1) $A + B = B + A$ – комутативність відносно додавання матриць;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ – асоціативність відносно додавання матриць;

3) $A + 0 = A$; $A - A = 0$ – роль нульової матриці в діях над матрицями така, як числа нуль в діях над числами;

4) $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$ – асоціативність відносно множення чисел;

5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ – дистрибутивність множення на число відносно додавання матриць;

6) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ – дистрибутивність множення на матрицю відносно додавання чисел.

4. Добуток матриць.

Операція множення матриць вводиться лише для узгоджених матриць.

Озн. Матриця називається узгодженою, якщо кількість стовпців першої дорівнює кількості рядків другої.

Якщо ця умова не виконується, тобто матриці неузгоджені, то множення таких матриць неможливе.

З узгодженості матриці A з матрицею B випливає узгодженість матриці B з матрицею A . Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Добутком матриці $A = (a_{ij})_{mn}$ на матрицю $B = (b_{ij})_{ns}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{ms}$, де $c_{ij} = \overline{a_i} \cdot \overline{b_j}$ ($\overline{a_i}$ – i -й рядок першої матриці, $\overline{b_j}$ – j -й стовбець другої матриці). Тобто, щоб визначити елемент c_{24} , що стоїть в другому рядку і четвертому стовбці матриці $C = AB$, потрібно знайти суму добутків елементів другого рядка матриці A на відповідні елементи четвертого стовпці матриці B . При цьому записують $C = A \cdot B$.

Приклад:

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-11) + 0 \cdot (-3) & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 5 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-11) + (-3) \cdot (-3) & 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + 5 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-11) + (-1) \cdot (-3) & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 22 & -7 & -10 \\ -46 & 26 & 19 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Перевіримо чи справджується переставний закон множення для матриць:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) \\ -11 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 & -11 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 0 & -11 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) \\ -3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & -3 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & -3 \cdot 0 - 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 11 & 42 & -17 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отже, переставний закон множення для матриць не справджується $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Властивості множення матриць:

Для довільних матриць A, B однакових розмірів та довільних чисел μ і λ справджуються рівності:

- 1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ – асоціативність відносно множення матриць;
- 2) $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ – роль нульової матриці в діях над матрицями така, як числа нуль в діях над числами;
- 3) $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (B \cdot A)$ – асоціативність відносно множення матриць і числа;
- 4) $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$; $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ – дистрибутивність множення відносно додавання матриць;
- 6) $A \cdot E = E \cdot A = A$ – роль одиничної матриці в діях над матрицями така, як одиниці в діях над числами;

5. Піднесення матриці до степеня.

Піднесення матриці до степеня n розглядають, як множення матриці саму на себе n раз.

Приклад:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 - 3 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-3) - 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 - 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -12 & 6 \\ 12 & 19 & -12 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Транспонування матриць.

Щоб транспонувати матрицю $A = (a_{ij})_{mn}$ необхідно створити матрицю $A^T = (a_{ji})_{nm}$, тобто рядочки замінити стовбцями.

Приклад:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

№1.1. Для матриць A та B : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$, знайти матриці:

а) $A + B$; б) $-4A$; в) A^T ; г) $A \cdot B$; д) $B \cdot A$; е) A^2 .

№1.2. Виконати множення матриць $A \cdot B$ та $B \cdot A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ і

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

№1.3. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ знайти матриці:

а) $2A + \frac{1}{2}B$; б) $2AB - B$; в) $2BA + 4A$.

№1.4. Для матриць A та B : $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 9 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, знайти матриці:

а) $A + B$; б) $-4A$; в) A^T ; г) $A \cdot B$; д) $B \cdot A$; е) A^2 .

№1.5. Для матриць A та B : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, знайти мат-

риці: а) $2A + \frac{1}{2}B$; б) $2AB - B$; в) $2BA + 4A$.

№1.6. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ перевірити, чи справджуються формули скороченого множення:

$$\text{а) } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \text{ б) } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Виконати дії в наступних прикладах:

№1.7. $\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \right)^2$;

№1.8. $\left(\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \right)^2$;

№1.9. $\begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

№1.10. $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T$;

№1.11. $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$;

№1.12. $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

№1.13. $\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$;

№1.14. $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

№1.15. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$;

№1.16. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\text{№1.17. } 7 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 & -5 \\ -9 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.18. } 4 \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 0 & 7 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 & -5 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Індивідуальне завдання

$$\text{Виконати дії } \begin{pmatrix} 1 & n & 2 \\ -3 & n-1 & 5 \\ 4 & n+1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n-3 & n-4 & n-5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 2 & -n & 1 \\ n & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 1. Визначники. Властивості визначників.

Озн. Визначником (детермінантом) порядку n називається число, одержане в результаті певних обчислень квадратної матриці $A = (a_{ij})_{nn}$ того ж порядку.

Позначається Δ або $\det A$. Поняття визначника ввів В. Лейбніц.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

На відміну від матриці визначник обмежується справа та зліва одинарною лінією. Матриця – це таблиця, а визначник – це число.

Щоб обчислити визначник другого порядку, від добутку елементів головної діагоналі потрібно відняти добуток елементів допоміжної діагоналі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Приклад: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 6 - 4 = 2.$

Правило обчислення визначника впливає із системи двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Якщо з другого рівняння знайти x_2 і підставити це значення в перше рівняння, то одержимо рівняння з однією невідомою x_1 . Розв'язування цього рівняння дає значення:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}. \quad (1.3)$$

Знаменник $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ складено виключно з коефіцієнтів при невідомих, які утворюють матрицю $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, тому визначник $\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$.

Розглядання квадратної системи з трьох рівнянь вказує на правило обчислення визначників третього порядку, яке відрізняється від правила обчислення визначників другого порядку і має три рівносильних варіанти.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23}) - (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{23} a_{32} a_{11} + a_{33} a_{12} a_{21}).$$

Обчислюючи визначник третього порядку, знизу необхідно дописати два перших рядки, в результаті одержимо три головні і три допоміжні діагоналі:

2. Крім приписування знизу двох перших рядків, можна приписати два перших стовпці, що також дає три головні і три допоміжні діагоналі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}) - (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33}).$$

3. Для розкриття визначника третього порядку можна також застосувати правило трикутників:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33}). \quad (1.4)$$

Для застосування правила трикутників проводимо наступні дії:

1. Знаходимо добуток елементів головної діагоналі.
2. Знаходимо два елементи, через які можна провести пряму, паралельну прямій, що проходить через головну діагональ (вище та нижче головної діагоналі).
3. Для кожної знайденої пари знаходимо елемент, розташований у найбільш віддаленому кутку, одержимо трикутник елементів. Ці три числа перемножуємо (їх дві пари) і додаємо до добутку елементів головної діагоналі. Маємо: $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}$.
4. Знаходимо добуток елементів допоміжної діагоналі.
5. Знаходимо пари чисел аналогічно пункту 2 і знаходимо добуток трьох елементів двох трикутників. Одержимо суму: $a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{12}a_{21}a_{33}$.
6. Різниця двох одержаних сум і буде значенням визначника.

Правило розкриття визначника 3-го порядку ще називають **правилом Саррюса**.

Приклад: $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 \cdot 6 - (-2) \cdot 5 \cdot 6 - (-3) \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 5 = 100 + 12 - 54 + 60 + 36 + 30 = 184.$

Властивості визначників:

1. Значення визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити відповідними стовбцями.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для доведення цієї властивості досить застосувати правило трикутників і порівняти одержані результати. Доведемо цю властивість для визначника третього порядку:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Отже, $\Delta_1 = \Delta_2$, тобто властивість справджується.

2. Перестановка двох рядків визначника рівносильна множенню його на -1 .

$$\text{Тобто, } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 + 20 - 12 - 5 - 8 = 6; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 5 + 12 - 20 - 8 - 3 = -6.$$

3. Якщо визначник має два однакових рядки, або стовпці, то він дорівнює

$$\text{нулю. Тобто, } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 5 + 20 - 20 - 5 - 8 = 0; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 5 + 4 - 6 - 5 - 4 = 0.$$

4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка, або стовпця визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника. Тобто,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 20 + 20 - 80 - 20 - 8 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 10 + 10 - 40 - 10 - 4 = -36.$$

5. Якщо всі елементи деякого рядка, або стовпця визначника дорівнюють нулю, то сам визначник дорівнює нулю.

$$\text{Тобто, } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Якщо відповідні елементи двох рядків визначника пропорційні, то

$$\text{визначник дорівнює нулю. Тобто, } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 20 + 20 - 20 - 20 - 8 = 0.$$

7. Якщо кожен елемент деякого рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник може бути зображений у вигляді суми двох визначників, у яких один у згаданому рядку має перші з заданих доданків, а інший другі; елементи, що знаходяться на решті місць у всіх трьох визначниках одні й ті самі. Тобто,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів деякого рядка визначника додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на довільний спільний множник, то значення визнач-

ника при цьому не зміниться. Тобто,
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{33} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити визначники в наступних завданнях:

№1.19. $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 12 \end{vmatrix};$

№1.20. $\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 14 & 1 \end{vmatrix};$

№1.21. $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix};$

№1.22. $\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix};$

№1.23. $\begin{vmatrix} -6 & 11 \\ 1 & -5 \end{vmatrix};$

№1.24. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -8 & -2 \end{vmatrix};$

№1.25. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix};$

№1.26. $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 3 \\ -9 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix};$

№1.27. $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix};$

№1.28. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix};$

№1.29. $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 2 \\ -6 & -5 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix};$

№1.30. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 2 \\ 13 & 7 & 4 \end{vmatrix};$

№1.31. $\begin{vmatrix} 25 & 8 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix};$

№1.32. $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix};$

№1.33. $\begin{vmatrix} 11 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix};$

№1.34. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 10 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix};$

№1.35. $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 9 & 12 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix};$

№1.36. $\begin{vmatrix} 20 & 3 & -3 \\ -5 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix};$

$$\text{№1.37. } \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{№1.38. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Індивідуальне завдання

Обчислити визначники в наступних завданнях:

$$1) \begin{vmatrix} n & n-1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} n & 2 & n+2 \\ 2 & n-1 & 7 \\ n+2 & -3 & -n \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} n & 5 & 2 & -2n \\ 1 & n-1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2n & 5 \\ 1 & -n & 6 & n+2 \end{vmatrix}.$$

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 3. Мінори. Алгебраїчні доповнення.

Озн. Мінором M_{ik} , що відповідає елементу a_{ik} матриці (1), називається визначник, який відповідає матриці, утвореній з матриці (1) викреслюванням i -го рядка та k -го стовбця.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

З визначника порядку n можна знайти n^2 мінорів (за числом елементів визначника).

Озн. Алгебраїчним доповненням A_{ik} , що відповідає елементу a_{ik} матриці (1), називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів непарна:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}.$$

Приклад: Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Обчислити мінори M_{12} і M_{22} та алгебраїчні доповнення A_{12} і A_{22} .

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 20 - (-12) = 32;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (2 \cdot 5 - 3 \cdot 6) = -(10 - 18) = 8;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (4 \cdot 5 - 6 \cdot (-2)) = 20 - (-12) = 32.$$

Теорема 1. Значення визначника n -го порядку, що визначає матрицю (1), дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка або довільного стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Доведення: Покажемо, що для визначника $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ виконуються такі

рівності:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Доведемо, наприклад, першу з них:

$$\begin{aligned} \Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - \\ &- a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ &- a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} = \Delta. \end{aligned}$$

Аналогічно доводяться і інші рівності.

Приклад: Обчислити визначник розкладаючи його за елементами третього рядка:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -11 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-11) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 4 \cdot 1 \cdot (-7 \cdot 3 - 5 \cdot (-2)) + 2 \cdot (-1) \cdot (3 \cdot 3 - 5 \cdot 1) + (-11) \cdot 1 \cdot (3 \cdot (-2) - (-7) \cdot 1) = -44 - \\ &- 8 - 11 = 63. \end{aligned}$$

Теорема 2. Сума добутків елементів будь-якого рядка, або стовпця визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка, чи стовпця дорівнює нулю.

Доведення: Нехай маємо визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Розглянемо, наприклад,

суму добутків елементів першого рядка визначника на алгебраїчні доповнення елементів другого рядка:

$$\Delta = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) = 0.$$

Приклад: Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Додамо перший рядок до другого і четвертого, утворивши визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Переставимо місцями перший і третій стовпчики:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Додамо другий рядок до третього і четвертого рядків і винесемо спільний множник елементів третього та четвертого рядків:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{vmatrix} = -5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Віднявши третій рядок від четвертого, одержимо:

$$\Delta = -5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = -90.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити мінори та алгебраїчні доповнення в наступних завданнях:

$$\begin{array}{l} \text{№1.39.} \begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix}; \\ \text{№1.41.} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{№1.40.} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 14 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix}; \\ \text{№1.42.} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}. \end{array}$$

Обчислити визначник розкладаючи його за елементами рядка або стовпця в наступних завданнях:

$$\begin{array}{l} \text{№1.43.} \begin{vmatrix} -7 & 11 \\ 13 & -2 \end{vmatrix}; \\ \text{№1.45.} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 15 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix}; \\ \text{№1.47.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}; \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{№1.44.} \begin{vmatrix} 33 & 14 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}; \\ \text{№1.46.} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 14 & 8 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}; \\ \text{№1.48.} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}. \end{array}$$

Індивідуальне завдання

Обчислити визначники в наступних завданнях:

$$1) \begin{vmatrix} n & n-1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} n & 2 & n+2 \\ 2 & n-1 & 7 \\ n+2 & -3 & -n \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} n & 5 & 2 & -2n \\ 1 & n-1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2n & 5 \\ 1 & -n & 6 & n+2 \end{vmatrix}.$$

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 4. Ранг матриці.

Нехай задано матрицю $A = (a_{ij})_{mn}$. Виділимо в матриці A будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де k – число, не більше чисел m і n .

Озн. Визначник k порядку, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається мінором k -го порядку матриці $A = (a_{ij})_{mn}$.

Озн. Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Безпосередньо з означення випливає, що:

- 1) ранг існує для будь-якої матриці;
- 2) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $A = 0$;
- 3) для квадратної матриці n -го порядку ранг дорівнює n тоді і тільки тоді, коли матриця не вироджена.

Озн. Квадратна матриця називається виродженою, якщо її визначник дорівнює нулю.

Ранг матриці можна знайти так. Якщо всі мінори першого порядку дорівнюють нулю, то $r = 0$. Якщо хоч один з мінорів першого порядку відмінний від нуля, а всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то $r = 1$. У випадку, коли є мінор другого порядку, відмінний від нуля, досліджуємо мінори третього порядку. Так продовжуємо доти, поки не станеться одне з двох: або всі мінори порядку k дорівнюють нулю або мінорів порядку k не існує, тоді $r = k - 1$.

Приклад: Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Серед мінорів першого порядку є відмінні від нуля, тому $r \geq 1$. Оскільки один з мінорів другого порядку $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, а всі мінори третього порядку дорівнюють нулю, то $r = 2$.

Вказаний метод знаходження рангу матриці не завжди зручний, тому що пов'язаний з обчисленням значного числа визначників. Простіший метод ґрунтується на тому, що ранг матриці не змінюється, якщо над матрицею виконати елементарні перетворення, а саме:

- а) переставити місцями два рядки, або стовпці;

б) помножити кожен елемент рядка, або стовпця на один і той самий відмінний від нуля множник;

и) додати до елементів рядка, або стовпця відповідні елементи другого рядка, або стовпця, помножені на одне і те саме число.

Приклад: Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Виконуючи елементарні перетворення, маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cong \\ \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти ранг матриці:

№1.49. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2n & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix};$

№1.50. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix};$

№1.51. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$

№1.52. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix};$

№1.53. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 5 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix};$

№1.54. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 11 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \end{pmatrix};$

$$\text{№1.55. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.56. } \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.57. } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.58. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Індивідуальне завдання

Обчислити ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n & 0 \\ n & 0 & 2n & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$,

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 5. Обернена матриця. Матричні рівняння.

Нехай задано матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Поставимо задачу знайти

матрицю $\frac{1}{A} = A^{-1}$.

Озн. Квадратна матриця виду $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ називається

оберненою до матриці A .

Озн. Зведена матриця A^* складається з алгебраїчних доповнень шляхом транспонування: алгебраїчні доповнення, знайдені для даного рядка, записуються відповідним стовпцем: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Теорема 3: Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, що матриця A була не виродженою.

Приклад: Знайти матрицю, обернену до заданої: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці A і алгебраїчні доповнення всіх елементів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -68.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 32 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 17; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -11; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -21.$$

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} знайдена правильно, тому що $A \cdot A^{-1} = E$, тобто:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{68}\right) \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{68} \begin{pmatrix} 2 \cdot (-17) + 5 \cdot (-5) - 1 \cdot 9 & 2 \cdot (-17) + 5 \cdot 7 - 1 \cdot 1 & 2 \cdot 17 + 5 \cdot (-11) - 1 \cdot (-21) \\ 3 \cdot (-17) - 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 9 & 3 \cdot (-17) - 3 \cdot 7 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 17 - 3 \cdot (-11) + 4 \cdot (-21) \\ 1 \cdot (-17) + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 9 & 1 \cdot (-17) + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 17 + 2 \cdot (-11) + 3 \cdot (-21) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -68 & 0 & 0 \\ 0 & -68 & 0 \\ 0 & 0 & -68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Безпосереднім обчисленням легко переконатися, що для оберненої матриці справджуються рівності: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Квадратна матриця може мати обернену тоді і тільки тоді, якщо вона не вироджена. Крім того, для не виродженої квадратної матриці A існує єдина обернена матриця.

Вміння знаходити обернену матрицю дає можливість розв'язувати матричні рівняння. Наприклад: $A \cdot X = B \Rightarrow X = \frac{B}{A} = B \cdot A^{-1}$.

Приклад: Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1};$$

Обчислимо обернену матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 10 = -13;$$

$$A_{11} = -3;$$

$$A_{12} = -5$$

$$A_{21} = -2$$

$$A_{22} = 1$$

Тоді обернена матриця матиме вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot (-3) + 9 \cdot (-5) & 5 \cdot (-2) + 9 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-3) + 7 \cdot (-5) & 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -60 & -1 \\ -47 & -1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} \frac{60}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{47}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Для заданих матриць знайти обернені матриці:

$$\text{№1.59. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.60. } \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.61. } \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.62. } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.63. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.64. } \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.65. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.66. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.67. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.68. } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне рівняння:

$$\text{№1.69. } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.70. } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.71. } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.72. } \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 12 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.73. } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.74. } \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.75. } \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.76. } \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{№1.77. } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{№1.78. } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

З'ясувати, чи існують матриці, обернені до заданих:

$$\text{№1.79. } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{№1.80. } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Якщо так, то виконати перевірку $A \cdot A^{-1} = E$.

Індивідуальне завдання

1. Знайти обернену матрицю до заданої: $A = \begin{pmatrix} 1 & n & 2 \\ -3 & n-1 & 5 \\ 4 & n+1 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричне рівняння: $\begin{pmatrix} 1 & n \\ n-7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -n \end{pmatrix}$,

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 6. Системи лінійних рівнянь

Озн. Лінійним називається рівняння, у якому невідомі величини мають перший степінь і між собою не перемножуються.

В алгебрі прийнято всі відомі величини позначати верхньою половиною латинської абетки, а невідомі – нижньою. Для рівнянь з малою кількістю невідомих так і поступають. Оскільки число букв абетки обмежене, для рівняння з великою кількістю членів всі невідомі позначають як x_i , коефіцієнти при невідомих як a_i , а вільні члени $-b_i$. У системі рівнянь невідома x_i зустрічається у декількох рівняннях, тому для її коефіцієнта a_i додається індекс k номера рівняння, а коефіцієнт позначається як a_{ik} , де i – номер невідомої, а k – номер рівняння. Згідно цього система лінійних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n} = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.5)$$

Коефіцієнти при невідомих утворюють матрицю, яка складається з m рядків та n стовпців.

Вільні члени утворюють матрицю-стовпець:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Усі невідомі $x_1; x_2; \dots; x_n$ також можна записати у вигляді матриці-стовпця:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Взагалі під час запису системи лінійних рівнянь необов'язково писати в i -му стовпці невідому x_i (крім неї, там інших невідомих просто немає) чи знак «дорівнює» перед вільними членами, тому систему записують у спрощеному вигляді.

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right\| \quad (1.8)$$

Знак «дорівнює» замінено вертикальною лінією, а знак матриці вказує на наявність системи рівнянь у матричному вигляді.

Озн. Система називається однорідною, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю, і неоднорідною, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Множина чисел (a_1, a_2, \dots, a_n) називається розв'язком системи, якщо при підстановці цих чисел в кожне рівняння системи отримуємо рівність.

Озн. Система називається сумісною, якщо вона має розв'язок.

Теорема 4: (критерій сумісності, теорема Кронекера-Капеллі):

Система лінійних рівнянь сумісна тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці.

Озн. Дві системи називаються рівносильними, якщо вони мають однакові множини розв'язків.

Розглянемо основні методи розв'язування визначених систем, у яких число рівнянь дорівнює числу невідомих.

Матричний метод розв'язування системи лінійних рівнянь:

Теорема 5: Якщо визначник системи (5) відмінний від нуля, то система

сумісна і має розв'язок, що визначається формулою:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

де Δ – головний визначник системи,

A^* – зведена матриця, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – стовбець вільних елементів.

Приклад: Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = -17, \\ 7x + 3y + 5z = 8, \\ 3x + 2y + 6z = 9. \end{cases}$$

Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 \cdot 2 + 7 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 2 - 7 \cdot 7 \cdot 6 =$$

$$= 36 + 14 + 105 - 9 - 20 - 294 = -168.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці за формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = -(42 - 15) = -27;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 14 - 9 = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 1 \cdot 2) = -(42 - 2) = -40;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 12 - 3 = 9;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 7 \cdot 3) = -(4 - 21) = 17;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 35 - 3 = 32;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 1 \cdot 7) = -(10 - 7) = -3;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 7 \cdot 7 = 6 - 49 = -43.$$

Запишемо зведену матрицю: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix}.$

Тоді стовбець невідомих елементів $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ дорівнює: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot (-17) - 40 \cdot 8 + 32 \cdot 9 \\ (-27) \cdot (-17) + 9 \cdot 8 + (-3) \cdot 9 \\ 5 \cdot (-17) + 17 \cdot 8 + (-43) \cdot 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -136 - 320 + 288 \\ 459 + 72 - 27 \\ -85 + 136 - 387 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -168 \\ 504 \\ -336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\{1; -3; 2\}$ – шуканий розв'язок системи лінійних рівнянь.

Відповідь: $\{1; -3; 2\}$.

Метод Крамера:

Теорема 6: Якщо визначник системи (5) відмінний від нуля, то система сумісна і має розв'язок, що визначається формулами: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$; $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

Приклад: Розв'язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = -17, \\ 7x + 3y + 5z = 8, \\ 3x + 2y + 6z = 9. \end{cases}$$

Розв'язання:

З попередніх обчислень головний визначник системи дорівнює $\Delta = -168$. Обчислимо додаткові визначники, замінюючи по черзі перший, другий та третій стовбець головного визначника стовбцем вільних елементів:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} -17 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-17) \cdot 3 \cdot 6 + 8 \cdot 2 \cdot 1 + 7 \cdot 5 \cdot 9 - 1 \cdot 3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 \cdot (-17) - 8 \cdot 7 \cdot 6 = \\ &= -306 + 16 + 315 - 27 + 170 - 336 = -168; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \begin{vmatrix} 2 & -17 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 \cdot 6 + 7 \cdot 9 \cdot 1 + 3 \cdot (-17) \cdot 5 - 1 \cdot 8 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 9 - 7 \cdot 6 \cdot (-17) = \\ &= 96 + 63 - 255 - 24 - 90 + 714 = 504; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_z &= \begin{vmatrix} 2 & 7 & -17 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 9 + 7 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot (-17) - (-17) \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 8 - 7 \cdot 7 \cdot 9 = \\ &= 54 + 168 - 238 + 153 - 32 - 441 = -336. \end{aligned}$$

Визначимо корені системи рівнянь за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-168}{-168} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{504}{-168} = -3; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-336}{-168} = 2.$$

Отже, $\{1; -3; 2\}$ – шуканий розв'язок системи лінійних рівнянь.

Метод Гауса:

Одним із найпоширеніших методів розв'язування систем лінійних рівнянь є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гауса. Цей метод за-

пропонований Гаусом і ґрунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь.

У системі (2.5) (при $m = n$ від другого рівняння необхідно відняти перше, помножене на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$; від третього – відняти перше, помножене на $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ і т. д. Одержимо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}'x_1 + a_{22}''x_2 + \dots + a_{2n}'x_n = b_2' \\ \dots \\ a_{n1}'x_1 + a_{n2}''x_2 + \dots + a_{nn}''x_n = b_n'' \end{cases} \quad (1.9)$$

У цій системі від третього рівняння віднімемо друге, помножене на a_{32}'/a_{22}'' , від четвертого – друге, помножене на a_{42}''/a_{22}'' і т.д. Одержимо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}'x_1 + a_{22}''x_2 + \dots + a_{2n}'x_n = b_2' \\ a_{33}'''x_3 + \dots + a_{3n}'''x_n = b_3''' \\ \dots \\ a_{n1}'''x_1 + a_{n2}'''x_2 + \dots + a_{nn}'''x_n = b_n''' \end{cases} \quad (1.10)$$

Далі аналогічно чинимо зі всіма рівняннями, починаючи з третього: від четвертого віднімаємо третє, помножене на a_{43}'''/a_{33}''' і т.д. Таку процедуру необхідно провести n разів, у результаті чого одержимо трикутну систему, у якій не буде елементів зліва від головної діагоналі. Штрихи біля коефіцієнтів означають, що при кожній дії коефіцієнти змінюють своє значення

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}'x_1 + a_{22}''x_2 + \dots + a_{2n}'x_n = b_2' \\ a_{33}'''x_3 + \dots + a_{3n}'''x_n = b_3''' \\ \dots \\ a_{nn}^{n-1}x_n = b_n^{n-1} \end{cases} \quad (1.11)$$

З останнього рівняння знаходимо $X_n = \frac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}}$; підставивши це значення в $(n-1)$ -е рівняння, знайдемо X_{n-1} . Таким чином поступово дійдемо до X_1 .

Розглянемо даний метод на прикладі:

Приклад: Розв'язати систему рівнянь методом Гауса
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Виконаємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Тоді маємо нову систему:
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3y + z = 9 \\ z = 3 \end{cases}, \text{ з якої отримуємо: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Видозміною методу Гауса є метод Жордана-Гауса, у якому нулі отримують не тільки нижче головної діагоналі, але й вище неї. Для цього після першого ж віднімання методом Гауса від першого рівняння віднімають друге, помножене на a_{1n}/a_{2n}' , так щоб в першому рівнянні зникло X_n . Далі аналогічно від третього віднімають друге, помножене на a_{3n}'/a_{2n}' і т. д., поки не зникне X_n у всіх рівняннях крім останнього. Дії ліквідації перших та останніх невідомих виконуються по чергово: x_1 і x_n , x_2 і x_{n-1} і т. д. У результаті проведених дій система матиме вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & & = b_1' \\ & a_{22}x_2 & & & = b_2' \\ & & a_{33}x_3 & & = b_3' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_{nn}^{(n+1)}x_n & = b_n^{(n+1)} \end{cases} \quad (1.12)$$

З цієї системи відразу ж знаходиться будь-яка невідома.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\text{№1.81. } \begin{cases} 4x - 3y - 2z = 9, \\ 2x + 5y + 3z = -7, \\ 6x - 3y + 5z = 5; \end{cases} \quad \text{№1.82. } \begin{cases} x + 2y - 3z = 7, \\ 3x - y - 4z = 13, \\ 4x + y + 2z = 0; \end{cases}$$

$$\text{№1.83.} \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x - y - 3z = 13, \\ 3x - 2y + 4z = -15; \end{cases}$$

$$\text{№1.85.} \begin{cases} 5x - 3y + 6z = 6, \\ 2x - y - 3z = 8, \\ x + 4y - 2z = 9; \end{cases}$$

$$\text{№1.87.} \begin{cases} 2x - 3y - 4z = -5, \\ x + 5y - 5z = -6, \\ 8x - 2y + 4z = -10; \end{cases}$$

$$\text{№1.89.} \begin{cases} x - 8y + 3z = 1, \\ 2x - 6y + z = 4, \\ 0,1x - 2y + z = 0; \end{cases}$$

$$\text{№1.91.} \begin{cases} 3x - y - 4z = -2, \\ 6x + 2y + z = 9, \\ 2x + 4y - 3z = 3; \end{cases}$$

$$\text{№1.84.} \begin{cases} x + y - 2z = 4, \\ 2x - 3y + z = 3, \\ 3x - 2y + 6z = 0; \end{cases}$$

$$\text{№1.86.} \begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y + z = 11, \\ x + y + 2z = 8; \end{cases}$$

$$\text{№1.88.} \begin{cases} 2x + 2y + z = 1, \\ 3x + y + 2z = -2, \\ 4x - y - 7z = 7; \end{cases}$$

$$\text{№1.90.} \begin{cases} x - 5y + z = 4, \\ 2x - y + 3z = 14, \\ 3x + 5y + z = 8; \end{cases}$$

$$\text{№1.92.} \begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = -2, \\ 4x - y + 5z = 3; \end{cases}$$

Індивідуальне завдання

Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

$$1. \begin{cases} 2x - 3y + z = -6, \\ 3x + 3y - 2z = 20, \\ 5x - 6y + 4z = -12. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + 5y + 9z = -20, \\ 9x - 7y + 3z = 1, \\ 6x + 4y + 7z = -2; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + y + z = -2, \\ 2x + 3y - z = 1, \\ x - y + 2z = -7. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x + 2y + 4z = -3, \\ 2x - 3y + z = -4, \\ 4x - 5y - 2z = 10; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x + 5y - 2z = 9, \\ 4x + y - 4z = 9, \\ x + y - 4z = 9; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + 3y + z = 0, \\ 2x + y + 3z = 4, \\ 3x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4x - 2y + 3z = -9, \\ 3x + 5y - 4z = 25, \\ 7x + 2y + 3z = 2; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x + 4y + 2z = -5, \\ 2x - 4y + 3z = 20, \\ 4x - 3y - 5z = 3; \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x + 2y + 3z = -2, \\ 3x + 4y - 2z = -17, \\ 2x + 3y + z = -9; \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y + z = 1, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

/Завдання обирається за останньою цифрою номера студента в списку.

Наприклад, студенти за номерами 3, 13 та 23 розв'язують систему №3./

§ 7. Прямокутні системи

Згідно з теоремою Кронекера-Капеллі для сумісних систем ранг матриці A повинен дорівнювати рангу розширеної матриці. При знаходженні рангу переходять від мінора нижчого порядку до облямовуючого його мінора вищого порядку. Якщо одержаний ранг дорівнює r , то з матриці A вибирають r лінійно незалежних рядків: у системі залишають лише ті рівняння, коефіцієнти яких увійшли у вибрані рядки. У цих рівняннях зліва залишимо такі r невідомих, для яких визначник з їх коефіцієнтів не дорівнює нулю. Інші невідомі переносимо вправо і вважаємо їх вільними. Цим довільним невідомим надаємо довільні значення і знаходимо невідомі зліва (наприклад, за правилом Крамера).

Приклад:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4; \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

Міnor 2-го порядку: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7 \neq 0.$

Міnor 3-го порядку: $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -9 & -8 & 1 \end{vmatrix} = -8 - 8 + 27 + 36 + 1 - 8 = 0.$

Розширена матриця: $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & | & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & | & 0 \end{vmatrix}.$

Міnor 2-го порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0.$

Міnor 3-го порядку: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ -8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 - 32 + 24 + 4 - 0 = 0.$

Ранг матриці A і ранг розширеної матриці $r=2$, тому система сумісна, але не визначена, (число невідомих більше за число рівнянь). Запишемо два рівняння, у яких зліва залишимо дві невідомі x_1 і x_2 (у нас $r=2$):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{cases}$$

При додаванні одержимо: $4x_1 = 5 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{4} + \frac{x_3}{4} - \frac{3x_4}{4} - x_5$.

Тоді:

$$x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 - x_1 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 - \frac{5}{4} - \frac{x_3}{4} + \frac{3x_4}{4} + x_5 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4.$$

Одержали:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5 \\ x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4. \end{cases}$$

Це загальний розв'язок системи, з якого можна одержати низку розв'язків, надаючи вільним невідомим конкретні значення. Наприклад: $(\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}; 0; 0; 0)$; $(2, 5, 3, 0, 0)$ і т. д. є розв'язками системи.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Використовуючи теорему Кронекера-Капеллі, встановити чи сумісна система і, якщо сумісна розв'язати:

№1.93.
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$$

№1.94.
$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -3, \\ 4x_1 + 9x_2 = 11; \end{cases}$$

№1.95.
$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$$

№1.96.
$$\begin{cases} 7x_1 - 8x_2 = 3, \\ 2x_1 + x_2 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 = -4; \end{cases}$$

№1.97.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$$

№1.98.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ 3x_1 - x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| №1.99. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -5; \end{cases}$ | №1.100. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \end{cases}$ |
| №1.101. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -5; \end{cases}$ | №1.102. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$ |

Індивідуальне завдання

Дослідити систему на несумісність і, якщо вона сумісна розв'язати:

$$\begin{cases} Nx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 - Nx_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + (N+1)x_4 = 3; \end{cases} \quad \text{де } N - \text{остання цифра номера студента за списком.}$$

§8. Лінійні економічні моделі

Модель Леонт'єва багатогалузевої економіки

Розглянемо спрощену економіко-математичну модель міжгалузевого балансу. Зв'язок між галузями зазвичай відображують у таблицях міжгалузевого балансу, а математичну модель, яка дає змогу аналізувати їх, розроблено в 1936 р. американським економістом В.Леонт'євим.

Припустимо, що весь виробничий комплекс поділено на n «чистих» галузей. Чисті галузі є економічною абстракцією, тобто це умовні галузі, кожна з яких об'єднує все виробництво даного виду продукції. Вважатимемо, що кожна з галузей випускає лише один певний вид продукції (тобто різні галузі випускають різну продукцію). В процесі виробництва кожна з галузей потребує продукції, виробленої в інших галузях.

Мета балансового аналізу – відповісти на запитання, яке постає в макроекономіці й пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким має бути обсяг виробництва кожної з галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник даної продукції, а з іншого – як споживач і своєї, і виробленої іншими галузями продукції.

Основні припущення моделі, яку надалі називатимемо моделлю Леонт'єва, такі:

1. В економічній системі виробляються, купуються, споживаються й інвестуються n видів продукції.

2. Кожна галузь виробляє лише один вид продукції, отже, спільне виробництво різних товарів виключається. Різні галузі виробляють різні товари, й тому галузь, що виробляє продукцію виду i , позначатимемо тим самим індексом.

3. Під виробничим процесом у кожній галузі розумітимемо перетворення деяких (можливо всіх) видів продукції, взятих у певних обсягах, на деякий обсяг продукції того чи іншого виду. При цьому припускається, що співвідношення витраченої й випущеної продукції є сталим.

Нехай економіко-виробнича система складається з n галузей, тобто виробляє n видів продукції. Введемо позначення: X_i – обсяг валової продукції i -галузі за одиницю часу (наприклад, за рік); x_{ij} – обсяг продукції i -галузі, що потребує j -та галузь у процесі виробництва, Y_i – обсяг кінцевої продукції i -ї галузі, призначеної для невиробничого споживання.

Схему міжгалузевого балансу виробництва й розподілу продукції подано в табл. 1, де зазначено основні показники та зв'язки виробництва за певний період часу (зазвичай за рік).

Таблиця 1.

| Галузь виробництва | Розподіл випуску продукції в галузях виробництва | | | | Обсяг кінцевої продукції | Обсяг валової продукції |
|--------------------|--|-----|----------|-----------------------|--------------------------|-------------------------|
| | 1 | ... | n | всього | | |
| 1 | x_{11} | ... | x_{1n} | $\sum_{j=1}^n x_{1j}$ | Y_1 | X_1 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| n | X_{n1} | ... | x_{nn} | $\sum_{j=1}^n x_{nj}$ | Y_2 | X_2 |

| | | | | | | |
|--------|-----------------------|-----|-----------------------|------------------------------------|-----|-----|
| всього | $\sum_{i=1}^n x_{i1}$ | ... | $\sum_{i=1}^n x_{in}$ | $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}$ | Y | X |
|--------|-----------------------|-----|-----------------------|------------------------------------|-----|-----|

Використовуючи дані табл. 1, запишемо квадратну матрицю n -го порядку (за умови рівності поданих у балансі галузей виробництва та споживачів продукції). Кожен елемент матриці характеризує обсяг поставки продукції з i -ї галузі, що йде на виробниче споживання j -ї галузі. Взявши суму міжгалузевих поставок продукції i -ї галузі в усіх галузях-споживачах, отримаємо загальний обсяг проміжної продукції j -ї галузі. Сума обсягів проміжної продукції всіх галузей виробництва становить загальний обсяг проміжної продукції.

За економічним змістом обсяг проміжної продукції – частина обсягу валової продукції, яка залишається після вилучення кінцевого продукту й спрямовується для відшкодування поточних матеріальних витрат у межах розглядуваного періоду часу.

Оскільки обсяг валової продукції будь-якої i -ї галузі дорівнює сукупному обсягові продукції, що споживається n галузями, та кінцевої продукції, то запишемо систему:

$$\begin{cases} X_1 = x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + Y_1, \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + Y_2, \\ \dots \\ X_n = x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} + Y_n; \end{cases}$$

або в скороченій формі: $X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i$

Дане рівняння називають *співвідношеннями балансу*.

Розглянемо міжгалузевий баланс у вартісній формі, тобто коли всі величини, що входять у вказану систему, виражають вартість. Особливість системи полягає в тому, що змінні в ній містяться в першому степені, тому залежність між обсягом валової продукції та розподілом продукції кожної галузі лінійна.

Зауважимо, що величини x_{ij} , X_i , Y_i можуть виражатися в натуральних одиницях (штуках, тоннах, літрах тощо). Тоді йдеться про міжгалузевий баланс у натуральній формі.

Під час побудови й практичних застосувань економіко-математичної моделі міжгалузевого балансу використовують коефіцієнти прямих матеріальних витрат. Якщо обсяг міжгалузевих поставок i -ї галузі в j -ту поділити на обсяг валової продукції j -ї галузі, дістанемо шуканий норматив: $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$, де a_{ij} – коефіцієнти прямих витрат продукції i -ї галузі на одиницю обсягу валової продукції j -ї галузі.

Ці коефіцієнти утворюють квадратну матрицю коефіцієнтів прямих витрат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яку іноді називають матрицею технологічних коефіцієнтів, або технологічною матрицею.

Матриця A містить інформацію про структуру міжгалузевих зв'язків, про технологію виробництва даної економіко-виробничої системи. З попередніх тверджень випливає, що $x_{ij} = a_{ij} X_j$.

Запишемо співвідношення, що називають **рівнянням лінійного міжгалузевого балансу**, або моделлю Леонт'єва:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}, \text{ або } X=AX+Y.$$

Основна задача міжгалузевого балансу полягає у відшуванні такої матриці обсягів валової продукції X , яка за відомої матриці прямих витрат A забезпечує задану матрицю обсягів кінцевої продукції Y .

Запишемо рівняння балансу у вигляді: $(E-A)X=U$. Якщо $(E-A)$ не вироджена, то його можна подати у вигляді $X=(E-A)^{-1}U$.

Матрицю $B=(E-A)^{-1}$ називають матрицею повних витрат.

Економічний зміст елементів матриці B такий: кожен елемент b_{ij} матриці B є обсягом валової продукції i -ї галузі, необхідної для забезпечення випуску одиниці кінцевої продукції j -ї галузі.

За економічним змістом задачі величини X_i мають бути невід'ємними. З математичного погляду питання про сумісність системи зводиться до питання про існування оберненої матриці $(E-A)^{-1}$, складеної з невід'ємних елементів.

Рівняння міжгалузевого балансу можна використовувати у двох випадках. У першому випадкові, коли відома матриця обсягів валової продукції X , потрібно обчислити матрицю обсягів кінцевої продукції U . Розглянемо приклад.

Приклад: Обчислити матрицю обсягів кінцевої продукції, що призначена для реалізації продукції, якщо матриця обсягів валової продукції галузі й матриця коефіцієнтів прямих витрат мають вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$U = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

У другому випадкові рівняння міжгалузевого балансу використовується для планування. Матрицю A , всі елементи якої невід'ємні, називають **продуктивною**, якщо для довільної матриці U із невід'ємними елементами існує розв'язок рівняння міжгалузевого балансу – матриця X , усі елементи якої також невід'ємні. В цьому разі модель Леонтьєва називається продуктивною.

Є кілька критеріїв продуктивності матриці A . Ми користуватимемося таким: *матриця A з невід'ємними елементами продуктивна, якщо максимум сум*

елементів її стовпців не перевищує одиниці, причому хоча б для одного зі стовпців сума елементів строго менша за одиницю.

Приклад: Розглянемо умовну виробничу систему, яка складається з трьох галузей. Коефіцієнти прямих витрат одиниць продукції i -ї галузі, що використовуються для випуску одиниць продукції j -ї галузі, та обсяги кінцевої продукції (у вартісній формі) наведено в таблиці:

| Галузь виробництва | Прямі витрати галузей | | | Обсяг кінцевої продукції |
|--------------------|-----------------------|-----|-----|--------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | |
| 1 | 0 | 0,2 | 0 | 200 |
| 2 | 0,2 | 0 | 0,1 | 100 |
| 3 | 0 | 0,1 | 0,2 | 300 |

Визначити коефіцієнти повних витрат; матрицю обсягів валової продукції X та план кожної галузі; коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

Розв'язання:

Позначимо матрицю обсягів валової продукції, яка визначає виробничу

програму галузей $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$, де X_1, X_2, X_3 – планові обсяги валової продукції га-

лузей. У розглядуваному прикладі матрицями технологічних коефіцієнтів та обсягів кінцевої продукції є відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Виробничі зв'язки галузей задовольняють умови:

$$\begin{cases} X_1 - (0 \cdot X_1 + 0,2 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3) = 200, \\ X_2 - (0,2X_1 + 0 \cdot X_2 + 0,1 \cdot X_3) = 100, \\ X_3 - (0 \cdot X_1 + 0,1 \cdot X_2 + 0,2 \cdot X_3) = 300; \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 - 0,2X_2 = 200, \\ -0,2X_1 + X_2 - 0,1X_3 = 100, \\ -0,1X_1 + 0,8X_3 = 300. \end{cases}$$

Система в матричному вигляді $(E-A)X=Y$. Тоді:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю $B=(E-A)^{-1}$.

Визначник матриці $(E-A)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,8 - 0,01 - 0,032 = 0,758.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці $(E - A)$:

| | | |
|---------------|---------------|---------------|
| $B_{11}=0,79$ | $B_{21}=0,16$ | $B_{31}=0,02$ |
| $B_{12}=0,16$ | $B_{22}=0,80$ | $B_{32}=0,10$ |
| $B_{13}=0,02$ | $B_{23}=0,10$ | $B_{33}=0,96$ |

Обернена матриця має вигляд:

$$B = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,758} \begin{pmatrix} 0,79 & 0,16 & 0,02 \\ 0,16 & 0,80 & 0,10 \\ 0,02 & 0,10 & 0,96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (E - A)^{-1} Y = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238 \\ 186 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Отже, планові обсяги валової продукції для галузей відповідно становлять: $X_1=238$, $X_2=186$, $X_3=400$. Обчислюючи обернену матрицю, ми округлили всі числа до сотих.

Визначимо виробничу програму кожної галузі, використовуючи коефіцієнти a_{ij} :

| | |
|--|--|
| $x_{11} = a_{11}X_1 = 0 \cdot 238 = 0,$ | $x_{21} = a_{21}X_1 = 0,2 \cdot 238 = 47,6,$ |
| $x_{12} = a_{12}X_2 = 0,2 \cdot 186 = 37,2,$ | $x_{22} = a_{22}X_2 = 0 \cdot 186 = 0,$ |
| $x_{13} = a_{13}X_3 = 0 \cdot 400 = 0,$ | $x_{23} = a_{23}X_3 = 0,1 \cdot 400 = 40,$ |
| $x_{31} = a_{31}X_1 = 0 \cdot 238 = 0,$ | |

$$x_{32} = a_{32} X_2 = 0,1 \cdot 186 = 18,6,$$

$$x_{33} = a_{33} X_3 = 0,2 \cdot 400 = 80.$$

Коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат c_{ij} матриці C визначаються як різниця внутрішньовиробничих витрат (елементи матриці B) та прямих витрат (елементи матриці A):

$$C = B - A = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,03 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,01 & 0,03 \\ 0,01 & 1,05 & 1,03 \\ 0,03 & 0,03 & 1,07 \end{pmatrix}.$$

Приклад: Дані про виконання балансу за звітний період (в умов. грош од.) наведено в таблиці:

| Галузь виробництва | Розподіл випуску продукції в галузях | | Обсяг кінцевої продукції | Обсяг валової продукції |
|--------------------|--------------------------------------|----|--------------------------|-------------------------|
| | 1 | 2 | | |
| 1 | 9 | 25 | 66 | 100 |
| 2 | 8 | 27 | 165 | 200 |

Обчислити необхідний обсяг валової продукції кожної галузі, якщо обсяг кінцевої продукції збільшиться вдвоє, а другої – не зміниться.

Розв'язання:

Маємо $X_1=100$, $X_2=200$. Матриця обсягів валової продукції $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$.

Обчислимо коефіцієнти прямих витрат:

$$a_{11} = \frac{9}{100} = 0,09,$$

$$a_{21} = \frac{8}{100} = 0,08,$$

$$a_{12} = \frac{25}{200} = 0,125,$$

$$a_{22} = \frac{27}{200} = 0,135.$$

Тобто матриця технологічних коефіцієнтів $A = \begin{pmatrix} 0,09 & 0,125 \\ 0,08 & 0,135 \end{pmatrix}$ має

невід'ємні елементи і задовольняє критерій продуктивності:

$$\max\{0,09 + 0,08; 0,125 + 0,135\} = \max\{0,17; 0,26\} = 0,26 \square 1.$$

Тому для довільної матриці обсягів кінцевої продукції Y можна знайти необхідний обсяг валової продукції X за формулою $X=(E-A)^{-1}Y$.

Знайдемо матрицю повних витрат $B=(E-A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,09 & 0,125 \\ 0,08 & 0,135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,91 & -0,125 \\ -0,08 & 0,856 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det|E - A| = 0,77715 \neq 0$, то

$$B = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,77715} \begin{pmatrix} 0,865 & 0,125 \\ 0,08 & 0,91 \end{pmatrix}.$$

За умовою матриця обсягів кінцевої продукції. Тоді матриця обсягів валової продукції: $X = \frac{1}{0,77715} \begin{pmatrix} 0,865 & 0,125 \\ 0,08 & 0,91 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 132 \\ 165 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 173,461 \\ 206,794 \end{pmatrix}$. Тобто обсяг валової продукції в першій галузі треба збільшити до 173,461 умов. грош. од., а в другій – до 206, 794 умов. грош. од.

Модель рівноважних цін

Розглянемо балансову модель, яку називають *моделлю рівноважних цін*.

$$\text{Нехай задано матриці } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$$

де A – матриця прямих витрат; X – матриця обсягів валової продукції; P – матриця цін, i -та координата якої дорівнює ціні одиниці продукції j -ї галузі.

Тоді, наприклад, перша галузь одержить прибуток, який дорівнює p_1x_1 . Частина свого прибутку ця галузь витратить на закупівлю продукції інших галузей. Так, для випуску одиниці продукції їй необхідна продукція першої галузі в обсязі a_{11} , другої галузі – в обсязі a_{21} , ... n -ї галузі – в обсязі a_{n1} .

На закупівлю цієї продукції буде витрачено суму, що становить

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n.$$

Отже, першій галузі для випуску продукції в обсязі x , необхідно витратити на закупівлю продукції інших галузей суму, що становить

$$x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n).$$

Частина доходу, що залишилася, позначимо V_1 (ця частина доходу називається додатковою вартістю й іде на виплату заробітної плати й податків, підприємницький прибуток та інвестиції).

Таким чином, справджується рівність

$$x_1p_1 = x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n) + V_1.$$

Поділивши її на x_1 , отримаємо:

$$p_1 = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n) + W_1$$

де $W_1 = V_1/x_1$, – норма додаткової вартості, тобто додаткова вартість на одиницю продукції, що випускається. Аналогічно для інших галузей отримаємо:

$$p_2 = (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{n2}p_n) + W_2;$$

...

$$p_n = (a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{nn}p_n) + W_n$$

Добуті рівності можна записати в матричній формі $P = A^T P + W$,

де A^T – матриця, транспонована до матриці A , W – матриця норм додаткової вартості.

Бачимо, що рівняння $P = A^T P + W$ відрізняється від рівнянь моделі Леонтьєва лише тим, що матрицю обсягів валової продукції X замінено на матрицю цін P , матрицю обсягу кінцевої продукції Y – на матрицю додаткової вартості W , матрицю A – на транспоновану матрицю A^T .

Модель рівноважних цін дає змогу за відомих норм додаткової вартості прогнозувати ціни на продукцію галузей, а також зміни цін та інфляцію, що є наслідком зміни ціни в одній із галузей.

Приклад. Розглянемо економічну систему, яка складається з трьох галузей: паливно-енергетичної, промисловості й сільського господарства. Нехай транс-

понована матриця прямих витрат та матриця додаткової вартості:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ Визначити рівноважні ціни.}$$

Розв'язання:

Скористаємося формулою $P = A^T P + W$ або $(E - A^T)P = W$.

Звідси $P = (E - A^T)^{-1} W$. Обчислимо транспоновану матрицю повних ви-

$$\text{трат: } E - A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,2 \\ -0,3 & 0,8 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Обчислимо обернену матрицю до неї: } (E - A^T)^{-1} = \frac{1}{0,444} \begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді: } P = (E - A^T)^{-1} W = \frac{1}{0,444} \begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Одже, рівноважними цінами для розглянутих галузей будуть: 10, 20 та 15 од.

Лінійна модель міжнародної торгівлі

Розглянемо лінійну модель обміну, яку часто інтерпретують, як модель міжнародної торгівлі, що дає змогу визначити торгівельні доходи країн для збалансованої торгівлі. Нехай маємо групу з n країн K_1, K_2, \dots, K_n , які ведуть між собою торгівлю. Позначимо через x_j торгівельний дохід j -країни, який формується з продажу власних товарів як на внутрішньому, так і на зовнішньому ринках. Структуру торговельних відносин між країнами вважаємо встановленою: частина q_{ij} торговельного доходу x_{ij} , яку j -та країна витрачає на купівлю товарів i -ї країни, є сталою.

Розглянемо матрицю $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$, яку називають структурною

матрицею торгівлі.

Вважатимемо, що весь торговельний дохід витрачається або на закупівлю товарів на своїй території, або на імпорт з інших країн, тобто сума елементів будь-якого стовпчика матриці Q дорівнює одиниці: $\sum_{i,j=1}^n q_{ij} = 1$.

Для країни K_i дохід від внутрішньої та зовнішньої торгівлі становить $x_i = q_{i1}P_1 + q_{i2}P_2 + \dots + q_{in}P_n$.

Для збалансованої торгівлі необхідно знайти таку матрицю торговельних

доходів $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, щоб справджувалося матричне рівняння: $QX=X$, з якого мо-

жна визначити X .

Приклад: Візьмемо три країни (наприклад, США, Німеччину й Кувейт) учасниці торгівлі з торговельними доходами X_1, X_2, X_3 . Вважатимемо, що весь торговельний дохід кожної країни витрачається або на закупівлю товарів на своїй території, або на імпорт з інших країн. Нехай США половину торговельного доходу витрачають на закупівлю товарів на своїй території, чверть – на закупівлю товарів із Німеччини та ще чверть – товарів із Кувейту. Німеччина порівну витрачає торговельний дохід на закупівлю товарів зі США, на своїй території та з Кувейту. Кувейт половину торговельного доходу витрачає на закупівлю товарів зі США, іншу половину – з Німеччини й нічого не закуповує на своїй території. Визначимо доходи країн, які задовольняли б збалансовану бездефіцитну торгівлю, якщо сума їхніх доходів становить 9000 умов. грош. од.

Розв'язання:

Запишемо структурну матрицю торгівлі:

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{США} & \text{Німеччина} & \text{Кувейт} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Нехай q_{ij} – частина доходу, яку j -та країна витрачає на закупівлю товарів i -ї країни. Зазначимо, що сума елементів матриці Q у кожному стовпці дорівнює одиниці.

Після підбиття підсумків торгівлі за рік i -та країна одержить прибуток:
 $x_i = q_{i1}X_1 + q_{i2}X_2 + \dots + q_{in}X_n$.

Запишемо систему рівнянь для відшукування матриці X :

$$QX=X \text{ або } (Q-E)X=0,$$

Тобто

$$Q - E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок цієї системи: $X_1 = 2X_3$, $X_2 = 1,5X_3$, $X_3 \in R$.

Добутий результат означає, що збалансованість торгівлі даних країн досягається за співвідношення їхніх національних доходів $2 : 1,5 : 1$.

Знайдемо доходи країн, які задовольняли б збалансовану бездефіцитну торгівлю за умови, що сума доходів становить $X_1 + X_2 + X_3 = 9000$ умов. гр. од. Підставимо в цю рівність значення $X_1 = 2C$, $X_2 = 1,5C$, $X_3 = C$, де $C = \text{const}$. Отримаємо: $2C + 1,5C + C = 9000$, звідки $C = 2000$. Отже, $X_1 = 4000$, $X_2 = 3000$, $X_3 = 2000$ умов. грош. од.

На завершення зазначимо, що нами наведено спрощені варіанти моделей міжгалузевого балансу та міжнародної торгівлі.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1.103. Обчислити матрицю обсягів кінцевої продукції, що призначена для реалізації продукції, якщо матриця обсягів валової продукції галузі й матриця коефіцієнтів прямих витрат мають вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

1.104. Задано матрицю доходів інвесторів $R = \begin{pmatrix} 0,95 & 1,05 \\ 1,05 & 1,05 \\ 1,40 & 1,21 \end{pmatrix}$ і матрицю, що

характеризує портфельні інвестиції $P = (1000 \quad 7000 \quad 12000)$. Визначити, який прибуток гарантовано інвесторам.

1.105. Задано матрицю доходів інвесторів $R = \begin{pmatrix} 0,90 & 1,20 \\ 1,05 & 1,05 \\ 1,20 & 1,90 \end{pmatrix}$ і матрицю, що

характеризує портфельні інвестиції $P = (1000 \quad 5000 \quad 15000)$. Визначити, який прибуток гарантовано інвесторам.

1.106. Для заданої умовної виробничої системи визначити коефіцієнти повних витрат; матрицю обсягів валової продукції X та план кожної галузі; коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

| Галузь виробництва | Прямі витрати галузей | | | Обсяг кінцевої продукції |
|--------------------|-----------------------|-----|-----|--------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | |
| 1 | 0 | 0,3 | 0 | 100 |
| 2 | 0,2 | 0 | 0,1 | 200 |
| 3 | 0 | 0,4 | 0 | 300 |

1.107. Побудувати матричну модель умовної двогалузевої виробничої системи, якщо задано матрицю A прямих матеріальних витрат і матрицю обсягу

кінцевої продукції Y : $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \end{pmatrix}$. Визначити:

- а) коефіцієнти повних витрат;
- б) матрицю валового випуску X та план кожної галузі;
- в) коефіцієнти непрямих витрат.

1.108. Дані про виконання балансу за звітний період (в умов. грош од.) наведено в таблиці:

| Галузь виробництва | Розподіл випуску продукції в галузях | | Обсяг кінцевої продукції | Обсяг валової продукції |
|--------------------|--------------------------------------|-----|--------------------------|-------------------------|
| | 1 | 2 | | |
| 1 | 200 | 140 | 160 | 500 |
| 2 | 125 | 150 | 125 | 400 |

Обчислити необхідний обсяг валової продукції кожної галузі, якщо обсяг кінцевої продукції збільшиться втричі, а другої – залишиться на попередньому рівні.

1.109 Дані про виконання балансу за звітний період (в умов. грош од.) наведено в таблиці:

| Галузь виробництва | Розподіл випуску продукції в галузях | | Обсяг кінцевої продукції | Обсяг валової продукції |
|--------------------|--------------------------------------|-----|--------------------------|-------------------------|
| | 1 | 2 | | |
| 1 | 20 | 200 | 180 | 400 |
| 2 | 135 | 300 | 65 | 500 |

Обчислити необхідний обсяг валової продукції кожної галузі, якщо обсяг кінцевої продукції збільшиться вдвічі, а другої – не зміниться.

1.110. Дані про виконання балансу за звітний період (в умов. грош од.) наведено в таблиці:

| Галузь виробництва | Розподіл випуску продукції в галузях | | Обсяг кінцевої продукції | Обсяг валової продукції |
|--------------------|--------------------------------------|----|--------------------------|-------------------------|
| | 1 | 2 | | |
| 1 | 100 | 20 | 180 | 300 |

| | | | | |
|---|-----|----|-----|-----|
| 2 | 155 | 45 | 150 | 350 |
|---|-----|----|-----|-----|

Обчислити необхідний обсяг валової продукції кожної галузі, якщо обсяг кінцевої продукції збільшиться втриє, а другої – не зміниться.

1.111. Задано лінійну матрицю торгівлі трьох країн $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$. Знайти

торговельні бюджети для збалансованої торгівлі трьох країн за умови, що сума бюджетів $X_1 + X_2 + X_3 = 41000$ умов. гр. од.

1.112. Задано лінійну матрицю торгівлі трьох країн $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Знайти

торговельні бюджети для збалансованої торгівлі трьох країн за умови, що сума бюджетів $X_1 + X_2 + X_3 = 35000$ умов. гр. од.

Індивідуальне завдання

Для заданої умовної виробничої системи визначити коефіцієнти повних витрат; матрицю обсягів валової продукції X та план кожної галузі; коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

| Галузь виробництва | Прямі витрати галузей | | | Обсяг кінцевої продукції |
|--------------------|-----------------------|-------|------|--------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | |
| 1 | 0 | 0,02N | 0 | 100N |
| 2 | 0,01N | 0 | 0,1N | 200N |
| 3 | 0 | 0,03N | 0 | 120N |

де N – остання цифра номера студента за списком

Питання для самоперевірки

1. Що називається лінійним рівнянням?

2. Що називають матрицею? Види матриць.
3. Що таке матриця-рядок та матриця-стовпець?
4. Дії над матрицями.
5. Що називають визначником? Властивості визначників.
6. Правила розкриття визначників другого та третього порядків.
7. Мінор та алгебраїчне доповнення.
8. Правило розкриття визначника будь-якого порядку.
9. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.
10. Правило Крамера.
11. Що називають оберненою матрицею?
12. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь.
13. Що таке ранг матриці?
14. Що таке розширена матриця?
15. Теорема Кронекера – Капеллі.
16. Прямокутні та однорідні системи.

III. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§1. Основні поняття

Озн. Скаляром називається величина, яка має тільки чисельне значення (наприклад, маса тіла, об'єм тіла, площа городу тощо). Позначення: a , b , AB тощо.

Озн. Вектором називається величина, яка крім чисельного значення має напрямок (наприклад, сила, швидкість) і позначається літерами зі стрілкою над ними: \vec{a} , \vec{b} , \vec{AB} тощо.

Щоб обчислити координати вектора \vec{AB} необхідно від координат кінця $B\{x_2; y_2; z_2\}$ відняти координати початку $A\{x_1; y_1; z_1\}$, тобто $\vec{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Приклад: Обчислити координати вектора \overrightarrow{AB} , якщо $A\{3; -1; 0\}$, $B\{1; 2; -4\}$.

Розв'язання: $\overrightarrow{AB} \{1-3; 2-(-1); -4-0\} = \{-2; 3; -4\}$.

Озн. Довжина вектора $\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}$ називається абсолютною величиною або модулем вектора і обчислюється за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Якщо задані координати кінця $B\{x_2; y_2; z_2\}$ та початку вектора $A\{x_1; y_1; z_1\}$, то його довжину обчислюють за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Приклад: Обчислити довжину вектора \overrightarrow{AB} , якщо $A\{3; -1; 0\}$, $B\{1; 2; -4\}$.

Розв'язання:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-(-1))^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}.$$

Щоб визначити вектор, треба вказати:

- 1) точку, з якої вектор починається (початок);
- 2) сторону простору, в яку направлено вектор;
- 3) пряму, якій він паралельний;
- 4) довжину вектора.

Вектор, вказаний всіма цими елементами, не буде вільним.

Озн. Якщо вектор може мати початок у будь-якій точці прямої, на якій він лежить, то він буде ковзним.

Озн. Вектор, початок якого може знаходитись у будь-якій точці простору, називається вільним.

Як правило, вивчають вільні вектори, як найбільш прості та важливі.

Озн. Вектори \vec{a} , \vec{b} рівні, якщо вони паралельні між собою, спрямовані в один бік і мають однакову довжину, тобто $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Якщо ж вони спрямовані в протилежні сторони, то $|\vec{a}| = -|\vec{b}|$.

Озн. Вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Ознакою колінеарності двох векторів $\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}$ та $\vec{b}\{b_x; b_y; b_z\}$ є пропорційність їх координат: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

Приклад: Вектори $\vec{a}\{-2; a_y; -1\}$ та $\vec{b}\{3; -6; b_z\}$ колінеарні. Знайти координати цих векторів.

Розв'язання: За умовою колінеарності векторів маємо рівність:

$\frac{-2}{3} = \frac{a_y}{-6} = \frac{-1}{b_z}$. Звідси: $a_y = \frac{-2 \cdot (-6)}{3} = 4$, а $b_z = -\frac{2}{3}$. Тобто вектори мають ко-

ординати: $\vec{a}\{-2; 4; -1\}$ та $\vec{b}\{3; -6; -\frac{2}{3}\}$.

Озн. Сумою векторів \vec{a} та \vec{b} називається вектор, початок якого збігається з початком вектора \vec{a} , а кінець – з кінцем вектора \vec{b} .

Тобто, щоб одержати суму векторів \vec{a} та \vec{b} , треба початок першого вектора \vec{a} з'єднати з кінцем другого \vec{b} і спрямувати утворений вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ від початку першого до кінця другого (рис. 3.1.).

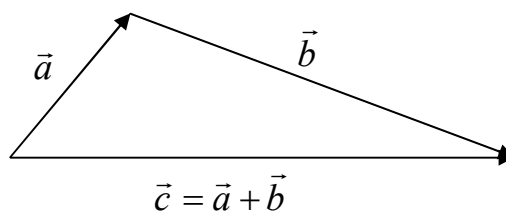


Рис. 2.1.

Щоб знайти різницю векторів, треба сумістити початок векторів як доданків. Тоді вектор, спрямований від кінця другого до початку першого, буде різницею векторів. З $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$, звідси стає зрозумілим напрямок вектора \vec{c} (рис. 3.2.).

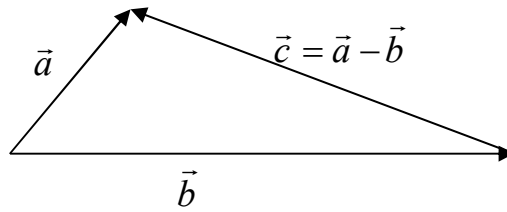


Рис. 2.2.

Приклад: Дано два вектори $\vec{a} = \{2; -1; 3\}$ та $\vec{b} = \{3; 4; 5\}$. Знайти вектори $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язання:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \{2+3; -1+4; 3+5\} = \{5; 3; 8\},$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \{2-3; -1-4; 3-5\} = \{-1; -5; -2\}.$$

Суму та різницю векторів можна знайти, користуючись діагоналями паралелограма (рис. 3.3):

Вектори \vec{AC} і \vec{OB} рівні, тому вектор \vec{OC} є сумою векторів \vec{OA} і \vec{AC} , тобто $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b}$. Між векторами \vec{OA} і \vec{AC} за рис.23 є кут α , тому з трикутника OAC за теоремою косинусів маємо:

$$|\vec{OC}|^2 = |\vec{OA}|^2 + |\vec{AC}|^2 - 2|\vec{OA}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos\alpha, \text{ звідси } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

$$\text{Отже, } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha} \quad (3.1)$$

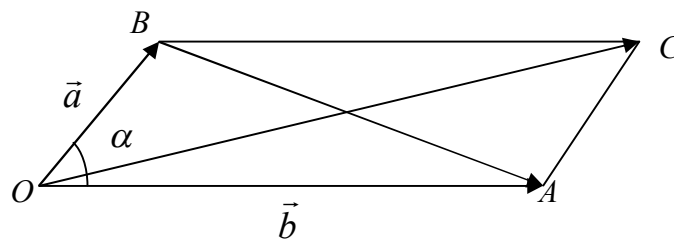


Рис. 2.3.

З трикутника OBA маємо за теоремою косинусів:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{BA}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\text{Отже, } |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha} \quad (3.2)$$

Приклад: Вектори \vec{a} та \vec{b} утворюють кут $\alpha = \frac{\pi}{3}$, а їх довжини відповідно дорівнюють $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$. Знайти суму $|\vec{a} + \vec{b}|$ та різницю векторів $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Розв'язання:

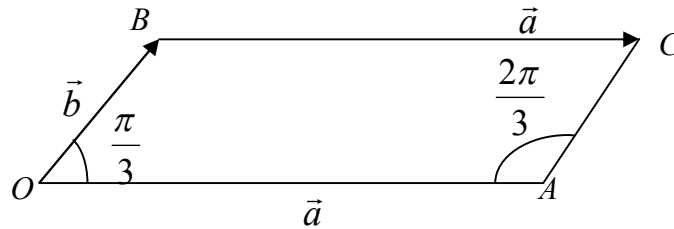


Рис. 2.4.

Маємо: $\angle OAC = \frac{\pi}{3}$, тому для вектора \vec{OC} кут між векторами \vec{a} та \vec{b} є $\frac{2\pi}{3}$. Тоді

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha} = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos \frac{2\pi}{3}} =$$

$$= \sqrt{25 + 64 + 40} = \sqrt{129} \approx 11,36$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha} = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos \frac{\pi}{3}} =$$

$$= \sqrt{25 + 64 - 40} = \sqrt{49} = 7.$$

Озн. Добутком вектора \vec{a} на скаляр $k \in \mathbb{R}$ є вектор $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, довжина якого дорівнює $|\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{b}|$.

Приклад: Дано два вектора $\vec{a} = \{2; -1; 3\}$ та $\vec{b} = \{3; 4; 5\}$. Знайти координати вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язання: $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = \{2 \cdot 2 - 3; 2 \cdot (-1) - 4; 2 \cdot 3 - 5\}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

№2.1. Дано два вектора $\vec{a} = \{1; -1; 2\}$ та $\vec{b} = \{3; 4; 0\}$. Знайти координати вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

№2.2. Дано три вектора $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{0; 2; -4\}$ та $\vec{c} = \{1; 1; -2\}$. Знайти координати та довжину вектора $\vec{d} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$.

№2.3. Дано точки $A(5; 0; 2)$, $B(-3; 3; -1)$, $C(1; 2; -3)$, $D(5; -4; 3)$. Чи можуть вони бути вершинами трапеції.

№2.4. Знайти точку N , з якою збігається кінець вектора $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$, якщо його початок збігається з точкою $M(1; 2; -3)$.

№2.5. Знайдіть координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$, якщо $A(1; 3)$, $B(2; 5)$, $C(3; 4)$, $D(-1; 3)$.

№2.6. Вектори одиничні \vec{a} та \vec{b} утворюють кут $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Знайти суму $|\vec{a} + \vec{b}|$ та різницю векторів $|\vec{a} - \vec{b}|$.

№2.7. Вектори \vec{a} та \vec{b} утворюють кут $\alpha = \frac{\pi}{6}$, а їх довжини відповідно дорівнюють $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Знайти суму $|\vec{a} + \vec{b}|$ та різницю векторів $|\vec{a} - \vec{b}|$.

№2.8. Вектори \vec{a} та \vec{b} утворюють кут $\alpha = 120^\circ$, а їх довжини відповідно дорівнюють $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$. Знайти суму $|\vec{a} + \vec{b}|$ та різницю векторів $|\vec{a} - \vec{b}|$.

№2.9. Дано: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Визначити $|\vec{a} + \vec{b}|$.

№2.10. Визначити суму $|\vec{a} + \vec{b}|$ та різницю векторів $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$ і $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$.

Індивідуальне завдання

1. Обчислити координати та довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{0; -n; 2n\}$, $\vec{b} = \{n-3; n-4; n-6\}$

2. Вектори \vec{a} та \vec{b} утворюють кут $\alpha = \frac{\pi}{3}$, а їх довжини відповідно дорівнюють

$|\vec{a}| = n$, $|\vec{b}| = n+1$. Знайти суму $|\vec{a} + \vec{b}|$ та різницю векторів $|\vec{a} - \vec{b}|$.

n – остання цифра номера студента за списком.

§2. Проекція вектора на вісь

Розглянемо проекцію вектора на вісь (рис. 2.5). Проекція вектора \vec{a} на вісь $Ox \in AB$, тобто $pr_x \vec{a} = AB$. Вектор \vec{a} та його проекція утворюють кут α , тому:

$$pr_x \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha = a_x.$$

Нехай \vec{i} – вектор на осі Ox , для якого $|\vec{i}| = 1$. Такий вектор називається одиничним або ортом. Тоді $AB = m \cdot |\vec{i}|$, а значить $pr_x \vec{a} = m \cdot |\vec{i}|$.

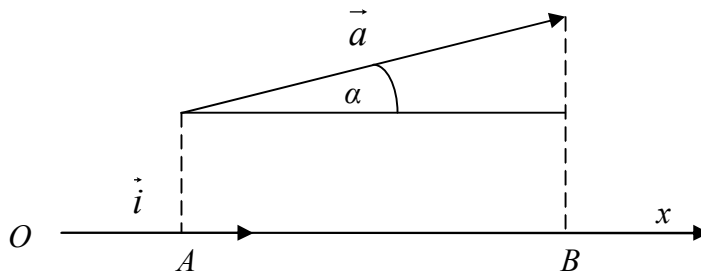


Рис.2.5.

На площині відповідно матимемо (рис. 2.6.): $pr_x \vec{a} = m_1 \cdot |\vec{i}| = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha = a_x$, $pr_y \vec{a} = m_2 \cdot |\vec{j}| = |\vec{a}| \cdot \cos \beta = a_y$, при чому $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ($\alpha + \beta = 90^\circ$). Тоді вектор \vec{a} можна розкласти за ортами $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$.

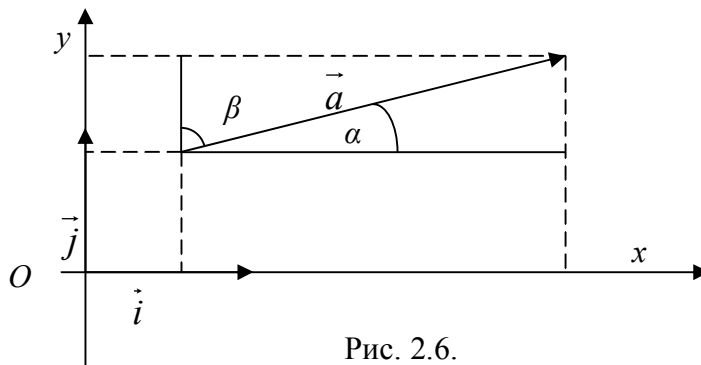


Рис. 2.6.

Аналогічно у просторі матимемо: $pr_x \vec{a} = m_1 \cdot |\vec{i}| = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha = a_x$, $pr_y \vec{a} = m_2 \cdot |\vec{j}| = |\vec{a}| \cdot \cos \beta = a_y$, $pr_z \vec{a} = m_3 \cdot |\vec{k}| = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma = a_z$. При чому

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, де $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Тоді вектор \vec{a} можна розкласти за ортами $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$.

Приклад: три вектори $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ задані в базисі векторів \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k} . Знайти проекцію вектора $\vec{d} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 5\vec{c}$ у цьому базисі.

Розв'язання: Додамо вектори:

$$+ \begin{cases} 3\vec{a} = 6\vec{i} + 9\vec{j} + 12\vec{k} \\ 4\vec{b} = -4\vec{i} + 20\vec{j} + 24\vec{k} \\ -5\vec{c} = -25\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 5\vec{c} \Rightarrow \vec{d} = 23\vec{i} + 24\vec{j} + 26\vec{k}.$$

Отже, координати шуканого вектора $\vec{d} \{-23; 24; 26\}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

№2.11. У ромбі $ABCD$ дано вектори-діагоналі $\vec{AC} = \vec{a}$, $\vec{BD} = \vec{b}$. Розкласти по цих векторах усі вектори-сторони ромба: \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} , \vec{DA} .

№2.12. У ромбі $ABCD$ дано вектори-сторони $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$. Розкласти по цих векторах усі вектори: \vec{BD} , \vec{AC} , \vec{CD} , \vec{DA} .

№2.13. Знайти координати вектора $\vec{a} = 4$, якщо відомі кути $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $\gamma = 60^\circ$, які він утворює з осями координат Ox , Oy , Oz і його довжину.

№2.14. Знайти координати вектора $\vec{a} = 8$, якщо відомі кути $\alpha = 135^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 60^\circ$, які він утворює з осями координат Ox , Oy , Oz і його довжину.

№2.15. Дано вектори $\vec{a} = \{2; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{6; 3; 2\}$. Знайти проекцію вектора \vec{b} на вектор \vec{a} і проекцію вектора \vec{a} на вектор \vec{b} .

№2.16. Розкласти вектор $\vec{b} = \{6; 3; 2\}$ за ортами.

№2.17. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Обчислити $np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.

№2.18. Знайти довжину вектора $\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k}$.

№2.19. Дано вектор $\vec{a} = \{-2; 2; 1\}$. Знайти проекцію вектора \vec{a} на координатні осі.

№2.20. Дано вектор $\vec{a} = \{5; -2; -4\}$ та $\vec{b} = \{6; 3; 2\}$. Знайти проекцію вектора \vec{a} на вектор \vec{b} та проекцію вектора \vec{b} на вектора \vec{a} .

Індивідуальне завдання

Дано вектор $\vec{b} = \{n-3; n-4; n-6\}$. Знайти проекцію вектора \vec{b} на координатні осі (n – остання цифра номера студента за списком).

§3. Перехід від одного базису до іншого

Озн. Вектори (більше двох) називаються компланарними, якщо вони лежать на одній площині або паралельні цій площині.

Вектор $\vec{d}\{d_1; d_2; d_3\}$ задано в базисі векторів $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$. Існує три некопланарних вектори $\vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}$, $\vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$ і $\vec{c}\{c_1; c_2; c_3\}$, які утворюють новий базис. Вектор \vec{d} у новому базисі має координати $\vec{d}(x; y; z)$.

Для їх знаходження необхідно розв'язати систему:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Тобто, існує матриця переходу $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

Приклад: Вектор $\vec{d}\{20; 11; -2\}$ задано в базисі векторів $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{-1; 3; 5\}$, $\vec{b}\{3; -2; 1\}$, $\vec{c}\{5; 4; -3\}$.

Розв'язання: У новому базисі вектор \vec{d} матиме координати $\vec{d}\{x; y; z\}$. Тоді маємо систему:

$$\begin{cases} -x + 3y + 5z = 20 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \\ 5x + y - 3z = -2 \end{cases}, \text{ яку розв'яжемо методом Крамера:}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 150; \Delta_x = \begin{vmatrix} 20 & 3 & 5 \\ 11 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 150;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & 20 & 5 \\ 3 & 11 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 300; \Delta_z = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 450.$$

Тоді за формулами Крамера: $x = \frac{150}{150} = 1$, $y = \frac{300}{150} = 2$, $z = \frac{450}{150} = 3$.

Отже, у новому базисі вектор \vec{d} матиме координати $\vec{d}\{1; 2; 3\}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.21. Вектор $\vec{d}\{0; 13; -15\}$ задано в базисі векторів $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{2; 1; 3\}$, $\vec{b}\{1; -1; -2\}$, $\vec{c}\{-1; -3; 3\}$.

2.22. Вектор $\vec{d}\{4; 3; 0\}$ задано в базисі векторів $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{1; 2; 3\}$, $\vec{b}\{1; -3; -2\}$, $\vec{c}\{-2; 1; 6\}$.

2.23. Вектор $\vec{d}\{6; 8; 9\}$ задано в базисі векторів $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{5; 2; 1\}$, $\vec{b}\{-3; 1; 4\}$, $\vec{c}\{6; -3; -2\}$.

2.24. Вектор $\vec{d}\{3; 11; 8\}$ задано в базисі векторів $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{1; 2; 1\}$, $\vec{b}\{-1; 1; 1\}$, $\vec{c}\{1; 1; 2\}$.

2.25. Вектор $\vec{d}\{-2; 9; 3\}$ задано в базисі векторів $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{3; 6; 2\}$, $\vec{b}\{-1; 2; 4\}$, $\vec{c}\{-4; 1; -3\}$.

Індивідуальне завдання

Вектор $\vec{d}\{1; 1; 1\}$ задано в базисі векторів $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{-1; n; n-5\}$, $\vec{b}\{n+1; 1; n-3\}$, $\vec{c}\{n; n-2; n-3\}$ (n – остання цифра номера студента за списком).

§4. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

а) **Озн.** Скалярним добутком векторів \vec{a} і \vec{b} (позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$) називають число, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними (рис. 2.7). Нехай задано вектори $\vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}$ і $\vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$, тоді:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \quad (2.6.)$$

У даному записі $|\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ є проекцією вектора \vec{b} на вектор \vec{a} . Звідси знахо-

ДИМО: $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (2.7.)$

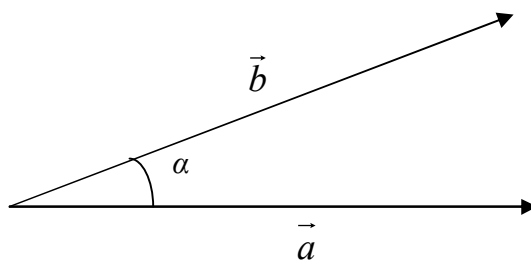


Рис. 2.7.

Приклад: Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ і $\vec{b} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$, де \vec{i} , \vec{j} одиничні вектори ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$), що утворюють базис, тобто кут між ними складає 90° .

Розв'язання:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (5\vec{i} - 4\vec{j}) = 10\vec{i}^2 + 15\vec{i} \cdot \vec{j} - 8\vec{i} \cdot \vec{j} - 12\vec{j}^2.$$

Відмітимо, що $\vec{i}^2 = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0^\circ = 1$, аналогічно $\vec{j}^2 = |\vec{j}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 0^\circ = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 90^\circ = 0$. Маємо: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \cdot 1 + 15 \cdot 0 - 8 \cdot 0 - 12 \cdot 1 = 10 - 12 = -2$.

Тоді кут між векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{5^2 + 4^2}} = -\frac{2}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{41}} = -\frac{2}{\sqrt{533}} = -\frac{2\sqrt{533}}{533} \approx -0,087 \Rightarrow \alpha \approx 105,5^\circ.$$

Приклад: Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}\{3; 4; 5\}$, $\vec{b}\{2; 4; 6\}$, та косинус кута між ними.

Розв'язання: Скалярний добуток обчислимо згідно формули:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z, \text{ тобто } \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 6 + 16 + 30 = 52.$$

Тоді косинус кута між векторами \vec{a} та \vec{b} :

$$\cos \alpha = \frac{52}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2}} = \frac{52}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{56}} = \frac{13}{5\sqrt{7}} = \frac{13\sqrt{7}}{35} \approx 0,9827.$$

б) **Озн.** Векторним добутком векторів \vec{a} і \vec{b} (позначається $\vec{a} \times \vec{b}$) називають вектор, модуль якого дорівнює добутку модулів цих векторів на синус кута між ними, а напрямок у нього такий, що якщо дивитися з кінця вектора на його початок, то вектор \vec{a} можна перевести в положення вектора \vec{b} поворотом проти годинникової стрілки (рис 2.8.):

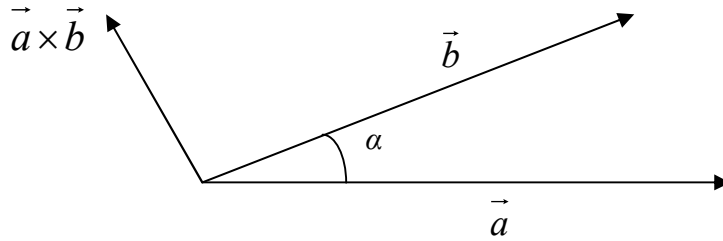


Рис. 2.8.

Модуль векторного добутку є площею паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} , як на сторонах:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha \quad (2.8)$$

Нехай задано вектори $\vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}$, $\vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$ і $\vec{c}\{c_1; c_2; c_3\}$, тоді в координатній формі векторний добуток можна записати таким чином:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x - a_x & b_y - a_y & b_z - a_z \\ c_x - a_x & c_y - a_y & c_z - a_z \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

А формулу площі трикутника можна подати у вигляді:

$$S = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \quad (2.10)$$

Для обчислення модуля використовують його властивість: $|a|^2 = a^2$, звідки добувають корінь. Застосуємо цю властивість до обчислення модуля векторного добутку, урахувавши, що координати векторів задано $\vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}$, $\vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$ і $\vec{c}\{c_1; c_2; c_3\}$:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= \begin{vmatrix} b_y - a_y & b_z - a_z \\ c_y - a_y & c_z - a_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_x - a_x & b_z - a_z \\ c_x - a_x & c_z - a_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_x - a_x & b_y - a_y \\ c_x - a_x & c_y - a_y \end{vmatrix}^2, \\ |\vec{a} \times \vec{b}| &= \sqrt{|\vec{a} \times \vec{b}|^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Якщо вектори колінеарні, то $\alpha = 0$ і відповідно $\sin \alpha = 0$, тому векторний добуток дорівнює 0.

в) **Озн.** Мішаним добутком векторів (позначається $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$) називають число, яке дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Нехай задано вектори $\vec{a}\{a_1; a_2; a_3\}$, $\vec{b}\{b_1; b_2; b_3\}$ і $\vec{c}\{c_1; c_2; c_3\}$, то їх

$$\text{мішаний добуток дорівнює } \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

Якщо вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} утворюють базис, то їх мішаний добуток не дорівнює нулю. Якщо цей добуток дорівнює нулю, то вектори компланарні.

Приклад: Задано вектори $\vec{a}\{1; -2; 3\}$, $\vec{b}\{4; 3; -5\}$ і $\vec{c}\{-3; 2; 1\}$. Обчислити об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання: Ураховуючи означення мішаного добутку, об'єм паралелепі-

$$\text{педа дорівнює: } V = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 42.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.26. Дано вектори $\vec{a}\{1; 2; -1\}$, $\vec{b}\{1; -1; 3\}$, $\vec{c}\{6; 0; 8\}$. Обчислити $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $\sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c}}$.

2.27. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$, а кут між цими векторами дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

2.28. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} + \vec{b}$ і $3\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, а кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює $\frac{\pi}{3}$.

2.29. Обчислити скалярний добуток $(2\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, а кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює $\frac{2\pi}{3}$.

2.30. Визначити кут між векторами $\vec{a}\{-2; 0; 2\}$, $\vec{b}\{-1; 1; 0\}$.

2.31. Визначити кут між векторами \vec{a} і \vec{b} , якщо $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

2.32. Визначити кут між векторами $-9\vec{a}$ і $\frac{1}{9}\vec{b}$, $\vec{a}\{2; 1; -2\}$, $\vec{b}\{5; -1; 1\}$.

2.33. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} , якщо вони утворюють кут 45° і $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18$.

2.34. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} , якщо вони утворюють кут 60° і $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{3}$.

2.35. При якому значенні p вектори $\vec{a}\{1; p; -2\}$, $\vec{b}\{p; 3; -4\}$ є взаємно перпендикулярними?

2.36. При якому значенні x вектори $\vec{m} = x\vec{p} + 13\vec{q}$ і $\vec{n} = 2\vec{p} - \vec{q}$ є взаємно перпендикулярними, якщо $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, а кут між векторами \vec{p} і \vec{q} дорівнює $\frac{2\pi}{3}$?

2.37. Знайти гострий кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\{3; 2; 0\}$, $\vec{b}\{1; -2; 2\}$.

2.38. Дано вектор $\vec{a}\{1; 3; 4\}$. Знайти колінеарний до нього вектор з початком у точці $A(1; 2; 8)$ і кінцем у точці B , що лежить у площині xOy .

2.39. Знайти об'єм тетраедра з вершинами $A(1; 2; 3)$, $B(4; 4; 4)$, $C(2; 6; 4)$, $D(2; 3; 6)$.

2.40. Знайти об'єм паралелепіпеда з вершинами $A(1; 2; 3)$, $B(4; 0; -4)$, $C(2; 6; 4)$, $D(2; 2; -2)$.

2.41. Перевірити на компланарність вектори $\vec{a}\{1; 1; 5\}$, $\vec{b}\{1; 1; -3\}$, $\vec{c}\{-2; 2; -6\}$.

2.42. Перевірити на компланарність вектори $\vec{a}\{-1; 1; 3\}$, $\vec{b}\{1; 1; -3\}$, $\vec{c}\{-2; 2; -6\}$.

Індивідуальне завдання

1. Обчислити об'єм паралелепіпеда, якщо координати його вершин дорівнюють $A(-1; n; n-5)$, $B(n+1; 1; n-3)$, $C(n; n-2; n-3)$, $D(-n; n-1; n+4)$.

2. Перевірити на компланарність вектори $\vec{a}\{-1; n; n-5\}$, $\vec{b}\{n+1; 1; n-3\}$, $\vec{c}\{-2; 2n; 2n-6\}$ (n – остання цифра номера студента за списком).

Питання для самоперевірки

1. Що таке модуль вектора?
2. Правила додавання та віднімання векторів.
3. Які вектори називаються колінеарними та компланарними?
4. Властивості векторів та дії над ними. Знаходження довжини вектора.
5. Розкладання вектора на складові.
6. Базисні вектори.
7. Проекція вектора на вісь. Що таке одиничний вектор?
8. Що таке скалярний добуток векторів?
9. Як знаходиться кут між векторами?
10. Правило переходу від одного базису до другого. Матриця переходу.
11. Знаходження скалярного добутку за відомими координатами векторів.
12. Що таке векторний добуток?
13. Геометричний зміст модуля векторного добутку.
14. Що таке мішаний добуток векторів?

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

РОЗДІЛ 1:

$$1.1. \text{ а) } \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 11 & \end{pmatrix}, \text{ б) } \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -16 & 4 \end{pmatrix}, \text{ в) } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ г) } \begin{pmatrix} 19 & -8 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}, \text{ д) } \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}, \text{ е) } \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix};$$

$$1.2. \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & -23 & -16 \\ 5 & 4 & -2 \\ -21 & -51 & -24 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -12 & 19 \\ 25 & -13 \end{pmatrix}; \quad 1.3. \quad \text{ а) } \begin{pmatrix} 6,5 & 23 \\ 10 & 13,5 \end{pmatrix},$$

$$\text{ б) } \begin{pmatrix} 185 & 24 \\ -66 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{ в) } \begin{pmatrix} 34 & 214 \\ 34 & 134 \end{pmatrix}; \quad 1.4. \quad \text{ а) } \begin{pmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 2 & -4 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{ б) } \begin{pmatrix} 0 & 12 & -4 \\ -4 & 16 & -8 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{ в) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{ г) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 15 & 5 \\ -8 & 16 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{ д) } \begin{pmatrix} 29 & -56 & 5 \\ 4 & -5 & -3 \\ 13 & -29 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ е) } \begin{pmatrix} -1 & -11 & -12 \\ 0 & 11 & -11 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$1.5. \text{ а) } \begin{pmatrix} -2,5 & 5 & -4 \\ 8,5 & 12,5 & -9 \\ 4 & 3,5 & 3,5 \end{pmatrix}, \text{ б) } \begin{pmatrix} 31 & 8 & -22 \\ -7 & 53 & 26 \\ -22 & -7 & 19 \end{pmatrix}, \text{ в) } \begin{pmatrix} 38 & 8 & -14 \\ 66 & 66 & -37 \\ 46 & -26 & 26 \end{pmatrix}; \quad 1.6. \text{ фор-}$$

мули скороченого множення не справджуються. 1.7. $\begin{pmatrix} 20 & -36 \\ -9 & 29 \end{pmatrix}$; 1.8.

$$\begin{pmatrix} -4894 & -3589 \\ 2035 & 5079 \end{pmatrix}; \quad 1.9. \quad \begin{pmatrix} 14 & -32 & -11 \\ -16 & 36 & -7 \\ -2 & 16 & -10 \end{pmatrix}; \quad 1.10. \quad \begin{pmatrix} 21 & -3 & 28 \\ -13 & 1 & -3 \\ 7 & -13 & 4 \end{pmatrix}; \quad 1.11.$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \quad 1.12. \quad \begin{pmatrix} -22 & 19 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}; \quad 1.13. \quad \begin{pmatrix} -45 & 14 \\ 20 & 9 \end{pmatrix}; \quad 1.14. \quad \begin{pmatrix} -93 & 35 \\ 36 & -20 \end{pmatrix}; \quad 1.15.$$

$$\begin{pmatrix} -9 & -55 \\ 34 & -70 \end{pmatrix}; \quad 1.16. \quad \begin{pmatrix} 4 & -26 & -58 \\ 25 & 34 & 44 \\ 16 & 42 & 26 \end{pmatrix}; \quad 1.17. \quad \begin{pmatrix} 21 & 10 \\ 5 & 78 \end{pmatrix}; \quad 1.18. \quad \begin{pmatrix} -6 & 7 & 23 \\ -14 & 56 & 79 \\ 34 & -1 & -83 \end{pmatrix};$$

1.19. -64; 1.20. 9; 1.21. 58; 1.22. -22; 1.23. 29; 1.24. 26; 1.25. 19; 1.26. 120; 1.27. 133; 1.28. 0; 1.29. 256; 1.30. 149; 1.31. -86; 1.32. -9; 1.33. 27; 1.34. 245; 1.35. 174; 1.36. -809; 1.37. -18; 1.38. 32; 1.43. -129; 1.44. 232; 1.45. 15; 1.46. -212; 1.47. -39; 1.48. 112; 1.49. 2; 1.50. 2; 1.51. 2; 1.52. 3; 1.53. 2; 1.54. 2; 1.55. 3; 1.56. 3; 1.57.

$$3; \mathbf{1.58.} \ 2; \mathbf{1.59.} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}; \mathbf{1.60.} \begin{pmatrix} -0,5 & 0,4 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}; \mathbf{1.61.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -7 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{1.62.}$$

$$\begin{pmatrix} -1,25 & -0,25 & 0,5 \\ -2,25 & -0,25 & 0,5 \\ 1,75 & 0,75 & -0,5 \end{pmatrix}; \mathbf{1.63.} \begin{pmatrix} 0,6 & -0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & -0,1 \\ -0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}; \mathbf{1.56.}$$

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & -0,125 \\ -2,25 & 4,25 & 3,625 \\ 0,75 & 1,75 & -1,375 \end{pmatrix}; \mathbf{1.65.} \begin{pmatrix} 0,3 & 0,25 & -0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,3 & 0,25 & 0,2 \end{pmatrix}; \mathbf{1.66.} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{1.67.}$$

$$\begin{pmatrix} 0,6 & -0,4 & 0,2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -0,8 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}; \mathbf{1.68.} \begin{pmatrix} 0,85 & -0,2 & 0,25 \\ 0,7 & -0,4 & 0,5 \\ -0,45 & 0,4 & 0,25 \end{pmatrix}; \mathbf{1.69.} \begin{pmatrix} 9,8 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 \end{pmatrix}; \mathbf{1.70.}$$

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 9,2 & 3,4 \end{pmatrix}; \mathbf{1.71.} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1,6 & -1,8 \end{pmatrix}; \mathbf{1.72.} \begin{pmatrix} 1,5 & 5 \\ -0,25 & 6 \end{pmatrix}; \mathbf{1.73.} \begin{pmatrix} 1,6 & -0,8 \\ 1,6 & 0,2 \end{pmatrix}; \mathbf{1.74.}$$

$$\begin{pmatrix} 1,3 & -3 \\ -0,8 & 5 \end{pmatrix}; \mathbf{1.75.} \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \mathbf{1.76.} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & -0,8 \end{pmatrix}; \mathbf{1.77.} \begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ -0,5 & -4 & 4,5 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{1.78.} \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 3 \\ 0,25 & 0 & 4,5 \\ 0,75 & 1,5 & 2 \end{pmatrix}; \mathbf{1.79.} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ -0,5 & -0,5 & 1 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}; \mathbf{1.80.} \text{ не існує}; \mathbf{1.81.}$$

$$\left\{ \frac{41}{46}; \frac{58}{46}; \frac{38}{46} \right\}; \mathbf{1.82.} \left\{ \frac{77}{63}; -\frac{28}{63}; -\frac{140}{63} \right\}; \mathbf{1.83.} \{-1; -2; -4\}; \mathbf{1.84.} \{2; 0; -1\}; \mathbf{1.85.} \{3;$$

$$1; -1\}; \mathbf{1.86.} \{4; 2; 1\}; \mathbf{1.87.} \left\{ -\frac{13}{8}; -\frac{2}{8}; -\frac{5}{8} \right\}; \mathbf{1.88.} \left\{ \frac{20}{17}; \frac{16}{17}; -\frac{55}{17} \right\}; \mathbf{1.89.} \{4; 0,9;$$

$$1,4\}; \mathbf{1.90.} \left\{ \frac{18}{19}; \frac{4}{19}; \frac{78}{19} \right\}; \mathbf{1.91.} \{1; 1; 1\}; \mathbf{1.92.} \{-3; -5; -4\}; \mathbf{1.95.} \left(0; x_2; \frac{9}{7} + x_2; \frac{1}{7} \right);$$

1.96. $\left(-\frac{5}{17}; \frac{23}{17}\right)$; **1.97.** система несумісна; **1.98.** система несумісна; **1.99.**

$\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5; -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4; 0; 0; 0\right)$; **1.100.** $(1; -1)$; **1.102.** $\left(\frac{30}{41}; -\frac{53}{41}; -\frac{5}{41}\right)$.

РОЗДІЛ 2:

2.1. $\{-3; -11; 6\}$; **2.2.** $\{10; -13; 21\}$, $\sqrt{734}$; **2.3.** можуть; **2.4.** $(4; 1; 1)$; **2.5.**

$\{-5; 0\}$; **2.6.** $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}$; **2.7.** $\sqrt{13+\sqrt{3}}$, $\sqrt{13-\sqrt{3}}$; **2.8.** 7, $\sqrt{51}$; **2.9.** 20;

2.10. 13; **2.11.** $\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{DA} = \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{2}$; **2.14.**

$np_a \vec{b} = \frac{20}{3}$, $np_b \vec{a} = \frac{20}{7}$; **2.16.** -4; **2.18.** $|\vec{a}| = 70$; **2.21.** $\{-1; -2; -4\}$; **2.22.** $\{2; 0; -1\}$;

2.23. $\{3; 1; -1\}$; **2.24.** $\{4; 2; 1\}$; **2.25.** $\{1; 1; 1\}$; **2.26.** -4; -2; 6; 10; **2.27.** $2\sqrt{2}$; **2.28.**

-4; **2.29.** 9; **2.30.** 60° ; **2.31.** $\arccos \frac{17}{50}$; **2.32.** $\arccos -\frac{7\sqrt{3}}{27}$; **2.33.** 9; **2.34.** 6; **2.35.** -2;

2.36. $\frac{13}{3}$; **2.38.** $(-2 \quad -6 \quad -8)$; **2.39.** $\frac{26}{6}$; **2.41.** не компланарні; **2.42.** компланар-

ні.

ЗМІСТ

Розділ I. Тема: Елементи лінійної алгебри

1. Матриці та дії над ними
2. Визначники. Властивості визначників
3. Мінори. Алгебраїчні доповнення
4. Ранг матриці
5. Обернена матриця
6. Системи лінійних рівнянь
7. Прямокутні системи
8. Лінійні економічні моделі

Питання для самоперевірки

Розділ II. Тема: Елементи векторної алгебри

1. Основні поняття
2. Проекція вектора на вісь
3. Перехід від одного базису до іншого
4. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

Питання для самоперевірки

Список рекомендованої літератури:

1. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. – Біла Церква, 2005.
2. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика, ч. I. – К., 2001.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Физматгиз, 1959.
4. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Физматгиз, 1963.
5. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. – К., 1999.
6. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. – М.: Физматгиз, 1972.
7. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1986.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Елементи вищої алгебри (навчально-методичний посібник для самостійного вивчення за кредитно-модульною технологією навчання для студентів економічного факультету)

Шевченко Р. Л.
Мельниченко О. П.

Редактор
Комп'ютерна верстка

Здано до складання . Підписано до друку
Формату $60 \times 84 \frac{1}{16}$ Ум. друк. арк. Тираж 200 Зам. ціна
РВІХВ, Сектор оперативної поліграфії БНАУ
09117 Біла Церква, Соборна пл., 8, тел. 33-11-01