

РОЗДІЛ 5

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

5.1. Математичні моделі для аналізу військових та кризових ситуацій

© Бондар О. С.

канд. екон. наук, доц.,

Білоцерківський національний аграрний університет,

м. Біла Церква, Україна

ORCID ID: 0000-0002-2593-2301

© Ткаченко О. В.

канд. пед. наук,

Білоцерківський національний аграрний університет,

м. Біла Церква, Україна

ORCID ID: 0000-0002-2593-2301

Математичні моделі військових та кризових ситуацій враховують, що конфлікт є частиною усього людського минулого, суперечок між державами, між суб'єктами з надзвичайно різними впливами на суспільство, економіку, культуру та навколишнє середовище, а також можуть надати прогноз економічних і політичних наслідків.

Характерною рисою європейської військової історії від раннього середньовіччя до теперішніх часів є безперервне зростання цін на створення військової могутності. Однією з умов для цього було реформування відкритої військової економіки, ресурси якої не можуть бути вичерпані. Враховуючи економічне розташування, учасники бойових дій за різними каналами налагоджують зв'язки з процвітаючими економічними центрами і необмеженим використанням своїх ресурсів. Тому їх сили не послабляються під час війни, отже, відсутня необхідність укласти мирний договір. Класична територіальна держава переважно базувалася на закритій системі воєнної економіки, що включала податкові надходження, мобілізовану армію, військову промисловість, розміщену в її межах, толерантність і самопожертву населення. Коли всі ці ресурси були вичерпані і можливості їх відновити не було, війна закінчилася. У класичних війнах поряд з військовою перемогою над збройними силами противника важливу роль відіграє економічне виснаження ресурсів противника: «обезкровлення» його військової економіки. Морські держави найчастіше використовували блокаду як засіб боротьби з материковими державами з метою паралізувати ворожу воєнну економіку, знищити її та виграти війну. Передові країни світу витрачають значні фінансові ресурси на розробку технічних рішень, використовуючи математичні моделі і аналіз дослідження операцій. Моделі воєн і військових кампаній враховують людські, моральні, політичні, технологічні, економічні та інші фактори.

У математичному моделюванні можливі різні концепції побудови моделей, які характеризуються новаторськими ідеями. Розроблено велику кількість математичних моделей різних за структурою і змістом. Незважаючи на множинність поглядів на методи моделювання, математичні моделі мають деякі схожі риси, що дозволяють об'єднати їх в окремі класи.

Існуюча класифікація математичних моделей військових та кризових ситуацій враховує такі особливості: спрямованість на мету; спосіб опису функціональних зв'язків; характер залежностей у цільовій функції та обмеженнях; фактор часу; спосіб врахування випадкових факторів. Хоча ця класифікація умовна і відносна, вона все ж дозволяє привести знання з моделювання в певну систему, порівняти моделі, а також розробити перспективні напрямки їх розвитку.

При застосуванні теорії прийняття рішень у військовій справі особливий інтерес представляє теорія ігор, яка вивчає математичні методи аналізу конфліктних ситуацій, що виникають між ворогуючими сторонами. Кожна з цих сторін переслідує протилежні цілі і вибирає той або інший спосіб дій для досягнення своєї мети. Однак результат дій однієї зі сторін залежить не тільки від цих дій, але і від дій, обраних опонентами. Тобто результат конфліктної ситуації – це функція вибору способів дій всіх сторін, що беруть участь в даній конфліктній ситуації.

Теорія ігор була створений для опису конфлікту в термінах математичної моделі. Завдання теорії ігор полягає у встановленні тих способів дій, які дають найбільшу вигоду для кожного з супротивників на основі використання своїх можливостей і ресурсів. Гравцеві доступний певний набір стратегій. Учасник обирає поведінку в залежності від можливих ходів суперника, які в свою чергу теж певним чином впливають на ситуацію. Теорія ігор полягає не лише в максимізації власної вигоди, а в знаходженні компромісу.

Теорія ігор використовується в економіці, в комп'ютерних іграх, шахах, міжнародних відносинах, історії та у дослідженні інших галузей. Біологи з 1970 р. проводять дослідження теорії еволюції з використанням математичних методів теорії ігор. За допомогою математичних ігрових моделей вивчають поведінку тварин. Також цей розділ математики широко застосовується в галузях кібернетики. Особлива увага приділяється вивченню штучного інтелекту.

Для військових особливо важлива інформація, яка надає їм максимум користі. Теорія прийняття рішень допомагає вибирати правильні стратегії та керувати ними в різних конфліктних ситуаціях. Теорія ігор займається військовими проблемами, шукаючи оптимальні стратегії вирішення заданих проблем для всіх гравців.

Війна з погляду математики – це хаос. Хаос має два порядки. Якщо дивитися на війну, як на зіткнення двох армій – то це хаос першого порядку. А якщо розглядати війну як військово-політичний конфлікт, то це хаос другого порядку.

Хаос першого порядку не змінює своєї поведінки при побудові прогнозової моделі. Хаос другого порядку змінює свою поведінку в процесі прогнозування під впливом попередніх даних прогнозу. Наприклад, погода є хаосом першого порядку. Від того, що ми намагатимемося її передбачити, погода не змінюється. В економіці та політиці все працює по-іншому. Там також хаос, але другого порядку.

В чистій війні, в хаосі першого порядку, коли армія воює проти іншої армії, попередній прогноз не впливає на хід війни, не змінює його. Коли ми говоримо про військово-політичне протистояння (те, що зараз між Росією та Україною), де передбачені мирні переговори, економічні санкції, поставки озброєння (а не лише зброя проти зброї), то значить, що попередній прогноз може вплинути на поведінку деяких людей. А це у свою чергу – на перебіг війни як військово-політичного конфлікту.

В дослідженні військових операцій і моделюванні бойових дій застосовують математичні моделі з метою аналізу різноманітних військових конфліктів і для отримання інформації про ці явища. Моделювання бойових дій почалося під час Першої світової війни (Осипов, 1915 р.; Ланчестер, 1916 р.). Однією з найперших і найважливіших моделей, що використовуються для моделювання бойових дій, є рівняння Ланчестера. Застарілі рівняння Ланчестера моделюють взаємну динаміку виснаження двох протиборчих збройних сил і дають певні передбачення стосовно результату таких боїв [5, с. 2 – 5; 3, с. с. 14 – 16; 2, с. 68 – 71].

Існує два основних види рівнянь Ланчестера – детерміновані та стохастичні. Рівняння Ланчестера – це системи звичайних диференціальних рівнянь, що описують взаємне виснаження, яке відбувається безперервно в часі між двома протиборчими силами, що беруть участь у жорсткому протистоянні. Рівняння включають змінні стану, які представляють кількість живих бійців (або наявної зброї) у будь-який момент бою. Кожне рівняння виражає швидкість зміни однієї змінної стану як функції від інших змінних стану. Рівняння Ланчестера та їх варіації були реалізовані у великомасштабних моделях бойових дій [6, с. 65 – 69] і використовувалися військовими аналітиками та планувальниками бойових операцій та для вивчення структури сил і напрямів бойових дій.

У найпростішій моделі війни між двома супротивниками (двома арміями) – моделі Ланкастера – стан системи описується точкою $(x \geq 0; y \geq 0)$. Координати цієї точки, x і y , є чисельністю протиборчих армій. Модель виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} x' = -by \\ y' = -ax \end{cases} \quad (1)$$

де a – сила зброї армії x , а b – сила зброї армії y .

Тобто передбачається, що кожен солдат армії x вбиває в одиницю часу a солдатів армії y (і, відповідно, кожен солдат армії y вбиває в одиницю часу b солдатів армії x). В рівняннях (1) ми маємо похідну від часу t , тобто швидкість зміни значення.

Це жорстка модель, яка дозволяє знайти точне рішення:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{ax}, \quad ax \cdot dx = by \cdot dy, \quad ax^2 - by^2 = \text{const} \quad (2)$$

Еволюція чисельності армій x і y відбувається по гіперболі, яка задана рівнянням (2) (рис. 1). На яку гіперболу піде війна, залежить від точки відліку.

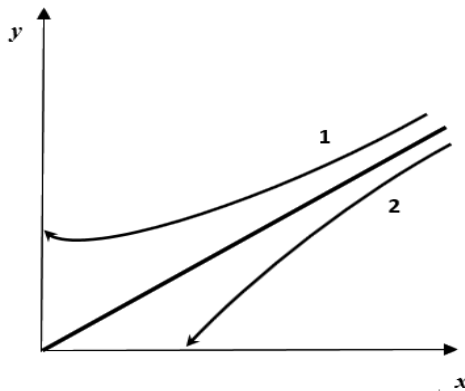


Рис. 1. Еволюція чисельності армій x і y

Ці гіперболи розділені прямою лінією $\sqrt{ax} = \sqrt{by}$. Якщо вихідна точка лежить вище цієї лінії (випадок 1 на рис. 1), то гіпербола переходить до осі y . Це означає, що під час війни кількість армії x зменшується до нуля (в кінцевому часі). Армія y перемагає, ворог знищується.

Якщо точка відліку лежить нижче (випадок 2), то армія y виграє. Ці випадки розділяє пряма лінія – війна закінчується задоволенням всіх і винищенням обох армій. Але це займає нескінченно багато часу: конфлікт продовжує тріти, коли обидва супротивника вже виснажені.

Висновок моделі такий: щоб розправитися з удвічі більшою кількістю супротивників, потрібно в чотири рази більше потужної зброї, при цьому, якщо армія супротивника в три рази більше – в дев'ять разів більше повинно бути озброєння і т.д. (на це вказують квадратні корені в рівнянні).

Ланкастерську модель можна застосовувати у маркетинговій діяльності підприємств, що дозволяє розглянути особливості визначення компанією характеристик продукції. У зв'язку з цим під товаром в рамках даної моделі розуміється сукупність споживчих характеристик. Відповідно до такого підходу споживач купує на ринку не товар як такий, а сукупність втілених в ньому споживчих характеристик [4, с. 951 – 952].

Модель Ланкастера, як і інші моделі горизонтальної диференціації продукції, показує взаємозв'язок між ціноюю і неціноюю конкуренцією між підприємствами. Ефективність цінової конкуренції тим вище, чим досконаліше можливості заміни характеристик, що містяться в товарі, для споживача, і навпаки. Навіть сувора прихильність до бренду не виключає успішної цінової конкуренції. Ланкастерська модель може служити методологічною основою для формування цінової політики підприємства на ринку диференційованого товару з урахуванням цілей, які воно перед собою ставить.

Існує багато визначень гонки озброєнь. Її можна розглядати як тривале суперництво між парами ворогуючих держав, яке спонукає до конкурентного здобуття військового потенціалу. Два підходи до моделювання гонки озброєнь були особливо впливовими. Один з них – це гра

з двома особами, зокрема дилема ув'язненого, де відбувається вибір – озброїти чи не озброїти, а домінуюча стратегія – озброїти обох не є оптимальною за Парето. Інший підхід – це модель Річардсона про гонку озброєнь як процесу дії і реакції, що представлений парою диференціальних рівнянь [6, с. 82 – 84].

Модель Льюїса Фрая Річардсона була першим досвідом застосування динамічного моделювання у сфері міжнародних відносин. Він застосував її для опису гонки озброєнь між Австро-Угорщиною та Німеччиною з одного боку, і Росією та Францією – з іншого, у період 1909 – 1913 рр. Дослідивши десятки складних математичних формул і розрахунків, Річардсон зупинився на відносно простій моделі, яка враховує дію всього трьох факторів [1, с. 33 – 38].

Перший фактор в математичній моделі гонки озброєнь Річардсона полягає в тому, що держава Х відчуває, що існує військова загроза з боку противника, держави Y. Чим більше зброї у Y, тим більше зброї X захоче придбати у відповідь на передбачувану загрозу. Однак при цьому держава X змушена вирішувати нагальні соціальні проблеми, і не може перевести всю свою економіку на рейки військового виробництва.

Отже, чим більше зброї має X, тим менше додаткової зброї вона зможе придбати через існуючий тягар витрат. І, нарешті, згідно з міркуваннями Річардсона, є минулі образи і стани держави, які впливають на загальний рівень озброєності. Логіка, яка застосовується до стану X, застосовується і до стану Y, для якого складається аналогічне рівняння. З математичної точки зору все це міркування зводиться до двох рівнянь:

Проаналізувавши характер гонки озброєнь за допомогою моделі Річардсона, можна зробити досить точний прогноз подальшого розвитку ситуації. Річардсон справедливо припустив, що сучасним війнам (в тому числі і Першій світовій) передують гонка озброєнь, тому він звернувся до розгляду цього явища, щоб зрозуміти, як і яка гонка озброєнь викликає виникнення війни.

Триває російсько-українська війна, війна між Росією (разом з проросійськими сепаратистськими силами) та Україною, яка розпочалася в лютому 2014 р. після української Революції Гідності та спочатку була зосереджена на статусі Криму та частини Донбасу, міжнародно визнаних частиною України. Перші вісім років конфлікту включали російську анексію Криму (2014 р.) та військові дії на Донбасі між Україною та сепаратистами, яких підтримує Росія, а також морські інциденти, кібервійну та політичну напруженість. Після нарощування російської армії на російсько-українському кордоні з кінця 2021 р. конфлікт значно розширився. Коли Росія розпочала повномасштабне вторгнення в Україну 24 лютого 2022 р. На рис. 2 представлено людський ресурсний потенціал Росії, Білорусі та України на початок війни 24.02.2022 р. Кількість людей, придатних до військової служби в Україні на 66% (30847216 чоловік) менша, ніж в Росії. На рис. 3 показано загальну у кількість озброєння Росії та України на початок війни 24.02.2022 р.

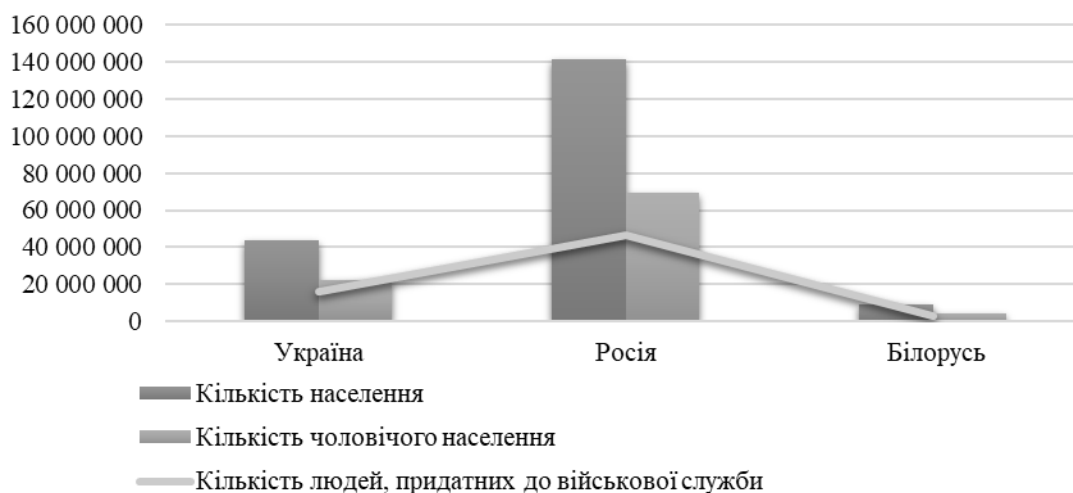


Рис. 2. Людські ресурси України, Росії і Білорусі на початок війни 24.02.2022 р.

Джерело: розроблено авторами

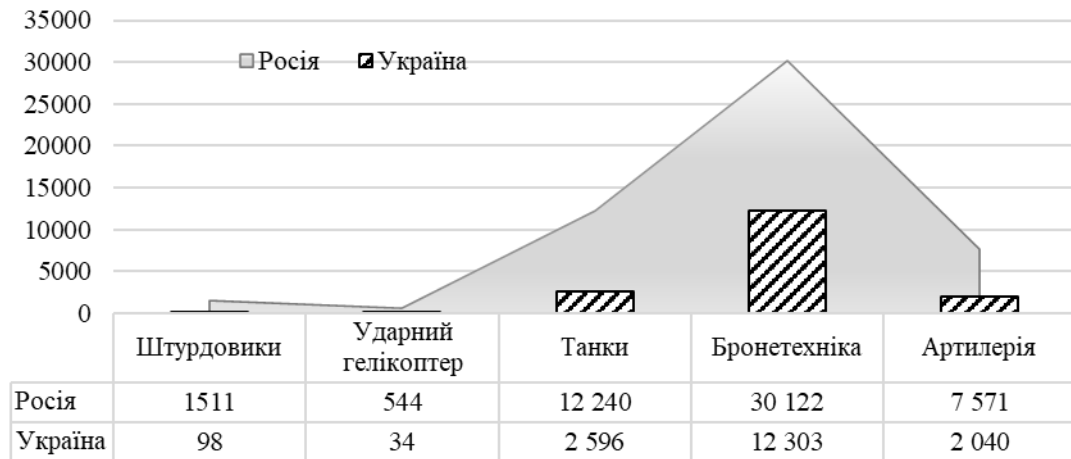


Рис. 3. Загальна у кількість озброєння Росії та України на початок війни 24.02.2022 р.
Джерело: розроблено авторами

Основними змінними моделі можуть бути власне кількості озброєнь або військові бюджети (військові витрати) суперників [7, с. 950 – 952].

В основу моделі були покладені такі міркування:

а) швидкість зростання військових витрат пропорційна рівню військових витрат противника;

б) економічні обмеження призводять до зменшення швидкості зростання військових витрат пропорційно до їх розмірів;

с) держава прагне збільшити свій військовий бюджет, навіть за умов відсутності зовнішньої загрози.

Математично цю ситуацію можна змодельовати таким чином. Позначимо військові витрати держав, що суперничають, через x і y , а швидкості їх зростання: dx/dt , dy/dt .

Тоді найпростішу модель гонки озброєнь можна сформулювати як систему двох лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами: де a і b – додатні константи. Ці рівняння описують позитивний зворотний зв'язок. Модель (1) має очевидний недолік: зростання витрат на озброєння нічим не обмежений. Природно припустити, що чим більше поточний рівень:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ay \\ \frac{dy}{dt} &= bx\end{aligned}\tag{3}$$

де a і b – додатні константи.

Ці рівняння описують позитивний зворотний зв'язок. Модель (3) має очевидний недолік: зростання витрат на озброєння нічим не обмежене. Природно припустити, що чим більше поточний рівень витрат на оборону, тим менші темпи її зростання (негативний зворотний зв'язок). Отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ay - tx \\ \frac{dy}{dt} &= bx - ny\end{aligned}\tag{4}$$

де a , b , m , n – додатні константи.

Розглянемо третій постулат, включений Л. Річардсоном в модель: держава нарощує зброю, керуючись своїми державними претензіями і ворожістю до інших держав, навіть якщо іншим країнам не загрожує існування цієї держави. Позначимо відповідні коефіцієнти претензії з r і s ($r > 0$ і $s > 0$). Отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ay - mx + r \\ \frac{dy}{dt} &= bx - ny + s\end{aligned}\tag{5}$$

Розв'язками системи (5) є функції $x(t)$ і $y(t)$, визначені для заданих початкових умов x_0, y_0 (початковий стан гонки озброєнь).

Очевидно, що поведінка моделі Річардсона залежить від співвідношення коефіцієнтів a, b, m, n і знаків r, s . Можливих випадків чотири:

Якщо $mn - ab > 0, r > 0, s > 0$, то є точка рівноваги.

Якщо $mn - ab < 0, r > 0, s > 0$, то логіка моделі призводить до необмеженої ескалації гонки озброєнь.

Якщо $mn - ab > 0, r < 0, s < 0$, гарантується повне взаємне роззброєння.

Якщо $mn - ab < 0, r < 0, s < 0$, то песимістичність або оптимістичність прогнозу істотно залежить від початкового стану.

Ця модель може передбачати війни лише тоді, коли їм передує гонка озброєнь, але для початку, наприклад, ядерної війни між державами гонка озброєнь не потрібна: ракети з ядерним наконечником з ядерно-озброєних держав вже існують, а їх потужності вистачить, щоб знищити все населення Землі. З іншого боку, такий підхід створює підґрунтя для еволюції співробітництва та формування коаліцій [5, с. 13 – 15].

Аналіз військових і конфліктних ситуацій важко здійснювати через його невизначеність у законах, логіці та прогнозах. Алгоритм мислення диференціальних ігор відрізняється від рішень задач у фізичних науках. Щоб отримати детальну реалістичну картину того, що відбувається, гра повторюється багато разів. У кращому випадку результати підтверджують висновки теорії, яка була виведена зі спрощеної моделі. Метою експериментів є підтвердження теорій або пошук альтернативних методів аналізу.

Диференціальні ігри у військовій справі не потребують коментарів, оскільки вони чітко помітні й займають чільне місце в моделях, де основна увага приділяється маневру; дії, пов'язані зі злочином і відступом, а також інші завдання, де потрібно маневрувати.

У конфліктних ситуаціях вороги часто стають союзниками, що корисно для вивчення коаліційних ігор. Ідеальних ситуацій без проблем не буває, тому одним із шляхів вирішення задач диференціальних ігор є невизначеність.

В менеджменті теорія ігор вирішує проблеми з вибором проведення оптимальної цінової політики, та часом, коли краще виходити на нові ринки. Ігрові моделі допомагають визначити, кого призначити виконавцем, а кого лідером у сфері інновацій. Теорія ігор вступає в дію, коли на рішення впливають інші учасники: колеги по роботі, постачальники, важливі клієнти тощо.

Цікавий і корисний кейс зіткнення інтересів двох конкурентів – IBM і Telex. Керівництво IBM намагалося використовувати теорію ігор, щоб запобігти можливості конкуренту Telex вийти на новий ринок. Аналіз показав, що IBM нема про що хвилюватися: великих витрат не потрібно планувати. Компанія, яка перебуває в програшній позиції, може вирішити не долати ринкові орієнтири, якщо розрахунки передбачають сценарій, за яким велика компанія може агресивно протистояти, коли їй намагаються перешкодити. У будь-якому випадку аналізувати поведінку конкурента корисно і цікаво.

Рішення та взаємодія формуються різними суб'єктами та основі факторів, які можуть спровокувати нестабільність, швидко мінливі умови безпеки та спалах насильства, ускладнюючи вирішення конфліктів. Для безпеки актуальні не тільки арсенали озброєнь, а й економічні та технологічні взаємозв'язки, а також соціальні та екологічні чинники на глобальному та регіональному рівнях. Безпека та стійкість все більше пов'язані між собою. Розуміння виникнення колективної поведінки та еволюції кооперації є динамічним полем сучасних міждисциплінарних досліджень, і передача знань між природничими та соціальними науками може бути дуже плідною. Математичне моделювання та його комп'ютерне впровадження можуть сприяти глибшому розумінню та розробці нових інструментів врегулювання конфліктів та співробітництва, роззброєння, безпеки та розбудови миру.

Математична модель – це спрощений варіант дійсності, що складається з математичних виразів і використовується для проведення експериментів з нею. Математичні моделі допомагають економістам, військовим та політологам з більшою легкістю вивчати особливості військових та кризових ситуацій, адже з моделлю можна експериментувати, тоді як з реальними процесами, з моральних міркувань, цього робити не можна.

5.2. Підкритерії паретівської згортки критеріїв

© Червак-Смерічко О. Ю.

канд. фіз.-мат. наук, доц.,

ДВНЗ «Ужгородський національний університет», м. Ужгород, Україна

ORCID ID: 0000-0001-6891-7307

Однією з основних операцій цілеспрямованої діяльності є вибір. Майже кожна складна практична задача вибору є багатокритеріальною. Але, так як альтернатива, оптимальна за кожним з багатьох критеріїв, існує дуже рідко, то ці критерії, як правило, «згортаються» в один єдиний критерій за допомогою тих чи інших умов узгодження. Різні такі умови визначають й різні згортки критеріїв, отже, вони визначають й різні задачі багатокритеріальної оптимізації.

Дуже часто використовуються скалярні й векторні згортки багатьох критеріїв. Однією з найбільш поширених векторних згорток критеріїв є паретівська згортка, в якій всі критерії вважаються попарно рівноважливими при оцінці альтернатив.

Метою роботи є розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, в яких критерії порівнюються попарно за важливістю. Для цього, кожна з таких задач формулюється як задача з векторним критерієм, значення якого відповідно впорядковується.

Для впорядкування задач вибору на одній і тій же допустимій множині альтернатив введені поняття надкритерію та підкритерію будь-якого критерію. Якщо критерій є надкритерієм даного критерію на цій множині, то останній критерій є підкритерієм першого. За умови попарної рівної важливості багатьох критеріїв, запропоновані згортки, відмінні від паретівської, які є підкритеріями останньої (число різних цих підкритеріїв рівне числу заданих критеріїв).

Розглядається вибір на допустимій множині X з критеріями c_j , $j=1,2,...,k$, за умовою їх попарної рівної важливості при оцінці альтернатив. Зазначимо, що альтернатива $x_*(P) \in X$ вважається оптимальною в паретівській згортці цих критеріїв, якщо і тільки якщо не існує така допустима альтернатива $x \in X$, яка була б *негіршою* за $x_*(P)$ по кожному з критеріїв і *кращою* за неї хоча б за одним з цих критеріїв.

В умовах попарної рівної важливості критеріїв c_j , $j=1,2,...,k$ можуть бути й інші оптимальності альтернатив, відмінні від оптимальності в паретівській згортці. В подальшому, паретівську згортку критеріїв c_j , $j=1,2,...,k$ будемо позначати через P_1 ($P \equiv P_1$), а відповідну оптимальну альтернативу через $x_*(P_1)$. Тут ми будемо розглядати згортки, які позначатимемо через $P_2, P_3, ..., P_s, ..., P_k$; відповідні оптимальні альтернативи позначатимемо $x_*(P_2), x_*(P_3), ..., x_*(P_s), ..., x_*(P_k)$. В кожній з цих згорток, як і в згортці P_1 , альтернативи $x, y \in X$ будемо вважати *рівноцінними*, якщо і тільки якщо вони *рівноцінні* за кожним з критеріїв c_j , $j=1,2,...,k$, тобто, якщо вони *рівноцінні* і в згортці P_1 . Множину оптимальних альтернатив в згортці P_s позначатимемо через $X_*(P_s)$.

Отже, розглядувані згортки відрізнятимуться одна від одної тільки правилами віддачі переваги. Так, альтернатива x вважається *кращою* за альтернативу y в згортці P_2 , якщо і тільки якщо x *негірша* за y кожним з критеріїв c_j , $j=1,2,...,k$ і є *кращою* за неї хоча б за