МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА

ДРОЗДЕНКО Віталій Олександрович

УДК 519.24:62-50

МЕТОДИ ПІДРАХУНКУ ВАРТОСТІ СТРАХОВИХ КОНТРАКТІВ ПРИ ВІДОМИХ РОЗПОДІЛАХ ЗБИТКІВ

01.05.02— математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЧЕРНІВЦІ – 2015

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова.

Науковій керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Працьовитий Микола Вікторович,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,
директор фізико-математичного інституту, завідувач кафедри вищої математики

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Ясинський Володимир Кирилович,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
завідувач кафедри системного аналізу і страхової та фінансової математики

кандидат фізико-математичних наук
Самойленко Ігор Валерійович,
Київський Національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач науково-дослідної лабораторії «Ймовірнісно-статис–тичних методів» факультету кібернетики

Захист відбудеться 20 лютого 2015 року о 15 год. 30 хв. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 76.051.02 при Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича за адресою: м. Чернівці, вул. Коцюбинського 2.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (м. Чернівці, вул. Лесі Українки 23).

Автореферат розіслано „   “ січня 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради   Бігун Я.Й.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Страхування є важливою складовою нашого повсякденного життя. Люди купують поліси страхування життя, страхування автотранспорту, страхування споруд та приміщень тощо у випадках, коли вони погоджуються платити відносно малу фіксовану ціну за захист від випадкових досить значних фінансових та матеріальних втрат, спричинених природними факторами, а також діями третіх осіб.

Деякі форми страхування відомі ще з античних часів. Сюди слід віднести випадки взаємодопомоги при використанні ресурсів усієї громади для підтримки окремих постраждалих осіб. Так, скажімо, селяни могли допомогти односельцю відновити поголів'я померлої внаслідок хвороб худоби, розраховуючи при цьому на подібну допомогу у випадках, коли вони теж її потребуватимуть.

Історично першою страховою компанією вважається лондонська кав'ярня, власником якої був Edward Lloyd. Кав'ярню відвідували заможні купці та кораблевласники, які з 1688-го року почали підписувати в ній договори взаємодопомоги на випадок втрати торгових кораблів. Так виникла нині добре відома страхова компанія Lloyd's of London.

Страховий бізнес – це бізнес, що базується на невизначеності майбутнього. Організація такого бізнесу вимагає серйозних математичних знань та навиків. Частина математики, яка слугує таким цілям, називається актуарною математикою. 1693-й рік можна вважати роком народження актуарної математики як наукової дисципліни. Саме в цьому році англійський вчений Edmond Halley (той самий, в честь якого названа комета Галея) створив першу в історії таблицю смертності і тим самим заклав основу розвитку теорії страхування життя.

В дев’ятнадцятому столітті в царській Росії виникло досить багато страхових товариств. Разом з цим з'явилися вчені–математики, які на науковому рівні займалися питаннями страхування і розв'язуванням економічних та демографічних задач. Серед таких вчених варто згадати С.Є. Савіча, А.А. Маркова, Є.Є. Слуцького, Д.О. Граве, М.В. Остроградського та В.Я. Буняковського.

Не дивлячись на досить вдалий старт, актуарні моделі були повністю позбавлені наукової уваги та майже не розвивалися в нашій країні протягом радянського періоду. Це було зумовлено, зокрема, ідеологією країни та державною монополією на страховому ринку. Ситуація почала змінюватися лише після розпаду радянської системи та з появою приватних і акціонерних страхових компаній. Зрозуміло, що за таких обставин вітчизняні актуарна наука та освіта дуже відстали від західних. Варто згадати, що перший україномовний підручник, один з розділів якого був присвячений актуарній математиці, з’явився лише в 1995-му році.

Ситуація значно покращилася завдяки проведенню цілого ряду українсько-скандинавських конференцій з актуарної математики та математичної економіки протягом останніх двох десятиліть. Завдяки цьому, в Україні з’явилося досить багато вчених, які на науковому рівні почали займатися колективними моделями страхування, як то класична модель ризику та її численні узагальнення.

Колективні моделі описують діяльність страхових компаній при одночасному розгляді тисяч контрактів. При цьому, як правило, досліджуються питання, пов'язані з ймовірністю банкрутства страхової компанії.

На відміну від колективних, індивідуальні моделі аналізують діяльність страхової компанії, відштовхуючись від конкретного клієнта. Використовуючи індивідуальні моделі, встановлюють, зокрема, вартість страхового контракту для клієнта із певним набором особистих характеристик. Тобто, з точки зору практичних застосувань, індивідуальні моделі ризику є не менш важливі, ніж колективні, проте, до цього часу українські вчені приділяли їм досить мало уваги.

Однією з цілей написання даної дисертації є привернення уваги української наукової спільноти саме до індивідуальних моделей ризику, а також спонукання їх розвитку в Україні.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в рамках програми розвитку викладання математико-економічних дисциплін Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (м. Київ). Дослідження здійснювалось в рамках науково-дослідних тем:

- «Фрактальний аналіз математичних об’єктів зі складною локальною будовою» (номер державної реєстрації 0107U000583);
- «Фрактальний аналіз неперервних функцій і мір» (номер державної реєстрації 0111U000053);

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є побудова та аналіз можливих методів підрахунку вартості страхових контрактів у випадку відомих розподілів страхових компенсацій. Для досягнення поставленої мети в дисертаційній роботі розв’язані наступні задачі:

- проведено класифікацію принципів підрахунку страхових контрактів;
- зроблено аналіз адекватності принципів підрахунку контрактів реальній ситуації роботи страхової компанії;
- вивчено та проаналізовано з точки зору страховика та клієнта властивості принципів підрахунку контрактів;
- отримано ряд характеризаційних теорем для принципів підрахунку контрактів, що базуються на допоміжних функціях;
- створено програмний продукт, що дає можливість підрахунку вартості страхових контрактів.

Об'єкт дослідження − принципи підрахунку вартості страхових контрактів при відомих розподілах збитків.

Предмет дослідження − бажані корисні властивості, якими можуть володіти або не володіти, методи (принципи) підрахунку вартості страхових контрактів.

Методи дослідження − методи математичного моделювання, теоретико-ймовірнісні методи, методи якісної теорії диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації вперше одержані такі результати:

- розроблено підхід, за допомогою якого проведена класифікація принципів підрахунку страхових контрактів;

 зроблена оцінка корисності контрактів як з точки зору страховика так і клієнта;

 отримано повний спектр характеризаційних теорем для методу середнього значення, методів еквівалентної та нульової корисності страховика та методів еквівалентної та нульової корисності клієнта;

 досліджена гранична поведінка страхових премій, як функцій параметрів ризику;

 доведена властивість монотонності параметричних методів страхового оцінювання, як функцій від параметрів ризику;

 для найбільш поширених страхових контрактів створена програма для обчислення їх вартостей.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має чітко виражений практичний зміст. Отримані в ній результати можуть використовуватися співробітниками страхових, банківських, інвестиційних та пенсійних установ при застосуванні механізмів страхового захисту. Матеріали дисертації також можуть бути включені до фінансово-математичних освітніх програм підготовки актуаріїв та фінансових аналітиків.

Особистий внесок здобувача. Усі представлені в дисертації результати отримані автором самостійно. У спільних із науковим керівником роботах, керівнику належить постановка розглянутих задач, обговорення та перевірка отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на:

 Другій міжвузівській конференції студентів та аспірантів (Київ, 2011-й рік);

 XVI-й Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 2012-й рік);

 Третій міжнародній конференції „Сучасна стохастика: теорія та застосування“, присвяченій 100-річчю від дня народження Бориса Гнеденка та 80-ти річчю від дня народження Михайла Ядренка (Київ, 2012-й рік);

 Міжнародній конференції „Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь“, присвяченій 80-ти річчю від дня народження Миколи Шкіля (Київ, 2012-й рік);

 Всеукраїнській науковій конференції „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“ (Ворохта, 2013-й рік);

 Третій міжвузівській конференції студентів та аспірантів (Київ, 2013-й рік);

 конференції Боголюбовські читання DIF – 2013 „Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування“ присвяченій 75-ти річчю від дня народження Анатолія Самойленка (Севастополь, 2013-й рік);

 П’ятій міжнародній конференції з аналітичної теорії чисел і просторових мозаїк, присвяченій пам’яті Георгія Вороного (Київ, 2013-й рік);

 науковому семінарі фізико–математичного інституту Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (20 березня 2014 р., керівник семінару д.ф.-м.н., проф. М.В. Працьовитий);

 науковому семінарі „Стохастичні диференціальні рівняння“ при кафедрі загальної математики механіко – математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (16 квітня 2014 р., керівники семінару д.ф.-м.н., проф. Г.Л. Кулініч та д.ф.-м.н., проф. О.М. Станжицький);

 науковому семінарі „Системний аналіз і теорія оптимальних рішень“ факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (22 жовтня 2014 р., керівник семінару д.ф.-м.н., проф. О.Г. Наконечний);

 науковому семінарі кафедри прикладної математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (6 листопада 2014 р., керівник семінару д.ф.-м.н., проф. І.М.Черевко).

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано тринадцять праць: з них дві статті [1] та [4] в наукових фахових виданнях, затверджених МОН України, три статті [2], [3] та [5] у зарубіжних науково-періодичних виданнях та вісім тез у матеріалах конференцій.

Структура та об’єм дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, двох додатків, висновків та списку використаних джерел, що містить 120 найменувань. Повний обсяг роботи складає 214 сторінок, з них список використаних джерел складає 12 сторінок, а додатки − 50 сторінок. Основний зміст роботи складає 149 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** викладено загальні відомості про тематику та предмет дослідження, обґрунтовано їх важливість та актуальність. Вказано мету роботи та основні задачі дослідження, методи, за допомогою яких реалізується поставлена мета. Окреслено можливі теоретичні і практичні застосування отриманих результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, апробацію отриманих результатів, стисло викладено опис основних результатів дисертації.

У **першому розділі** проведено оглядовий аналіз вітчизняної та зарубіжної літератури з математики страхування.

У першій частині **другого розділу** здійснено оглядовий аналіз колективних моделей діяльності страхової компанії як то класична модель ризику та її численні узагальнення. Крім класичної моделі описується збурена модель ризику, модель Спаре Андерсена, модель з випадковими преміями, дискретні моделі, а також дані посилання на літературу де можна знайти інформацію про інші колективні моделі ризику.

Класична модель ризику задається наступним чином

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N_\lambda(t)} Z_k, \quad t \ge 0,$$

де: u − початковий капітал страхової компанії; $c > 0$ − інтенсивність надходження страхових внесків за одиницю часу; потік заявок на виплати моделюється пуасонівським процесом $N_\lambda(t),\ \ t \ge 0,$ з інтенсивністю λ; послідовність додатних випадкових величин $Z_k,\ \ k = 1, 2, \cdots$ − послідовність заявок на виплати; процес $N_\lambda(t),$ $t \ge 0,$ та послідовність $Z_k,\ \ k = 1, 2, \cdots$ є незалежними по відношенню одне до одного.

Збурена модель ризику означається наступним чином

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N_\lambda(t)} Z_k + \beta W(t), \quad t \ge 0.$$

Основні елементи збуреного процесу ризику повністю повторюють класичний процес ризику, проте в даному випадку до процесу додається шумова компонента, яка моделюється за допомогою стандартного вінерівського процесу $W(t),\ t \ge 0,$ для якого приріст $W(t+h) - W(t)$ для $t, h \ge 0$ має нормальний розподіл з нульовим середнім та дисперсією $h.$ У даному випадку параметр $\beta > 0$ задає інтенсивність збурення.

Модель Спаре Андерсена. В моделі Спаре Андерсена (en: Sparre Andersen E.), заданій наступним чином

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{R(t)} Z_k, \quad t \ge 0,$$

на відміну від класичного процесу ризику, в якому потік заявок на виплати описується процесом Пуасона $N_\lambda(t),\ t \ge 0,$ відповідний потік описується процесом відновлення $R(t),\ t \ge 0.$

Моделі з випадковим потоком премій. В класичній моделі ризику потік премій моделювався детерміновано за допомогою лінійної функції. На практиці ж потік премій також є випадковим, що й призвело до виникнення наступної більш адекватної моделі ризику

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{N_\gamma(t)} P_i - \sum_{j=1}^{N_\lambda(t)} Z_j, \quad t \ge 0,$$

де u − початковий капітал компанії; потік премій моделюється пуасонівським процесом $N_\gamma(t),\ t \ge 0,$ а потік заявок на виплати − пуасонівським процесом $N_\lambda(t),$ $t \ge 0;$ послідовності додатних випадкових величин $P_i,\ i = 1, 2, \cdots,$ та $Z_i,\ i = 1, 2, \cdots,$ відображають послідовність премій та заявок на виплати відповідно; крім того вважається, що зазначені пуасонівські процеси, а також послідовності премій та виплат є взаємно незалежними.

Дискретні моделі. В дискретних моделях часова шкала як правило поділяється на інтервали послідовністю точок $T = \{t_1, t_2, t_3, \cdots\},$ після чого поведінка капіталу компанії аналізується в точках послідовності $T.$ Далі, для кожного $t_k \in T$ розглядається дискретний процес

$$U(t_k) = u + \sum_{i=1}^{k} (P_i + D_i - Z_i)$$

де u − початковий капітал компанії, а P_i та Z_i − відповідно страхові премії та заявки на виплати зібрані протягом часового інтервалу $[t_{i-1}, t_i),$ крім того $t_0 = 0,$ а послідовність D_i описує грошові потоки відмінні від премій та заявок на виплати такі як дивіденти, позики, інфляція, інвестиції тощо.

У другій частині **другого розділу** проводиться опис можливих методів підрахунку вартості страхових контрактів у випадку відомих розподілів збитків, а також здійснена їх класифікація у залежності від природи контрактів: найпростіші, параметричні, означені з використанням допоміжних функцій. Для параметричних методів здійснено аналіз властивості монотонності та досліджено асимптотичну поведінку для допустимих значень параметрів.

Страхову премію, тобто ту суму, яку клієнт, при укладанні страхової угоди, платить обраній страховій компанії для покриття ризику X, позначатимемо через $\pi[X]$. Здебільшого припускається, що випадкова величина X є невід’ємною, тобто, приймає значення нуль у випадку, коли угода не призводить до страхового випадку та не потребує страхових відшкодувань, і співпадає з розміром відшкодування у разі появи страхового випадку. Проте від’ємні значення випадкової величини X інколи допускаються та інтерпретуються, скажімо, як штрафні санкції за невиконання умов страхової угоди.

В дисертаційній роботі проведена наступна класифікація страхових премій за принципами оцінювання. До найпростіших принципів страхового оцінювання відноситься нетто принцип, принцип середнього значення, принцип дисперсії, принцип середньоквадратичного відхилення та принцип максимальних збитків.

Нетто премія означається як математичне сподівання розміру страхової виплати асоційованої з ризиком X, тобто,

$$\pi_{\text{íåòò}}[X] := \mathsf{E}[X].$$

Премія математичного сподівання, асоційована з ризиком X, означається наступним чином

$$\pi_{\text{ì.ñ.}(\alpha)}[X] := (1+\alpha)\mathsf{E}[X], \quad \text{äëÿ} \quad \alpha > 0.$$

Дисперсна премія для ризику X означається як

$$\pi_{\text{äèñï.}(\alpha)}[X] := \mathsf{E}[X] + \alpha \mathsf{Var}[X], \quad \text{äëÿ} \quad \alpha > 0.$$

У наших позначеннях, $\mathsf{Var}[X]$ – дисперсія випадкової величини X.

Премія середьоквадратичного відхилення для ризику Х означається як

$$\pi_{\text{ñ.ê.â.}(\alpha)}[X] := \mathsf{E}[X] + \alpha\sigma[X], \quad \text{äëÿ} \quad \alpha > 0.$$

У наших позначеннях $\sigma[X] := \sqrt{\mathsf{Var}[X]}$ – середньоквадратичне відхилення випадкової величини X.

Нагадаємо, що *істотний супремум* випадкової величини X з функцією розподілу $F_X(x)$ означається як

$$\text{ess sup}[X] := \sup\{\delta : F_X(\delta) < 1\}.$$

Премія максимальних збитків для ризику X означається наступним чином

$$\pi_{\text{ìàêñ.çá.}}[X] := \text{ess sup}[X].$$

Премія максимальних збитків виникає як: границя *експоненційної премії* при $\alpha \to +\infty$; границя *квантільної премії* при $\varepsilon \to 0_+$; границя *премії Есшера* при $\alpha \to +\infty$; границя *премії відрегульованої ризиком* при $\rho \to +\infty$.

Другий клас премій виникає при параметричних принципах оцінювання. До параметричних принципів ми відносимо експоненційний принцип, принцип Есшера, принцип відрегульований ризиком та квантільний принцип.

Експоненційна премія для ризику X означається як

$$\pi_{\text{åêñï.}(\alpha)}[X] := \frac{1}{\alpha}\log(\mathsf{E}[e^{\alpha X}]), \quad \text{äëÿ} \quad \alpha > 0.$$

Твердження 2.1. *Для будь-якого ризику X експоненційна премія є неспадною функцією параметра α.*

Теорема 2.1. *Якщо для ризику X існує $\varepsilon > 0$, таке, що $\mathsf{E}[|Xe^{\varepsilon X}|] < +\infty$, то*

$$\lim_{\alpha \to 0_+} \pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] = \pi_{\text{нетто}}[X].$$

Теорема 2.2. *Для будь-якого ризику X виконується граничне співвідношення*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] = \operatorname{ess\,sup}[\mathrm{X}].$$

Премія Есшера (en: Esscher premium) для ризику X означається як

$$\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] := \mathsf{E}[Xe^{\alpha X}] / \mathsf{E}[e^{\alpha X}], \quad \text{для} \quad \alpha \geq 0.$$

Премія Есшера − це не що інше, як математичне сподівання перетворення Есшера випадкової величини X, тобто математичне сподівання величини $Xe^{\alpha X} / \mathsf{E}[e^{\alpha X}]$. Враховуючи вищеописане, премія Есшера може вважатися нетто премією для трансформованого ризику, а саме, нетто премією для $X^T := Xe^{\alpha X} / \mathsf{E}[e^{\alpha X}]$.

Твердження 2.2. *Нехай для ризику X має місце наступна нерівність $\sup\{\delta : \mathsf{E}[X^2 e^{\delta X}] < +\infty\} =: \alpha^*[X] > 0$, тоді*

$$\mathsf{E}[X] \leq \pi_{\text{Есшер}(\alpha_1)}[X] \leq \pi_{\text{Есшер}(\alpha_2)}[X], \quad \text{для} \quad 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha^*[\mathrm{X}].$$

Теорема 2.3. *Для будь-якого ризику X справедлива рівність*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] = \operatorname{ess\,sup}[\mathrm{X}].$$

Премія відрегульована ризиком для ризику X, *сконцентрованого на невід'ємній півосі*, з функцією розподілу $F_X(x)$ означається як

$$\pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] := \int_0^{+\infty} \left[\mathrm{P}\{X > x\}\right]^{1/\rho} dx = \int_0^{+\infty} \left[1 - F_X(x)\right]^{1/\rho} dx.$$

Параметр $\rho \geq 1$ часто називають *ризиковим індексом*.

Твердження 2.3. *Для будь-якого невід'ємного ризику X премія відрегульована ризиком є неспадною функцією параметра ρ, при $\rho \geq 1$.*

Теорема 2.4. *Для будь-якого невід'ємного ризику X виконується граничне співвідношення*

$$\lim_{\rho \to +\infty} \pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] = \operatorname{ess\,sup}[\mathrm{X}].$$

Квантільна премія для ризику X та довільного $\varepsilon \in (0,1]$ означається так, що ймовірність перевищення розміром страхової компенсації розміру страхової премії є не більшою за ε, тобто,

$$\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X] := \inf\{\delta : F_X(\delta) > 1 - \varepsilon\}.$$

Іншими словами, квантільна премія – це $(1-\varepsilon)$ – квантіль функції розподілу $F_X(x)$.

Перейдемо тепер до розгляду принципів означених з використанням допоміжних функцій. До таких принципів ми відносимо принцип Ванга, принцип середнього значення, принцип еквівалентної/нульової корисності страховика та принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта.

Премія Ванга (en: Wang premium) для невід'ємного ризику X є природним узагальненням *премії відрегульованої ризиком* та означається як

$$\pi_{\text{Ванг}}[X] := \int_0^{+\infty} g(1 - F_X(x)) dx$$

для деякої зростаючої та опуклої вгору функції $g(\cdot)$, що відображає інтервал $[0,1]$ на себе (тобто на інтервал $[0,1]$). Легко бачити, що у випадку $g(x)=x^{1/\rho}$, для $\rho\geq 1$, *премія Ванга* є еквівалентною *премії відрегульованій ризиком*. В якості прикладу функції $g(\cdot)$ відмінної від $g(x)=x^{1/\rho}$, для $\rho\geq 1$, можна обрати $g(x)=\sin(\pi x/2)$. Премія Ванга названа на честь китайського математика, котрий запропонував таке узагальнення премії відрегульованої ризиком.

Премія середнього значення для ризику X задана за допомогою функції $v(x)\in C^2(\mathbb{R})$, такої, що $v'(x)>0$ та $v''(x)\geq 0$ для $x\in\mathbb{R}$, означається як розв'язок рівняння

$$v(\pi_{\text{ñ.ç.}}[X])=\mathsf{E}[v(X)].$$

Аргументація для принципу середнього значення трохи прихована в нерівності Єнсена, а саме, $v(\mathsf{E}[X])\leq\mathsf{E}[v(X)]$, тобто, отримана в такий спосіб премія буде не меншою за математичне сподівання розміру страхової компенсації.

Премія еквівалентної корисності страховика для ризику X, яку позначатимемо $\pi_{\text{å.ê.ñ.}}[X]$, означається як розв’язок рівняння

$$U(W)=\mathsf{E}[U(W+\pi_{\text{å.ê.ñ.}}[X]-X)], \qquad (1)$$

де стала W відображає капітал страховика на момент укладання страхової угоди, а $U(x)\in C^2(\mathbb{R})$ − функція корисності капіталу страховика, тобто, є такою, що $U'(x)>0$ та $U''(x)\leq 0$ для всіх $x\in\mathbb{R}$.

У випадках, коли функція корисності страховика $U(x)$ обрана таким чином, що величина $U(0)$ відображає корисність капіталу страховика на момент укладання страхової угоди, премію еквівалентної корисності страховика називають премією нульової корисності страховика. При цьому в формулі (1) здійснюється заміна $W:=0$.

Премія еквівалентної корисності клієнта для ризику X, яку позначатимемо $\pi_{\text{å.ê.ê.}}[X]$, означається як розв’язок рівняння

$$u(\omega-\pi_{\text{å.ê.ê}}[X])=\mathsf{E}[u(\omega-X)], \qquad (2)$$

де стала ω відображає розмір капіталу клієнта на момент укладання страхової угоди, а $u(x)\in C^2(\mathbb{R})$ − це функція корисності капіталу клієнта, тобто, є такою, що $u'(x)>0$ та $u''(x)\leq 0$ для всіх $x\in\mathbb{R}$.

У випадках, коли функція корисності клієнта $u(x)$ обрана таким чином, що величина $u(0)$ відображає корисність капіталу клієнта на момент укладання страхової угоди, премію еквівалентної корисності клієнта називають премією нульової корисності клієнта. При цьому в формулі (2) здійснюється заміна $\omega:=0$.

У першій частині **третього розділу** проводиться аналіз бажаних властивостей, якими можуть володіти або не володіти принципи підрахунку вартості страхових контрактів, означені в другій частині другого розділу дисертації. Серед таких бажаних властивостей ми вивчаємо властивість відсутності необґрунтованої надбавки на ризик, властивість невід'ємності страхової надбавки, властивість адитивності, властивість мультиплікативної інваріантності, властивість консистентності, властивість відсутності грабування та властивість ітеративності.

Тут також дана інтерпретація вказаних властивостей з точки зору споживача (страховика, клієнта).

Скажемо, що принцип підрахунку вартості страхових контрактів володіє:

- *властивістю відсутності необгрунтованої надбавки на ризик* (en: no unjustified risk loading property), якщо для будь-якого допустимого виродженого ризику $X^{C}_{\text{âèðî äæ.}}$, тобто такого, що $\mathsf{P}\{X^{C}_{\text{âèðî äæ.}} = C\} = 1$, для деякої константи $C \in \mathbb{R}$ або $\mathbb{R}^{+}$, має місце рівність $\pi\left[X^{C}_{\text{âèðî äæ.}}\right] = C$;

- *властивістю невід'ємності страхової надбавки* (en: non-negative loading property) якщо для будь-якого допустимого ризику X розмір отриманої премії є не меншим за математичне сподівання розміру страхової компенсації, тобто, $\pi[X] \geq \mathsf{E}[X]$;

- *властивістю адитивності* (en: additivity property), якщо для будь-яких двох допустимих незалежних ризиків X_1 та X_2 виконується рівність $\pi[X_1 + X_2] = \pi[X_1] + \pi[X_2]$;

- *властивістю мультиплікативної інваріантності* (en: scale invariance property), якщо для будь-якого допустимого ризику X та будь-якої константи $\Theta \in \mathbb{R}^{+}, \{0\}$ виконується рівність $\pi[\Theta X] = \Theta \pi[X]$;

- *властивістю консистентності* (en: consistency property), якщо для будь-якого допустимого ризику X та будь-якої константи $c \in \mathbb{R}$ або $\mathbb{R}^{+}$ має місце рівність $\pi[c + X] = c + \pi[X]$;

- *властивістю відсутності грабування* (en: no rip-off property), якщо для будь-якого допустимого ризику X має місце нерівність $\pi[X] \leq \operatorname{ess\,sup}[X]$;

- *властивістю ітеративності* (en: iterativity property), якщо для будь-яких двох ризиків X та Y виконується рівність $\pi\left[\pi[X \mid Y]\right] = \pi[X]$.

У другій частині **третього розділу** представлено характеризаційні теореми, що стосуються властивостей адитивності, консистентності, ітеративності та мульти-плікативної інваріантності для наступних принципів підрахунку вартості страхових контрактів: принципу середнього значення, принципу еквівалентної/нульової корисності страховика та принципу еквівалентної/нульової корисності клієнта.

Показано також, що у випадку звуження принципу середнього значення та принципу нульової корисності клієнта до оцінювання вартості лише строго позитивних ризиків, класи допоміжних функцій, які породжують мультиплікативно інваріантні премії, є ширшими ніж у загальному випадку.

Нехай X_p^t − бернулівська випадкова величина, яка приймає значення t (тут t − це ненульовий дійсний параметр) та 0 з ймовірностями p та $1-p$ відповідно.

При доведенні характеризаційних теорем суттєву роль відіграють наступні леми.

Лема 3.1. (a) *Принцип середнього значення, що базується на функції* $v(x) = ax + b$, *для* $a > 0$, *еквівалентний нетто принципу.*

(b) *Принцип середнього значення, що базується на функції* $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, *для* $\min[\alpha, \beta] > 0$, *еквівалентний експоненційному принципу з параметром* β.

Лема 3.2. *Принцип середнього значення для бернулівського ризику* X_p^t *задовольняє наступні тотожності:*

(a) $\pi_{\text{ñ.ç.}}[X_0^t] = 0;$ **(b)** $\left.\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{ñ.ç.}}[X_p^t]\right|_{p=0} = \frac{v(t)-v(0)}{v'(0)};$

(c) $\left.\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\tilde{\text{n}}.\text{ç}.}[X_p^t]\right|_{p=0} = \bar{v}(t);$ **(d)** $\left.\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{ñ.ç.}}[X_p^t]\right|_{p=0} = -\kappa\bar{v}^2(t).$

Лема 3.3. (a) *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика, що базується на функції* $U(x) = ax + b,$ *для* $a > 0,$ *еквівалентний нетто принципу.*

(b) *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика, що базується на функції* $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma,$ *для* $\min[\alpha,\beta] > 0,$ *еквівалентний експоненційному принципу з параметром* $\beta.$

Лема 3.4. *Принцип еквівалентної корисності страховика для бернулівського ризику* X_p^t *та будь-якої допустимої функції корисності капіталу страховика* $U(\cdot)$ *задовольняє наступні тотожності:*

(a) $\pi_{\text{å.ê.ñ.}}[X_0^t] = 0;$ **(b)** $U'(W)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{å.ê.ñ.}}[X_p^t]\right|_{p=0} = U(W) - U(W-t);$ **(c)** $\pi_{\text{å.ê.ñ.}}[X_1^t] = t;$

(d) $U'(W)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{å.ê.ñ.}}[X_p^t]\right|_{p=1} = U(W+t) - U(W);$ **(e)** $\left.\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{å.ê.ñ.}}[X_p^t]\right|_{p=1} = \bar{U}(W+t).$

Лема 3.5. (a) *Принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта для функції* $u(x) = ax + b,$ *при* $a > 0,$ *еквівалентний нетто принципу.*

(b) *Принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта для функції* $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma,$ *при* $\min[\alpha,\beta] > 0,$ *еквівалентний експоненційному принципу з параметром* $\beta.$

Лема 3.6. *Премія еквівалентної корисності клієнта для ризику* $X_p^t,$ *що базується на довільній допустимій функції корисності капіталу клієнта* $u(\cdot)$ *задовольняє наступні тотожності:*

(a) $\pi_{\text{å.ê.ê.}}[X_0^t] = 0;$ **(b)** $-u'(\omega)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{å.ê.ê.}}[X_p^t]\right|_{p=0} = u(\omega - t) - u(\omega);$

(c) $\left.\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{å.ê.ê.}}[X_p^t]\right|_{p=0} = -\bar{u}(\omega - t);$ **(d)** $\left.\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{å.ê.ê.}}[X_p^t]\right|_{p=0} = \kappa\bar{u}^2(\omega - t).$

Перейдемо тепер до представлення характеризаційних теорем.

Теорема 3.1. *Принцип середнього значення володіє властивістю адитивності тоді й лише тоді, коли* $v(x) = ax + b,$ *для* $a > 0,$ *або* $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma,$ *для* $\min[\alpha,\beta] > 0,$ *тобто, лише у випадках, коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Теорема 3.2. *Принцип середнього значення володіє властивістю консистентності тоді й лише тоді, коли* $v(x) = ax + b,$ *для* $a > 0,$ *чи* $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma,$ *для* $\min[\alpha,\beta] > 0,$ *тобто, лише у випадках, коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Теорема 3.3. *Принцип середнього значення володіє властивістю ітеративності при довільному виборі функції* $v(x) \in C^2(\mathbb{R})$ *такої, що* $v'(x) > 0$ *та* $v''(x) \geq 0$ *для* $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.4. *Принцип середнього значення володіє властивістю мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $v(x) = ax + b,$ *для* $a > 0,$ *тобто, лише у випадку співпадання з нетто принципом.*

Теорема 3.5. *Принцип середнього значення звужений до оцінювання лише строго позитивних ризиків, володіє властивістю мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $v(x) = ax^{\kappa} + b,$ *для* $a > 0$ *та* $\kappa \geq 1,$ *при* $x \in (0, +\infty).$

Теорема 3.6. *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика володіє властивістю адитивності тоді й лише тоді, коли* $U(x) = ax + b,$ *для* $a > 0,$ *чи* $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma,$ *для* $\min[\alpha, \beta] > 0,$ *тобто, лише у випадках, коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Теорема 3.7. *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика володіє властивістю консистентності при довільному виборі функції корисності капіталу страховика* $U(x) \in C^2(\mathbb{R}),$ *такої, що* $U'(x) > 0$ *та* $U''(x) \leq 0$ *для* $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.8. *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика володіє властивістю ітеративності тоді й лише тоді, коли* $U(x) = ax + b,$ *для* $a > 0,$ *чи* $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma,$ *для* $\min[\alpha, \beta] > 0,$ *тобто, лише у випадках, коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Теорема 3.9. *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика володіє властивістю мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $U(x) = ax + b,$ *для* $a > 0,$ *тобто, лише у випадку співпадання з нетто принципом.*

Теорема 3.10. *Принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта володіє властивістю адитивності тоді й лише тоді, коли* $u(x) = ax + b,$ *для* $a > 0,$ *чи* $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma,$ *для* $\min[\alpha, \beta] > 0,$ *тобто, лише у випадках коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Теорема 3.11. *Принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта володіє властивістю консистентності тоді й лише тоді, коли* $u(x) = ax + b,$ *для* $a > 0,$ *чи* $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma,$ *для* $\min[\alpha, \beta] > 0,$ *тобто, лише у випадках, коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Теорема 3.12. *Принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта володіє властивістю ітеративності при довільному виборі функції корисності* $u(x) \in C^2(\mathbb{R})$ *такої, що* $u'(x) > 0$ *та* $u''(x) \leq 0$ *для* $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.13. *Принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта володіє властивістю мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $u(x) = ax + b,$ *для* $a > 0,$ *тобто, лише у випадку співпадання з нетто принципом.*

Теорема 3.14. *Принцип нульової корисності клієнта звужений до оцінюванння лише строго позитивних ризиків володіє властивістю мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $u(x) = -a(-x)^{\kappa} + b,$ *для* $a > 0$ *та* $\kappa \geq 1,$ *при* $x \in (-\infty, 0).$

Звернемо увагу на те, що аналогу теорем 3.5 та 3.14 не існує для принципу еквівалентної/нульової корисності страховика.

В третій частині **третього розділу** представлені результати перевірки бажаних властивостей у вигляді сумарної таблиці властивостей.

	ВННР	НСН	Ад	МІ	Ко	Вг	Іт
Нетто пр.	+	+	+	+	+	+	+
Пр. мат. спод.	-	+	+	+	-	-	-
Пр. дисперсії	+	+	+	-	+	-	-
Пр. сер.квад. відх.	+	+	-	+	+	-	-
Експоненційний пр.	+	+	+	-	+	+	+
Пр. сер. значення	+	+	✠	⊗	✠	+	+
Пр. Есшера	+	+	+	-	+	+	-
Пр. відрег. ризиком	+	+	-	+	+	+	-
Пр. Ванга	+	+	-	+	+	+	-
Квантільний пр.	+	-	-	+	+	+	-
Пр. макс. збитків	+	+	+	+	+	+	+
Пр. екв. кор. страх.	+	+	♡	◊	+	+	♡
Пр. нул. кор. страх.	+	+	♡	◊	+	+	♡
Пр. екв. кор. клієн.	+	+	♠	♣	♠	+	+
Пр. нул. кор. клієн.	+	+	♠	□	♠	+	+

При впорядкуванні сумарної таблиці властивостей були використані наступні скорочення та умовні позначення:

ВННР – відсутність необґрунтованої надбавки на ризик;
НСН – невід'ємність страхової надбавки;
Ад – адитивність;
МІ – мультиплікативна інваріантність;
Ко – конзистентність;
ВГ – відсутність грабування;
Іт – ітеративність;
\+ – властивість виконується;
– – властивість не виконується;
✠ – властивість виконується тоді й лише тоді, коли $v(x) = ax + b,$ äë˙ $a > 0,$ або $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma,$ äë˙ $\min[\alpha, \beta] > 0;$
⊗ – властивість виконується тоді й лише тоді, коли $v(x) = ax + b,$ äë˙ $a > 0;$ проте, у випадку оцінювання лише строго позитивних ризиків, властивість виконується тоді й лише тоді, коли $v(x) = ax^{\kappa} + b,$ äë˙ $a > 0$ та $\kappa \geq 1,$ при $x \in (0, +\infty);$
♡ – властивість виконується тоді й лише тоді, коли $U(x) = ax + b,$ äë˙ $a > 0,$ або $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma,$ для $\min[\alpha, \beta] > 0;$
◊ – властивість виконується тоді й лише тоді, коли $U(x) = ax + b,$ äë˙ $a > 0;$
♠ – властивість виконується тоді й лише тоді, коли $u(x) = ax + b,$ äë˙ $a > 0,$ або $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma,$ для $\min[\alpha, \beta] > 0;$

♣ – властивість виконується тоді й лише тоді, коли $u(x) = ax + b,$ äë˙ $a > 0;$

 – властивість виконується тоді й лише тоді, коли $u(x) = ax + b,$ äëÿ $a > 0;$
проте, у випадку оцінювання лише строго позитивних ризиків, властивість виконується тоді й лише тоді, коли $u(x) = -a(-x)^{\kappa} + b,$ для $a > 0$ та $\kappa \geq 1,$ при $x \in (-\infty, 0).$

У **четвертому розділі** дисертації наведені приклади обчислення премій, означених в другому розділі дисертації, для контрактів з можливістю випадкової появи страхової події при деяких дискретних та неперервних розподілах виплат.

Зокрема, наведено явні формули оцінювання вартості страхових контрактів для ризику $X,$ що призводить до страхової угоди з ймовірністю p та сталій страховій компенсації $C,$ тобто, випадку, коли ризик X приймає лише два значення, а саме 0 та C з ймовірностями $1-p$ та p відповідно.

Далі отримано явні формули оцінювання вартості страхових контрактів для ризику $X,$ що призводить до страхового випадку з ймовірністю $p,$ а страхова компенсація експоненційно розподілена з параметром $\mu,$ тобто, ризику X з функцією розподілу

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - pe^{-\mu x} & \text{äë˙} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{äë˙} \quad x < 0. \end{cases}$$

Потім здійснюються обчислення для ризику $X,$ що призводить до страхового випадку з ймовірністю $p,$ а страхова компенсація має гіперекспоненційний розподіл, тобто, ризику X з функцією розподілу

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - p\sum_{i=1}^{n} q_i e^{-\mu_i x} & \text{äë˙} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{äë˙} \quad x < 0, \end{cases}$$

з наступними обмеженнями для значень параметрів: $n \in$; $q_i \in [0,1]$ для $i = \overline{1,n},$ та $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1;$ $\mu_i > 0$ для $i = \overline{1,n}.$

Розглядається також ризик X з ймовірністю появи страхового випадку p та рівномірним на інтервалі $[d_1, d_2],$ де $0 \leq d_1 < d_2 < +\infty,$ розподілом страхової компенсації, тобто, ризик X з наступною функцією розподілу

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{äëÿ} \quad x \geq d_2, \\ 1 - p + \dfrac{p(x - d_1)}{d_2 - d_1} & \text{äëÿ} \quad d_1 \leq x < d_2, \\ 1 - p & \text{äëÿ} \quad 0 \leq x < d_1, \\ 0 & \text{äëÿ} \quad x < 0. \end{cases}$$

На завершення проводяться обчислення для ризику $X,$ що призводить до страхового випадку з ймовірністю p та має зсунутий нормований пуасонівський розподіл страхової компенсації, тобто, ризику X з наступним розподілом значень, для $\lambda > 0$ та ù $> 0,$

$$\mathsf{P}\{X = \text{ù}\, n\} = \begin{cases} 1-p & \text{äë˙} \quad n=0, \\ \dfrac{\lambda^{n-1}e^{-\lambda}}{(n-1)!}\,p & \text{äë˙} \quad n=1,2,\ldots \end{cases}.$$

У **Додатку А** представлено розроблене в середовищі MatLab GUI пілотне програмне забезпечення “Premium Calculator” для аналізу вартості страхових контрактів. Програмне забезпечення розроблене з використанням явних формул оцінювання вартості страхових контрактів для деяких дискретних та неперервних розподілів виплат, отриманих у четвертому розділі дисертації.

Програма зручна у застосуванні. Для обчислення вартості контракту потрібно виконати наступні дії: 1) ввести ймовірність появи страхового випадку; 2) обрати розподіл збитків та ввести значення параметрів розподілу; 3) обрати спосіб оцінювання вартості контракту та, при необхідності, задати параметри; 4) натиснути кнопку “Calculate”.

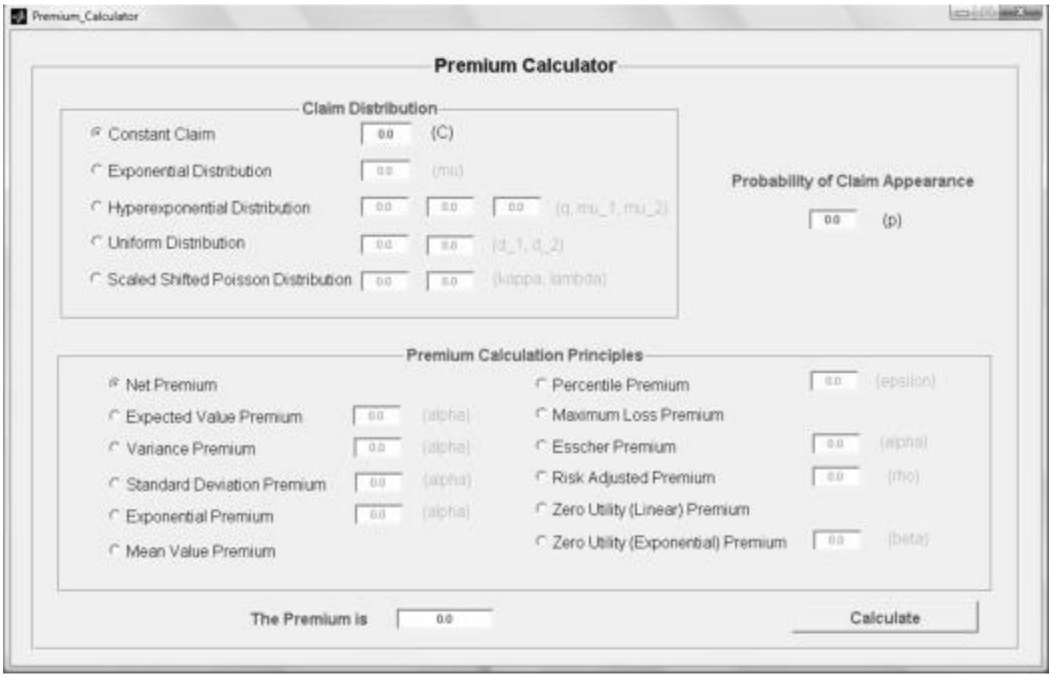

Рис. 1. Інтерфейс програми “Premium Calculator”

У **Додатку В**, використавши програмне забезпечення з Додатку А, наведені числові ілюстрації вартості страхових контрактів з можливістю випадкової появи страхової події при наявності наступних розподілів виплат: виродженого; експоненційного; гіперекспоненційного; рівномірного; зсунутого нормованого пуасонівського.

ВИСНОВКИ

При проведенні дисертаційних досліджень були отримані нижчеописані результати.

- Здійснено оглядовий аналіз колективних моделей діяльності страхової компанії, а саме, класичної моделі ризику та її узагальнень як то збурена модель ризику, модель Спаре Андерсена (модель ризику, в якій пуасонівський процес заміняється процесом відновлення), модель зі стохастичним потоком премій, а також дискретних моделей з можливістю інвестування.

 Описано та проведено класифікацію можливих методів підрахунку вартості страхових контрактів при відомих розподілах збитків у залежності від їх природи: найпростіші, параметричні, означені з використанням допоміжних функцій. Зокрема описано нетто принцип, принцип математичного сподівання, принцип дисперсії, принцип середньоквадратичного відхилення, принцип максимальних збитків, експоненційний принцип, принцип Есшера, принцип відрегульований ризиком, квантільний принцип, принцип Ванга, принцип середнього значення, принцип еквівалентної/нульової корисності страховика та принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта. Для параметричних методів вивчена властивість монотонності та гранична поведінка для допустимих значень параметрів.

 Для описаних принципів підрахунку вартості страхових контрактів здійснено перевірку виконання ряду бажаних властивостей, зокрема, перевірено виконання властивостей відсутності необґрунтованої надбавки на ризик, невід'ємності страхової надбавки, адитивності, мультиплікативної інваріантності, конзистентності, відсутності грабування та ітеративності; результати перевірки представлено у вигляді сумарної таблиці властивостей.

 Для принципу середнього значення, принципів еквівалентної і нульової корисності страховика та принципів еквівалентної і нульової корисності клієнта сформульовано та доведено характеризаційні теореми стосовно виконання ними властивостей адитивності, конзистентності, ітеративності та мультиплікативної інваріантності, характеризаційні теореми сформульовані у вигляді необхідних та достатніх умов виконання вказаних властивостей, які повністю задають зазначені методи страхового оцінювання.

 Отримані явні формули оцінювання вартості страхових контрактів для ризиків з випадковою появою страхової події для наступних випадків розподілів страхових компенсацій: виродженого, експоненційного, гіперекспоненційного, рівномірного та зсунутого нормованого пуасонівського.

 Використовуючи отримані явні формули оцінювання вартості страхових контрактів, в середовищі MatLab GUI розроблено пілотне програмне забезпечення “Premium Calculator” для аналізу вартості страхових контрактів при деяких дискретних та неперервних розподілах виплат. За допомогою розробленого програмного забезпечення створено таблиці числових ілюстрацій для контрактів з можливістю випадкової появи страхової події при вищевказаних розподілах виплат.

ПУБЛІКАЦІЇ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Дрозденко В.О. Гранична поведінка страхових премій, залежних від параметрів / В.О. Дрозденко // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. − 2010. − №11. − С. 211−224.
2. Pratsiovytyi M.V. Characterization theorems for mean value insurance premium calculation principle / M.V. Pratsiovytyi, V.O. Drozdenko // Tbilisi Mathematical Journal. − 2013. − № 6. − P. 57−71.

3. Pratsiovytyi M.V. Characterization theorems for scale invariance property of insurance premium calculation principles / M.V. Pratsiovytyi, V.O. Drozdenko // European Journal of Pure and Applied Mathematics. − 2014. − Vol.7 − № 3. − P. 267−288.
4. Pratsiovytyi M.V. Characterization theorems for insurer equivalent utility premium calculation principle / M.V. Pratsiovytyi, V.O. Drozdenko // Applied Statistics. Actuarial and Financial Mathematics. − 2014. − № 1. − P. 21−41.
5. Pratsiovytyi M.V. Characterization theorems for customer equivalent utility insurance premium calculation principle / M.V. Pratsiovytyi, V.O. Drozdenko // European Actuarial Journal. − 2014. − Vol.4 − № 2. − P. 437−451.
6. Дрозденко В.О. Характеризаційні теореми для властивості мультиплікативної інваріантності методів підрахунку вартості страхових контрактів / В.О. Дрозденко // Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих науковців, 28−29 квітня 2011р., м. Київ: Матеріали конф. – Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова, 2011 . – С. 20−21.
7. Дрозденко В.О. Гранична поведінка усередненого перетворення Есшера / В.О. Дрозденко // XIV-та Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 19−21 квітня 2012р., м. Київ: Матеріали конф. – Національний технічний університет України «КПІ», 2012. – С. 46−47.
8. Drozdenko V.O. Characterization theorems for customer equivalent utility insurance premium calculation principle / V.O. Drozdenko // The third international conference “Modern Stochastics: Theory and Applications”, September 10–14, 2012, Kyiv. – 2012. – P.74.
9. Дрозденко В.О. Характеризаційні теореми для принципу еквівалентної корисності клієнта підрахунку вартості страхових контрактів / В.О. Дрозденко // Міжнародна наукова конференція „Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь“, 13–14 грудня 2012р., м. Київ: Матеріали конф. – Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова, – С. 54−55.
10. Дрозденко В.О. Характеризаційні теореми для швейцарського принципу підрахунку вартості страхових контрактів / В.О. Дрозденко // Всеукраїнська наукова конференція „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“, 25 лютого – 3 березня 2013р., м. Ворохта: Матеріали конф., 2013. – С. 10−11.
11. Дрозденко В.О. Характеризаційні теореми для принципу середнього значення підрахунку вартості страхових контрактів / В.О. Дрозденко // Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, 25−27 квітня 2013р., м. Київ: Матеріали конф. – Києво-Могилянська академія, 2013 . – С. 34−35.
12. Дрозденко В.О. Характеризаційні теореми для принципу еквівалентної корисності страховика підрахунку вартості страхових контрактів / В.О. Дрозденко // Міжнародна конференція Боголюбовські читання DIF–2013, 23−30 червня 2013р., м. Севастополь: Матеріали конф., 2013. – С. 54−55.

13. Дрозденко В.О. Гранична поведінка усередненого перетворення Есшера / В.О. Дрозденко // П'ята міжнародна конференція з аналітичної теорії чисел і просторових мозаїк, 16−20 вересня 2013р., м. Київ: Матеріали конф. – Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова, 2013. – С. 43−44.

АНОТАЦІЇ

Дрозденко В.О. Методи підрахунку вартості страхових контрактів при відомих розподілах збитків. – Рукопис. – Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова, Київ, 2015.

Дисертація присвячена розробці та дослідженню методів обчислення вартості страхових контрактів при відомих розподілах страхових компенсацій. Зроблено аналіз колективних моделей діяльності страхової компанії як то класична модель ризику та її численні узагальнення; проведено опис можливих методів оцінювання вартості страхових контрактів. Для параметричних методів досліджено властивість монотонності та асимптотичну поведінку для допустимих значень параметрів. Для принципів означених з використанням допоміжних функцій, представлено ряд тверджень, що ілюструють їх інваріантність відносно лінійних перетворень допоміжних функцій, а також тверджень, що демонструють необхідні та достатні умови їх еквівалентності нетто принципу та експоненційному принципу. Для кожного з описаних методів оцінювання, здійснюється перевірка ряду бажаних властивостей, якими можуть володіти або не володіти методи підрахунку вартості страхових контрактів. Зокрема, здійснено перевірку виконання властивостей: відсутності необґрунтованої надбавки на ризик, невід'ємності страхової надбавки, адитивності, консистентності, відсутності грабування, мультиплікативної інваріантності та ітеративності. Результати перевірки представлені у вигляді сумарної таблиці властивостей. Для методів означених з використанням допоміжних функцій сформульовано та доведено серію характеризаційних теорем, що описують необхідні і достатні умови володіння такими методами властивостей адитивності, консистентності, ітеративності та мультиплікативної інваріантності. Використовуючи описані методи оцінювання, отримано ряд явних формул обчислення вартості страхових контрактів з можливістю випадкової появи страхової події при деяких дискретних та неперервних розподілах страхових компенсації; на їх основі в середовищі MatLab GUI розроблено пілотне програмне забезпечення, з допомогою якого створено таблиці числових ілюстрацій.

Ключові слова та фрази: страховий контракт, премія, обчислення вартості, гранична поведінка, бажана властивість, характеризаційна теорема, математичне сподівання, пілотне програмне забезпечення.

Дрозденко В.А. Методы подсчёта стоимости страховых контрактов при известных распределениях убытков. – Рукопись. – Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 –

математическое моделирование и численные методы. – Национальный педагогический университет им. М.П. Драгоманова, Киев, 2015.

Диссертация посвящена разработке и исследованию методов подсчёта стоимости страховых контрактов в случае известных распределений страховых компенсаций. В работе проведен обзорный анализ коллективных моделей функционирования страховых компаний таких как классическая модель риска и некоторых её обобщений. Проведено описание возможных методов/принципов оценивания стоимости страховых контрактов при известных распределениях убытков; в частности, детально описаны нетто принцип, принцип математического ожидания, принцип дисперсии, принцип среднеквадратического отклонения, экспоненциальный принцип, принцип среднего значения, принцип Эсшера, принцип отрегулированный риском, принцип Ванга, квантильный принцип, принцип максимальных убытков, принцип эквивалентной полезности страховика, принцип нулевой полезности страховика, принцип эквивалентной полезности клиента и принцип нулевой полезности клиента. Для параметрических методов проводится анализ свойства монотонности, а также исследуется асимптотическое поведение при допустимых значениях их параметров; таким образом, для экспоненциального принципа мы получаем достаточное условие его сходимости к нетто принципу, при параметре, стремящемся к нулю справа, а для принципа отрегулированного риском, экспоненциального принципа и принципа Эсшера мы демонстрируем сходимость к существенному супремуму оцениваемого риска при стремящихся к бесконечности параметрах принципов. Для принципов определённых с использованием вспомогательных функций, мы представляем ряд утверждений иллюстрирующих их инвариантность относительно линейных преобразований вспомогательных функций, а также утверждений, демонстрирующих необходимые и достаточные условия эквивалентности таких методов по отношению к нетто принципу и экспоненциальному принципу.

Для каждого из описанных методов оценивания, проводится проверка ряда желанных свойств, которыми могут обладать или не обладать методы подсчёта стоимости страховых контрактов; в частности, проверяется выполнение свойства отсутствия необоснованной страховой надбавки, свойства неотрицательности страховой надбавки, свойства аддитивности, свойства мультипликативной инвариантности, свойства консистентности, свойства отсутствия грабежа и свойства итеративности. Результаты проверки представлены в виде суммарной таблицы свойств.

Для методов определённых с помощью вспомогательных функций, а именно, метода среднего значения, метода эквивалентной/нулевой полезности страховика и метода эквивалентной/нулевой полезности клиента, мы формулируем и доказываем серию характеризационных теорем касающихся выполнения этими методами свойств аддитивности, консистентности, итеративности и мультипликативной инвариантности. Теоремы сформулированы в виде необходимых и достаточных условий выполнения указанными методами упомянутых свойств наложенных на вспомогательные функции, полностью определяющие такие методы оценивания. Мы показываем также, что в случае оценивания только строго положительных рисков, классы вспомогательных функций порождающих мультипликативно инвариантные методы среднего значения и методы нулевой полезности клиента являются более широкими, нежели в общем случае.

Используя описанные методы оценивания, нами получен ряд явных формул подсчёта стоимости страховых контрактов со случайным появлением страхового события при некоторых дискретных и непрерывных распределениях страховых компенсаций; полученные явные формулы касаются вырожденного, экспоненциального, гиперэкспоненциального, равномерного и смещённого нормированного пуассоновского распределений выплат.

Используя полученные явные формулы оценивания, в программной среде MatLab GUI мы создаём пилотное программное обеспечение, служащее для подсчёта стоимости страховых контрактов в случае известных распределений убытков; используя разработанное программное обеспечение, нами созданы таблицы числовых иллюстраций, демонстрирующие вариацию стоимости контрактов при изменении значений параметров распределений убытков и изменении параметров принципов оценивания.

Ключевые слова и фразы: страховой контракт, премия, подсчёт стоимости, предельное поведение, желанное свойство, характеризационная теорема, математическое ожидание, явная формула, пилотное программное обеспечение.

Drozdenko V.O. Methods of pricing of insurance contracts under known distributions of the future losses. – Manuscript. – Dissertation for the achievement of candidate of science degree in the specialty 01.05.02 – mathematical modeling and numerical methods. – Dragomanov national pedagogical university, Kyiv, 2015.

The thesis is devoted to the establishment and investigation of the insurance contract pricing methods under assumption that distribution of size of the insurance compensation is known. We begin from the descriptive analysis of the collective models of an insurance company activity like the classical risk model and its numerous generalizations; after that we have performed a descriptive analysis of possible individual models of the insurance pricing. For parametric methods we investigate monotonicity property as well as asymptotic behavior for the admissible values of their parameters. For every described method of pricing, we check several desirable properties that can be possessed or not possessed by an insurance contract pricing method; results of such investigation are summarized in a form of the property table. For pricing principles defined with the use of some auxiliary functions, more precisely for mean value principle, insurer equivalent/zero utility principles, as well as customer equivalent/zero utility principles, we present a set of characterization theorems describing necessary and sufficient conditions of attainment of additivity, consistency, iterativity, and scale invariance properties by everyone of the just mentioned pricing principles; moreover we shove that in the case of subjecting of the mean value principle as well as the customer zero utility principle to pricing of only strictly positive risks, the classes of the auxiliary functions producing scale invariant premiums are larger than in the general case. Using described pricing techniques we obtain a set of explicit pricing formulas for contracts with random appearance of the insurance event with several predefined discrete and continuous claim size distributions. Using obtained explicit pricing formulas, in MatLab GUI environment we develop a pilot pricing software with the help of which create tables of numerical illustrations.

Key words and phrases: insurance pricing, insurance premium, limit behavior, desirable property, characterization theorem, necessary and sufficient condition, explicit formula, pilot software.