VI. ОСНОВИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Вивчення змінної величини та поведінки її зміни призводить до питання про швидкість цієї зміни. Поняття швидкості необов'язково пов'язується з часом, як маємо при русі тіла за часом. Взагалі швидкість − це зміна однієї величини по відношенню до зміни іншої. Різноманітні способи зміни змінної величини привели не тільки до точного визначення швидкості, але й до створення єдиного методу для її обчислення. Розділ математики, який займається вивченням цього питання та висновками з його вивчення, називається ***диференціальним численням.***

У загальних рисах побудову диференціального числення було завершено у працях англійського фізика, астронома та математика І. Ньютона (1643–1727) та німецького філософа та математика Г. Лейбніца (1646–1716) до кінця XVII ст. Ньютон прийшов до поняття похідної, розглядаючи задачу про миттєву швидкість матеріальної точки, а Лейбніц під час розв'язування задачі про дотичну до кривої.

Строге обґрунтування диференціального числення на основі теорії границь дав на початку XIX століття французький математик О. Коші.

§1. Поняття похідної

Нехай задано неперервну функцію $y = f(x)$ на інтервалі $(a;b)$. Проведемо над функцією п'ять дій (рис. 6.1.):

1. Виберемо в інтервалі $(a;b)$ точку $x = x_0$ і знайдемо значення функції $y_0 = f(x_0)$.

2. Дамо аргументу x приріст Δx і одержимо нове значення $x = x_0 + \Delta x$. Визначимо нове значення функції $y = f(x_0 + \Delta x)$, яке буде відрізнятись від y_0 на величину приросту функції Δy. Тому $y = y_0 + \Delta y$.

3. Визначимо величину приросту функції: $\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

4. Визначимо відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ З ΔABC видно, що $\Delta y = |BC|$ і $\Delta x = |AC|$, тому пряма AB є січною до кривої $f(x)$, $\angle \alpha$ є кутом нахилу січної до осі: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|BC|}{|AC|} = tg\alpha.$

5. Розглянемо, що буде з відношенням $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, якщо $\Delta x \to 0$. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ є даним граничним відношенням. В математиці це граничне відношення називається похідною функції.

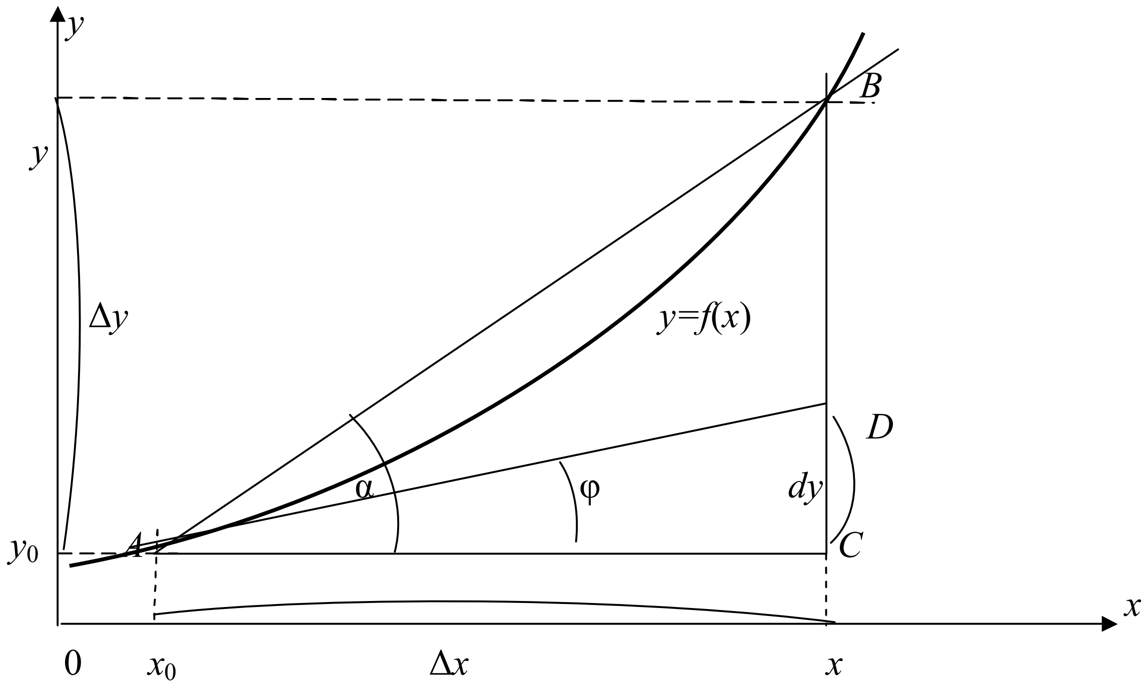

Рис. 6.1.

Озн. Похідною функції в точці x_0 називається граничне відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу в цій же точці, якщо останній прямує до нуля.

Дія знаходження похідної від функції називається диференціюванням функції.

Якщо $\Delta x \to 0$, то точка B по кривій наближається до точки A. При цьому величина січної як відрізка зменшується, і кут α також зменшується. В граничному переході ($B \to A$) січна перетвориться в дотичну, а кут нахилу січної – в кут φ нахилу дотичної. Таким чином: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi$.

Для похідної існує позначення y', тому:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \qquad (6.1.)$$

Задачі про миттєву швидкість та дотичну до кривої дають механічний та геометричний зміст похідної.

Механічний зміст похідної: величина миттєвої швидкості в момент часу t_0 дорівнює значенню похідної від шляху у точці t_0. Тобто $v(t_0) = s'(t_0)$.

Геометричний зміст похідної: похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ у точці x_0 є значенням кутового коефіцієнта дотичної до кривої $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0. Тобто $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$.

Рівняння дотичної до кривої $y=f(x)$ у точці *$M_0(x_0;\ y_0)$* має вигляд: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Якщо функція в точці $x=x_0$ має похідну, то при $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$, тобто нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції. Це означає, що функція неперервна в точці x_0. Отже, якщо функція в точці має похідну, то вона неперервна в ній. В зв'язку з подальшим постійним застосуванням вказаних на початку параграфу п'яти дій рекомендується досконало їх розглянути та запам'ятати.

Основні формули диференціювання.

Запишемо основні правила та формули диференціювання:

функція	похідна
$y=c\cdot u$	$y'=c\cdot u'$
$y=u+v$	$y'=u'+v'$
$y=u\cdot v$	$y'=u'\cdot v+u\cdot v'$
$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$

№	функція	похідна	№	функція	похідна
1.	$y=C(const)$	$y'=0$	2.	$y=x$	$y'=1$
3.	$y=x^n$	$y'=n\cdot x^{n-1}$	4.	$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5.	$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$	6.	$y=e^x$	$y'=e^x$
7.	$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$	8.	$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$
9.	$y=\sin x$	$y'=\cos x$	10.	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
11.	$y=tgx$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$	12.	$y=ctgx$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
13.	$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14.	$y=arccosx$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15.	$y=arctgx$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$	16.	$y=arcctgx$	$y'=-\frac{1}{\cos^2 x}$

Приклад: Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7$; б) $y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}}$; в) $y = \cos x \cdot \log_9 x$;

г) $y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$; д) $y = \sqrt{tg(x^3 - 4x)}$.

Розв'язання:

Для знаходження похідних функцій користуємося таблицею похідних:

а) $y = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7$.

$$y' = 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 = 12x^2 - x;$$

б) $y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}}$.

Скористаємося властивостями степеня $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$, отримаємо:

$$y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}} = x^{\frac{3}{7}} + \frac{4}{5}x^{-13}.$$

Тоді похідна функції

$$y' = \frac{3}{7} \cdot x^{\frac{3}{7}-1} + \frac{4}{5} \cdot (-13) \cdot x^{-13-1} = \frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}} - \frac{52}{5}x^{-14} = \frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}} - \frac{52}{5x^{14}}.$$

в) $y = \cos x \cdot \log_9 x$.

Скористаємося формулою похідної добутку: $(uv)' = u'v + uv'$, тоді

$$y' = (\cos x)' \cdot \log_9 x + \cos x \cdot (\log_9 x)' = -\sin x \cdot \log_9 x + \cos x \cdot \frac{1}{x \ln 9}$$

г) $y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$.

Скористаємося формулою похідної частки: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, тоді

$$y = \frac{(\arcsin x)' \cdot \ln x - \arcsin x \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln x - \arcsin x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}.$$

д) $y = \sqrt{tg(x^3 - 4x)}$. Враховуючи, що функція складена, то її похідна дорівнюватиме: $y' = \frac{1}{2\sqrt{tg(x^3 - 4x)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^3 - 4x)} \cdot (3x^2 - 4)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти похідні вказаних функцій:

6.1. $y = 4x^5 - \frac{1}{2}x^2 + 2$;

6.2. $y = \frac{1}{4}x^8 - x^2 + \sqrt{x}$;

6.3. $y = 4x^3 - x^2 + x$;

6.4. $y = 4x^6 - x^7 + 3x$;

6.5. $y = x^2 - \frac{1}{5}x^5$;

6.6. $y = 2x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 4$;

6.7. $y = 4x^2 - 7x + 2$;

6.8. $y = 2x^3 - x^2 + \frac{1}{x}$;

6.9. $y = 2x^7 - \frac{1}{6}x^6 - 2$;

6.10. $y = x^3 - \frac{1}{7}x^7$;

6.11. $y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x^3}$;

6.12. $y = \sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{x^3}$;

6.13. $y = \sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{x^6}$;

6.14. $y = \sqrt[7]{x^6} + \frac{4}{x^7}$;

6.15. $y = \sqrt[6]{x^7} + \frac{2}{x^6}$;

6.16. $y = \sqrt[7]{x^8} + \frac{1}{3x^3}$;

6.17. $y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^4}$;

6.18. $y = \sqrt[5]{x^3} + \frac{6}{x^7}$;

6.19. $y = \sqrt[8]{x^7} + \frac{9}{x^8}$;

6.20. $y = \sqrt[5]{x^6} + \frac{3}{x^5}$.

Знайти похідні функцій, користуючись формулою добутку:

6.21. $y = e^x \cdot \sin x$;

6.22. $y = e^x \cdot \sqrt[3]{x}$;

6.23. $y = cosx \cdot \ln x$;

6.24. $y = cosx \cdot \log_2 x$;

6.25. $y = x \cdot \log_7 x$;

6.26. $y = arccosx \cdot \log_5 x$;

6.27. $y = \sin x \cdot 3^x$;

6.28. $y = ctgx \cdot \sqrt{x}$;

6.29. $y = tgx \cdot \sqrt[3]{x}$;

6.30. $y = e^x \cdot \ln x$.

Знайти похідні функцій, користуючись формулою частки:

6.31. $y = \frac{\sqrt{x}}{tgx}$;

6.32. $y = \frac{x^6 - 25}{\sqrt{x}}$;

6.33. $y = \frac{arctgx}{x}$;

6.34. $y = \frac{tgx}{\sqrt{x}}$;

6.35. $y = \frac{x}{\ln x}$;

6.36. $y = \frac{x^2}{\sin x}$;

6.37. $y = \frac{e^x}{\cos x}$;

6.38. $y = \frac{e^x - 5}{\arccos x}$;

6.39. $y=\frac{5x}{\cos x}$;

6.40. $y=\frac{4x^4-9x^2}{\sqrt{x}}$.

Знайти похідні складених функцій:

6.41. $y=5^{\arcsin 4x}$;

6.42. $y=\sqrt{\ln 2^x}$;

6.43. $y=\sqrt{\cos x}$;

6.44. $y=\sqrt{\sin x}$;

6.45. $y=\sqrt{e^{3x}}$;

6.46. $y=\sqrt{x^2-x}$;

6.47. $y=\sqrt{4x^2-3}$;

6.48. $y=\ln\sqrt{x}$;

6.49. $y=\ln\sqrt{e^x}$;

6.50. $y=2^{\sin 4x}$.

6.51. $y=arctg^2 x$;

6.52. $y=\ln^3 x$;

6.53. $y=\cos^4(2x+5)$;

6.54. $y=\ln arctgx^5$;

6.55. $y=\sin^2\cos x$;

6.56. $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

6.57. $y=\frac{3}{\ln^6 2x}$;

6.58. $y=\ln arctg\sqrt{x^2+4}$;

6.59. $y=\sqrt{\ln\arccos 2^x}$;

6.60. $y=\sin\sqrt{\ln 8^x}$;

6.61. $y=\sqrt[5]{\log_{12}(6x+5)}$;

6.62. $y=7^{arctg(\arcsin x-3)}$.

Знайти похідні вказаних функцій:

6.63. $y=\sqrt{\frac{x}{x+4}}$;

6.64. $y=\sqrt{\frac{\ln^2 x-x}{4x}}$;

6.65. $y=\frac{4x^4-9x^2}{\sqrt{x^3-6x-9}}$;

6.66. $y=\frac{9x^2-16}{\sqrt{x^3+x^2-2x+4}}$;

6.67. $y=\frac{(3x-2)^2(3x+2)}{\ln\sqrt{x-8}}$;

6.68. $y=\frac{25x^4-16}{\sqrt{3x^2-8x+4}}$;

6.69. $y=\frac{16x^2-20x-15}{\sqrt[3]{x^3-4x}}$;

6.70. $y=\frac{4x^6-25}{\sqrt{x^4+2x+5}}$.

Індивідуальне завдання

Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y=2x^n-\frac{1}{n}x^{2n}-4n$;

б) $y=\sqrt[n]{x^{n-1}}+\frac{6}{x^n}-nx$;

в) $y=ctg(nx-4)\cdot\sqrt{x^2+nx-n}$;

г) $y=\frac{x^{2n}-(n-2)x}{\sin^n x}$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

§2. Особливі випадки диференціювання

а) Похідна неявної функції.

Якщо функція задана неявно $f(xy)=a$, необхідно знайти похідну від лівої та правої частини, пам'ятаючи, що y є деякою функцією від x.

Приклад: Знайти похідну функції $\sin(x+y)+\ln(x-y)=4$.

Дана функція задана неявно, тому знаходимо похідну від лівої та правої частини, пам'ятаючи, що y є деякою функцією від x:

$$(\sin(x+y)+\ln(x-y))'=4'\Rightarrow$$

$$(\sin(x+y))'+(\ln(x-y))'=0\Rightarrow\ \cos(x+y)\cdot(1+y')+\frac{1-y'}{x-y}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos(x+y)+\frac{1}{x-y}+y'(\cos(x+y)-\frac{1}{x-y})=0\Rightarrow y'=-\frac{\cos(x+y)+\frac{1}{x-y}}{\cos(x+y)-\frac{1}{x-y}}.$$

б) Похідна функції, заданої параметрично.

Якщо функція задана параметрично, тобто у вигляді: $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, то похідна обчислюється за формулою: $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Приклад: Знайти похідну функції $\begin{cases}x=\cos(t^2+1)\\ y=\sin(t^2+1)\end{cases}$.

Функція задана параметрично, тому похідна функції:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-\sin(t^2+1)\cdot 2t}{\cos(t^2+1)\cdot 2t}=-tg(t^2+1).$$

в) Похідна показникової функції.

Для знаходження похідної, що подана у вигляді $f(x)=u(x)^{v(x)}$ необхідно про логарифмувати функцію зліва та справа за основою e і перейти до знаходження похідної добутку.

Приклад: Знайти похідну функції $y=(x^3+3x^2+4)^{\sin 4x}$.

Функція задана у вигляді $f(x)=u(x)^{v(x)}$, тому прологарифмуємо функцію зліва та справа за основою e:

$\ln y=\ln(x^3+3x^2+4)^{\sin 4x}$, або $\ln y=\sin 4x\cdot\ln(x^3+3x^2+4)$;

Для знаходження похідної скористаємося формулою добутку:

$$y' \cdot \frac{1}{y} = 4\cos 4x \cdot \ln\left(x^3 + 3x^2 + 4\right) + \sin 4x \cdot \frac{1}{x^3 + 3x + 4} \cdot \left(3x^2 + 6x\right);$$

Тоді шукана похідна:

$$y' = 4\cos 4x \cdot \left(x^3 + 3x^2 + 4\right)^{\sin 4x} \cdot \ln\left(x^3 + 3x^2 + 4\right) + \sin 4x \cdot \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x + 4} \cdot$$

$$\left(x^3 + 3x^2 + 4\right)^{\sin 4x}.$$

г) Похідна логарифмічної функції.

Якщо функція подана у вигляді $\log_{\psi(x)} \varphi(x)$ необхідно перейти до нової основи логарифма (наприклад *e*), скориставшись формулою: $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$.

<u>Приклад:</u> Знайти похідну функції $y = \log_{\sin x}(1 + \sqrt{x})$.

Перейдемо до нової основи логарифма (наприклад *e*), скориставшись формулою: $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$, тоді

$$y = \log_{\sin x}(1 + \sqrt{x}) = \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\ln \sin x} \Rightarrow y' = \frac{(\ln(1 + \sqrt{x}))' \cdot \ln \sin x - \ln(1 + \sqrt{x}) \cdot (\ln \sin x)'}{(\ln \sin x)^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{1 + \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \sin x - \ln(1 + \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{\ln^2 \sin x} =$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x \ln \sin x - \cos x (1 + \sqrt{x}) \ln(1 + \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x}) \cdot \sin x \cdot \ln^2 \sin x}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти похідні функцій, заданих неявно:

6.71. $y^2 x^2 + x = 3y$;

6.72. $x^2 + xy^3 + x = 3y$;

6.73. $e^y - xy = 4y^5$;

6.74. $\sin(x - y) + ctg(x + y) = 2x$;

6.75. $\ln(x^2 + xy) + x = 3y$;

6.76. $e^{xy} - xy = tg(4y)$;

6.77. $\arcsin(x - y) + arctg(x + y) = 2$;

6.78. $\sin \ln(x^2 + x) + xy = 3$;

6.79. $\dfrac{\cos(x^2 - y^3)}{tg(xy + \frac{x}{y})} = 12xy$;

6.80. $e^{xy} - xy + \ln(xy) = tg(xy)$.

Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

6.81. $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^3 - 4 \end{cases}$;

6.82. $\begin{cases} x = 3t^2 + t - 4 \\ y = t^3 + 6t - 7 \end{cases}$;

6.83. $\begin{cases} x = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^3 - 11 \\ y = t^2 - 9t - 3 \end{cases}$; **6.84.** $\begin{cases} x = \ln(t^2+1) \\ y = \log_2(t^2+1) \end{cases}$;

6.85. $\begin{cases} x = \cos(t^2+t) - \sin t \\ y = \sin(t+1) + \cos 4t \end{cases}$; **6.86.** $\begin{cases} x = e^t - 7\sin t \\ y = e^{-t} + \frac{1}{4}\cos 4t \end{cases}$.

Знайти похідні вказаних функцій:

6.87. $y = (1+\cos x)^{x^2-4}$; **6.88.** $y = (x^2+3x)^{x^2-4}$;

6.89. $y = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x^2-4}$; **6.90.** $y = (e^{-x} + \cos 7x)^x$;

6.91. $y = \left(4 - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)^{e^{3x}}$; **6.92.** $y = \left(1 + \frac{1}{2}x^2\right)^{4x^{-1}}$;

6.93. $y = (x-4)^{x+4}$; **6.94.** $y = (\log_x 7)^{tgx}$.

Знайти похідні логарифмічних функцій:

6.95. $y = \log_x(x^3 + x^2)$; **6.96.** $y = \log_{\sin 4x}(x^3 + 3x^2 + 4)$;

6.97. $y = \log_{\sqrt{x+5x^2}}\left(3 + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)$; **6.98.** $y = \log_{(x-2x^2)}\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)$;

6.99. $y = \log_{\sqrt{4x-3}}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)$; **6.100.** $y = \log_{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Індивідуальне завдання

Знайти похідні вказаних функцій:

а) $x^{2n} + \sqrt[n]{xy^2} + e^x = ny$; б) $\begin{cases} x = \frac{1}{2n}t^n + \sqrt[n]{t} - 4t \\ y = t^3 + nt - \frac{1}{x^n} \end{cases}$;

в) $y = (x^{n-2} + nx)^{n^x - 4}$; г) $y = \log_{\sqrt[n]{x}} \frac{(n+2)x}{\sin x}$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

§3. Диференціал функції та його застосування

За визначенням похідної $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$. Це означає, що з точки зору границь величина y' є граничним значенням величини $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, а тому $\frac{\Delta y}{\Delta x} - y' \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Звідси витікає, що $\frac{\Delta y}{\Delta x} - y'$ є нескінченно малою величиною α, тобто

$\frac{\Delta y}{\Delta x} - y' = \alpha \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha \Rightarrow \Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. В силу неперервності функції всі складові прямують до нуля, але величина $\alpha \cdot \Delta x$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж Δx та Δy ($\alpha \cdot \Delta x \to 0$ набагато швидше, ніж Δx та Δy).

В математиці величину $y' \cdot \Delta y$ називають ***диференціалом функції*** і позначають dy, тобто $dy = y' \cdot \Delta x$. Отже, диференціал функції є добутком похідної на приріст аргументу. З (рис. 6.1.) видно, що $\Delta x = AC$, а y' за визначенням є $tg\varphi$. Тому $dy = |AC| \cdot tg\varphi$. Але як відомо з прямокутного трикутника, $tg\varphi = \frac{|DC|}{|AC|}$, тому $dy = |AC| \cdot \frac{|DC|}{|AC|} = |DC|$. З рис. 6.1. бачимо, що $|DC|$ є приростом дотичної AD. Якщо x_0 зросте на Δx, то дотична зросте від значення в точці A до значення в точці D, тому DC є приростом дотичної.

Розглянемо функцію $y = x$. Для неї $y' = x' = 1$ і $\Delta y = \Delta x$, тому з формули $dy = y'\Delta x$ одержимо: $dx = 1 \cdot \Delta x$, тому $\Delta x = dx$ точно, а не наближено. В зв'язку з цим можемо у формулі $dy = y' \cdot \Delta x$ замінити Δx на dx. Одержимо $dy = y'dx$, звідки $y' = \frac{dy}{dx}$ є позначенням похідної за Лейбніцем або, як кажуть, у диференціальній формі. Дане позначення похідної необхідно запам'ятати.

Приклад: знайти диференціал функції $y = x^2 + 3x + 4$.

$y' = \frac{dy}{dx} = 2x + 3$. Тоді $dy = (2x+3)dx$.

Застосування диференціала до наближених обчислень

Для більшості функцій існують значення x, при яких обмеження самої функції викликає певні труднощі. Наприклад: $\sqrt{37}$, $\sin 32°$, $2^{1,73}$ тощо. Нехай x_0 – одне із значень, для якого $y_0 = f(x_0)$ обчислюється елементарно. Існує x_1 – значення, для якого $y_1 = f(x_1)$ знаходиться з великими труднощами. Величина x_1 відрізняється від x_0 на величину Δx; $x_1 = x_0 + \Delta x$. Тоді між y_0 та y_1 існує свій приріст Δy, тобто $y_1 = y_0 + \Delta y$. Якби ми знали значення Δy, то y_1 могли б знайти без проблем. З поняття диференціала відомо, що при малих значеннях Δx приріст функції Δy наближено дорівнює приросту дотичної dy, проведеної до $f(x)$ в точці x_0. Тому $y_1 = y_0 + \Delta y \approx y_0 + dy = y_0 + y' \cdot \Delta x$, де y' знаходиться як тангенс кута нахилу дотичної в точці x_0. Тому y' є конкретним значенням похідної в точці x_0. Маємо робочу формулу:

$$y_1 \approx y_0 + y' \cdot \Delta x, \tag{6.2}$$

точність якої збільшується зі зменшенням Δx.

<u>Приклад:</u> Знайти наближено значення функції:

а) $y = \sqrt[3]{5x^2 + 10x + 5}$ при $x = 4{,}03$.

б) $\sin 63^\circ$.

Розв'язання:

Значення функції обчислимо за формулою: $y \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x$.

а) $y = \sqrt[3]{5x^2 + 10x + 5}$ при $x = 4{,}03$.

Нехай $x_0 = 4$, тоді $\Delta x = x - x_0 = 0{,}03$.

$y(x_0) = \sqrt[3]{5 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 + 5} = \sqrt[3]{125} = 5$;

$y' = \dfrac{10x + 10}{3\sqrt[3]{(5x^2 + 10x + 5)}}$; $y'(4) = \dfrac{10 \cdot 4 + 10}{3\sqrt[3]{(5 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 + 5)}} = \dfrac{50}{3 \cdot 25} = \dfrac{2}{3}$;

$y \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x = 5 + \dfrac{2}{3} \cdot 0{,}03 = 5{,}01$.

б) $\sin 63^\circ$.

Нехай $y = \sin x$, $x = 63^\circ$, $x = 60^\circ$, тоді $\Delta x = x - x_0 = 3^\circ = \dfrac{3 \cdot 3{,}14}{180} = 0{,}052$.

$y(x_0) = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$;

$y'(60^\circ) = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$;

Отже, $\sin 60^\circ \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x = 0{,}866 + 0{,}5 \cdot 0{,}052 = 0{,}892$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти наближено значення функцій:

6.101. $y = \sqrt[5]{4x^2 - 2x - 1}$, $x = 0{,}98$;

6.102. $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 3x + 2}$, $x = 1{,}99$;

6.103. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + 10x - 8}}$, $x = 1{,}04$;

6.104. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9x - 1}}$, $x = 1{,}24$;

6.105. $y = \sqrt[3]{9x^2 + 8x + 10}$, $x = 1{,}12$;

6.106. $y = \sqrt{7x^3 + 12x^2 + 9x - 3}$, $x = 0{,}95$;

6.107. $\sqrt[3]{129}$;

6.108. $\sqrt{53}$;

6.109. $1{,}005^8$;

6.110. $\sqrt[5]{31}$;

6.111. $\sin 44^\circ$;

6.112. $tg 47^\circ$;

6.113. $ctg 85^\circ$;

6.114. $\sin 65^\circ$;

6.115. $\cos 29^\circ$;

6.116. $\cos 62^\circ$;

6.117. $4{,}03^5$;

6.118. $1{,}11^3$.

Індивідуальне завдання

Знайти наближено значення функцій:

а) $y=\sqrt[n]{5x^2-3x-1}$, $x=1-0{,}001\cdot n$;

б) $\sin(n^\circ)$ та $\cos(30+n)^\circ$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

§4. Похідні та диференціали вищих порядків

Як показує таблиця похідних елементарних функцій, похідна $y'=f'(x)$ − також є функцією, від якої можливо знайти похідну. Така похідна від похідної $(y')'=(f'(x))'$ називається похідною другого порядку або другою похідною і позначається y''.

Наприклад: якщо $y=\sin x$, то $y'=\cos x$, а $y''=-\sin x$. Похідна від другої похідної є третьою похідною або похідною третього порядку y''' і т. д. Для похідної, починаючи з четвертої, введено позначення $y^{(4)}$, $y^{(5)}$ і т. д. Похідна n-го порядку позначається $y^{(n)}$. Відповідно до похідних існують і диференціали другого, третього і т.д. порядків, які мають позначення d^2y, $d^3y,\dots d^ny$. В диференціальній формі похідні записуються:

$$y''=\frac{d}{dx}(y')=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{(dx)^2}=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Вираз dx^2 не є диференціалом від x^2, а означає $(dx)^2$, оскільки dx є єдиним значком,який означає поняття диференціал. Наприклад, вираз $(a)^2=a^2$. До речі, диференціал від x^2 має вигляд: $d(x^2)=2xdx$. Похідна третього порядку: $y'''=\dfrac{d^3y}{dx^3}$, похідна n-го порядку: $y^{(n)}=\dfrac{d^ny}{dx^n}$, тому $d^2y=y''dx^2$, $d^3y=y'''dx^3$, $d^ny=y^{(n)}dx^n$.

Приклад: знайти $y^{(5)}$,та d^5y функції $y=tgx$. Маємо:

$$y'=1+tg^2x\Rightarrow y''=(1+tg^2x)'=2tgx\cdot tg'(x)=2tgx(1+tg^2x)=2tgx+2tg^3x\Rightarrow$$

$$y''=2(1+tg^2x)+2\cdot 3tg^2x\cdot tg'x=2(1+tg^2x)+6tg^2x\cdot(1+tg^2x)=$$

$$y'''=2(1+tg^2x)(1+3tg^2x)=2+2tg^2x+6tg^2x=2+8tg^2x+6tg^4x$$

$$d^3y=\left(2+8tg^2x+6tg^4x\right)dx^3.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти похідні двадцятого порядку:

6.119. $y=\sin x$;

6.120. $y=\cos x$;

6.121. $y = e^{2x}$;

6.122. $y = \ln x$;

6.123. $y = 5^{x}$;

6.124. $y = \sin 10x$;

6.125. $y = \cos 3x$;

6.126. $y = \ln 7x$.

Знайти диференціали четвертого порядку:

6.127. $y = tg2x$;

6.128. $y = ctg3x$;

6.129. $y = e^{7x}$;

6.130. $y = \ln^{4} x$;

6.131. $y = \sqrt{x}$;

6.132. $y = \frac{1}{x}$;

6.133. $y = x^{5}$;

6.134. $y = arctgx$.

Індивідуальне завдання

Знайти похідні третього порядку для вказаних функцій:

а) $y = 2x^{n} - \frac{1}{n}x^{2n} - 4n$;

б) $y = \sqrt[n]{x^{n-1}} + \frac{6}{x^{n}} - nx$;

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 5. Розкриття невизначеностей за допомогою похідних (правило Лопіталя)

Нехай на $[a;b]$ задані дві гладенькі функції $y_1 = f_1(x)$ та $y_2 = f_2(x)$, які дорівнюють нулю в точці $x = c$ (їх відношення − невизначеність виду $\frac{0}{0}$). Якщо існує граничне відношення похідних цих функцій $\lim\limits_{x \to c} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = A$, то до цього ж граничного значення прямує і відношення самих функцій, тобто:

$$\lim_{x \to c} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}.$$

Доведення:

Розглянемо відношення функцій $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$. Оскільки $f_1(c) = f_2(c) = 0$, то це відношення можемо записати:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x) - 0}{f_2(x) - 0} = \frac{f_1(x) - f_1(c)}{f_2(x) - f_2(c)}.$$

Виберемо інтервал $[c;x]$ (рис. 6.2.) всередині інтервалу $[a;b]$. Отже , на $[c;x]$ обидві функції гладенькі.

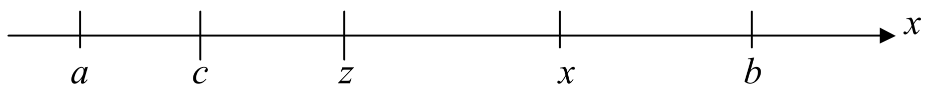

Рис. 6.2.

Згідно з теоремою Коші на цьому інтервалі існує хоч одна така точка Z, для якої справедливо: $\dfrac{f_1(x)-f_1(c)}{f_2(x)-f_2(c)}=\dfrac{f_1'(z)}{f_2'(z)}$.

Звернемо увагу на те, що Z обов'язково знаходиться всередині $[c;x]$. Нехай $x\to c$ (точка C закріплена). Тоді і точка Z прямуватиме до точки C за вищезазначеної умови. Отже, $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1(x)-f_1(c)}{f_2'(x)-f_2(c)}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$.

Якщо в цьому рівнянні права границя існує і дорівнює A, тобто $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}=A$, то до цього ж значення прямує й ліва границя, тобто $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1(x)-f_1(c)}{f_2(x)-f_2(c)}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}=A$.

Остаточно: якщо $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{0}{0}$ і $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}=A$, то $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$.

Розглянемо випадок $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$ легко призвести до невизначеності виду $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\dfrac{1}{f_2(x)}}{\dfrac{1}{f_1(x)}}\Rightarrow\lim_{x\to c}\frac{\dfrac{1}{f_2(x)}}{\dfrac{1}{f_1(x)}}=\frac{\dfrac{1}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}.$$

В зв'язку з цим правило Лопіталя можемо використовувати для розкриття невизначеності типу $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Розглянемо декілька прикладів.

<u>Приклад:</u> Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

<u>Приклад:</u> Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-13}{5x^2+8x+9}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-13}{5x^2+8x+9}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+4x-13)'}{(5x^2+8x+9)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{10x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x+4)'}{(10x+8)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Правило Лопіталя можна застосовувати до невизначеностей виду: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$, перевівши їх відповідними діями до невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$. Розглянемо це на прикладах:

<u>Приклад:</u> Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x^{\sin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Розв'язання:

а) $$\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-2x}=\infty\cdot 0=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^{2x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\cdot e^{2x}}=\frac{1}{2\cdot e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)'}{(x\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x-x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(\sin x-x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x-\cos x+x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x}=-\frac{1}{\infty}=0.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x^{\sin x}=\left[0^{0}\right]=$ [використовуємо формулу $u^{v}=e^{v\ln u}$] $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x\ln\sin x}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln\sin x}.\quad \lim_{x\to 0}\sin x\cdot\ln\sin x=\left[0\cdot(-\infty)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{\sin x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin x)'}{(\frac{1}{\sin x})'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

Тоді $e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}=e^{0}=1$.

г) $$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}=(1^{\infty})=\lim_{x\to 0}e^{\frac{2}{x}\ln(1-3x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln(1-3x)};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln(1-3x)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(2\ln(1-3x))'}{(x)'}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-3x}\cdot(-3)}{1}=-6\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-3x}=-6.$$

Тоді $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}} = e^{-6}$.

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{x} = (\infty^{0}) = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to 0} x\ln\frac{1}{x} = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0}\frac{(-\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^{2}}} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln\frac{1}{x}} = e^{0} = 1$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти границі за правилом Лопіталя:

6.135. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^{4}+5x-8}{6x^{4}+8x^{2}+9x-3}$;

6.136. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{3}+x^{2}+x-4}{x^{3}-x^{2}-7x+6}$;

6.137. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^{4}+x^{3}-24}{3x^{2}+2x-16}$;

6.138. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{3}}$;

6.139. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^{2}}-\frac{1}{2xtgx}\right)$;

6.140. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\ln(x-2)$;

6.141. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,2x}$;

6.142. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x-1^{\frac{1}{x-2}}\right)$.

Запитання до розділу VI:

1. Математичне визначення похідної.
2. Геометричне визначення похідної.
3. Механічне визначення похідної.
4. Яка дія називається диференціюванням?
5. Похідна від суми, добутку та частки.
6. Похідні елементарних функцій.
7. Похідна складеної функції.
8. Похідна неявної функції.
9. Математичне визначення диференціала.
10. Геометричне визначення диференціала.
11. Зв’язок між похідною та диференціалом.
12. Застосування диференціала до наближених обчислень.
13. Похідні вищих порядків.
14. Диференціали вищих порядків.
15. Правило Лопіталя.
16. Які обмеження накладаються на застосування правила Лопіталя.