III. ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ПЛОЩИНІ

Аналітична геометрія – це наука, яка вивчає методи розв’язування геометричних задач методами аналізу. Основи аналітичної геометрії заклав французький математик Р. Декарт.

§1. Системи координат

Основою аналітичної геометрії є система координат. Систем координат існує багато, але найбільш розповсюджені прямокутна, або декартова система та полярна системи.

а) Декартова система. На площині розглядають два взаємно перпендикулярні вектори: горизонтально розташований вектор Ox (вісь Ox) та вертикально розташований вектор Oy (вісь Oy). Точка O є початком координат. Обидві осі мають однаковий або різний масштаб, за допомогою якого для кожної точки на осях знаходиться відстань від початку координат.

Декартова система дозволяє розв’язувати дві задачі:

а) знаходження координат невідомої точки шляхом проведення перпендикулярів на осі координат (рис. 3.1.а);

б) знаходження місця відомої точки на площині як перетину перпендикулярів, побудованих на осях у точках, що відповідають координатам шуканої точки (рис. 3.1.б).

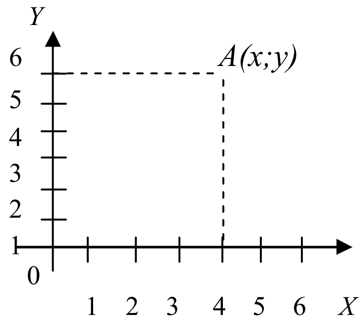


Рис. 3.1.а)

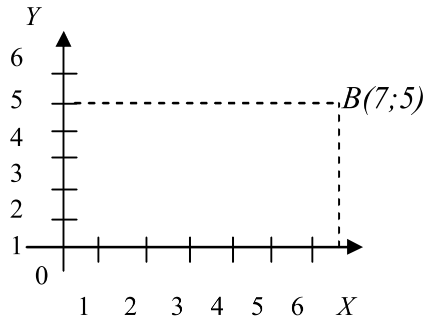


Рис. 3.1.б)

Координатна система дає можливість кожній точці площини поставити у відповідність два числа – координати точки. Перше число є проекцією точки на вісь Ox, а друге – проекцією на вісь Oy. Ці координати можуть бути відомими або невідомими. Якщо координати точки M невідомі, то цю точку позначають $M(x;y)$. Якщо ж вони відомі, то позначають $M(x_1;\, y_1)$ або $M(x_M;\, y_M)$, тобто x та y мають при собі числові, або буквені індекси.

б) Полярна система. Ця система складається з деякої точки O, що називається полюсом, та горизонтальної осі Ox, що називається полярною віссю. Будь-яка точка M лежить на прямій $OM=r$, яка називається радіус-вектором і утворює з полярною віссю кут φ, який в полярній системі є аргументом.

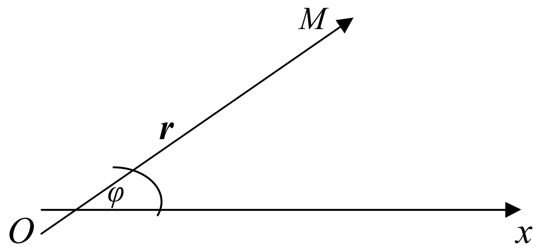


Рис. 3.2.

Величини r і φ називаються полярними координатами. Точка M в полярних координатах записується у вигляді $M(r;\ \varphi)$. Форми запису координат у декартовій і полярній системах співпадають, тому завжди вживають додаткові пояснення щодо системи координат.

Рис. 3.2. показує зв'язок між полярними та декартовими системами.

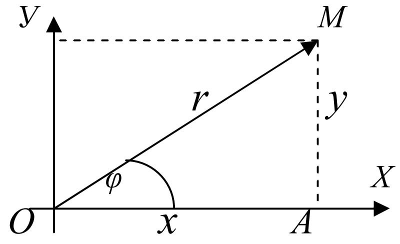


Рис. 3.3.

З трикутника OMA видно, що:

$$x = r \cdot cos\varphi\,,\ x = r \cdot sin\varphi\,,\ tg\varphi = \frac{y}{x},\ r = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

§2. Найпростіші задачі, що розв'язуються за допомогою методу координат

1. Відстань між двома точками

Нехай задано відрізок AB з координатами кінців відрізка $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$.

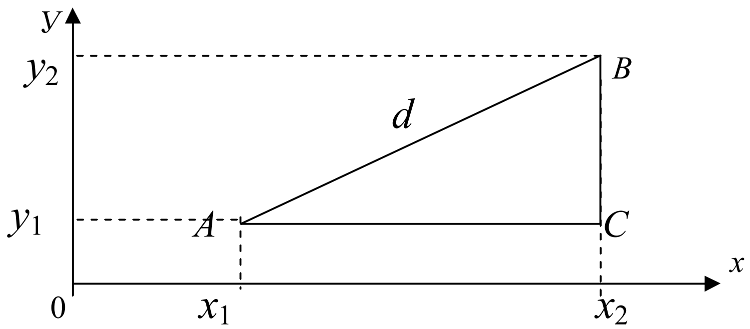


Рис. 3.4.

З трикутника ABC маємо: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$. Звідси:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (3.1)$$

<u>Приклад:</u> Знайти довжину відрізка AB, якщо $A(3; 5)$ і $B(7; 8)$.

$$d=\sqrt{(7-3)^2+(8-5)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

2. Поділ відрізка пополам

Нехай задано відрізок *AB* з координатами кінців відрізка $A(x_1;y_1)$ та $B(x_2;y_2)$. Точка *C* є серединою відрізка *AB*. Тоді координати точки *C* можна визначити за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2} \tag{3.2}$$

<u>Приклад:</u> Знайти середину відрізка *AB*, якщо *A*(3; 5) і *B*(7; 8).

$$x_c=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+7}{2}=5;\ y_c=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{5+8}{2}=6{,}5.$$

Отже, координати точки *C* (5; 6,5).

3. Поділ відрізка в даному відношенні

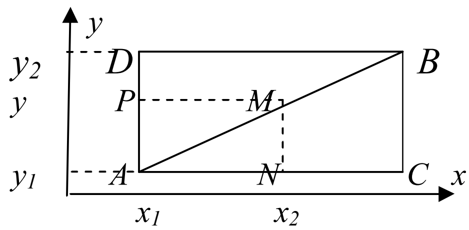


Рис. 3.5.

Необхідно відрізок *AB* поділити в заданому відношенні |*AM*|/|*MB*|=*λ*. Грецька літера *λ* читається як “лямбда”(“ламбда”).

Як видно з рис. 35, Δ *ABC* і Δ *AMN* подібні, тому |*AM*|/|*MB*|=|*AN*|/|*NC*|. Координати точки *M* невідомі, але відомо, що точка *M* ділить відрізок у заданому відношенні $\lambda=\frac{|AM|}{|MB|}$. З рис. 35 слідує, що $|AM|=x-x_1$ і $|NC|=x_2-x_1$, тому $\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}\Rightarrow x=\frac{x+\lambda x}{1+\lambda}x$. З подібності Δ *ABD* і Δ *AMP* аналогічно знаходимо, що $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$. Отже, маємо формули:

$$x=\frac{x+\lambda x}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{3.3}$$

<u>Приклад:</u> Знайти координати точки *M*, яка ділить відрізок *AB* у відношенні $\frac{1}{3}$, якщо *A* (4; 8), *B* (12; −3).

Маємо: $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{4+\frac{1}{3}\cdot 12}{1+\frac{1}{3}}=\frac{4+4}{\frac{4}{3}}=\frac{8}{4}\cdot 3=6.$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{8 - \frac{1}{3}\cdot 3}{1+\frac{1}{3}} = \frac{8-1}{\frac{4}{3}} = \frac{7}{4}\cdot 3 = \frac{21}{4}.$$

Отже координати точки М (6; 5,25).

4. Площа трикутника

Нехай задано трикутник ABC з координатами вершин $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ та $C(x_3; y_3)$.

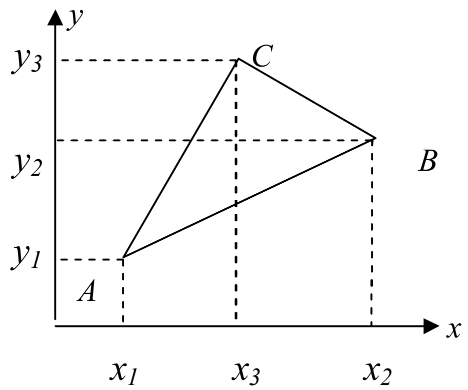


Рис. 3.6.

В ΔABC виберемо порядок обходу точок проти годинникової стрілки (з осі Ox потрапити на вісь Oy найпростішим шляхом можна поворотом осі Ox проти годинникової стрілки). Відповідно до цього вибору, якщо точка A позначена першою, то другою буде точка B, а не C. Площа ΔABC може бути знайдена, якщо від суми площ трапецій x_1ACx_3 і x_3CBx_2 відняти площу трапеції x_1ABx_2:

$$S = \frac{Ax_1 + Cx_3}{2}\cdot(x_3 - x_1) + \frac{Cx_3 + Bx_2}{2}\cdot(x_2 - x_3) - \frac{Ax_1 + Bx_2}{2}\cdot(x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{y_1 + y_3}{2}\cdot(x_3 - x_1) + \frac{y_3 + y_2}{2}\cdot(x_2 - x_3) - \frac{y_1 + y_2}{2}\cdot(x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3).$$

Для обчислення існує така схемотехніка: будуючи трикутник, першою записуємо точку A, потім з неї проводимо пряму до точки B, далі від точки B до точки C, а останньою проводимо пряму від точки C до точки A. Саме в такому порядку виписуємо стовпчиком координати точок. Одержимо схему:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1).$$

$$-\qquad\qquad +$$

Тоді площа трикутника обчислюється за такою схемою:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_1) \qquad (3.4)$$

Приклад: Обчислити площу трикутника $A(2;7)$, $B(12;1)$, $C(6;15)$.

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 12 & 1 \\ 6 & 15 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(2+180+42-84-6-30\right)=34\hat{e}\hat{a}.\hat{\imath}\ddot{a}\,.$$

За подібною схемою обчислюється площа будь-якого многокутника, але для правильного обходу точок необхідно мати рисунок.

§3. Види рівняння прямої

1. Кутовий коефіцієнт прямої

Озн.: Рівнянням прямої називається такий математичний зв'язок між змінними x та y, взятими зі шкали дійсних чисел, при якому кожному значенню x відповідає одне і тільки одне значення y.

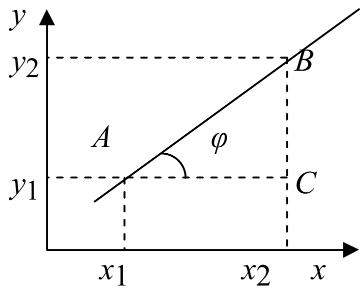


Рис. 3.7.

З $_\Delta ABC$ видно, що $tg\varphi=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Озн. В аналітичній геометрії тангенс кута нахилу прямої до осі Ox називається кутовим коефіцієнтом прямої і позначається через k. Отже:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad (3.5.)$$

Приклад: Знайти кутовий коефіцієнт прямої AB, якщо $A(6;\ 8)$; $B(-10;\ 12)$.

$k=\dfrac{-10-6}{12-8}=\dfrac{-16}{4}=-4$. Пряма нахилена до осі Ox під тупим кутом.

2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через задану точку

Виберемо на прямій довільну точку M з невідомими координатами x та y. Тоді для кутового коефіцієнта можемо записати:

$$k = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = k(x - x_1).$$

Отже, рівняння прямої з відомим кутовим коефіцієнтом, яка проходить через одну задану точку, має канонічний вигляд:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (3.6.)$$

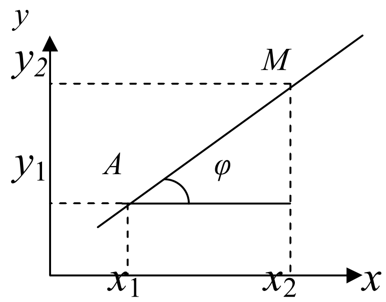


Рис. 3.8.

Приклад: Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(2;\ 4)$ з заданим кутовим коефіцієнтом $k=3$.

Згідно формули (3.6) одержимо: $y - 4 = 3(x - 2)$.

3. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Використаємо рівняння прямої через одну задану точку $y - y_1 = k(x - x_1)$.

При відомих координатах точок A і B маємо:

$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Тоді $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Отже, рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки, має вигляд:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3.7)$$

Рівняння (3.7) завдяки відсутності кутового коефіцієнта і необхідності користуватись таблицею тангенсів відноситься до найбільш вживаних на практиці.

Приклад: Записати рівняння прямої, що проходить через точки A та B з координатами $A(2;\ 3)$; $B(6;\ 8)$.

$$\frac{y-3}{8-3} = \frac{x-2}{6-2} \Rightarrow \frac{y-3}{5} = \frac{x-2}{4}.$$

4. Рівняння прямої у загальному вигляді

Алгебраїчна форма рівняння першого порядку має вигляд:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (3.8)$$

До цієї форми зводиться будь-яке з попередніх рівнянь.

З рівняння у загальному вигляді можемо отримати рівняння прямої, яка відтинає на осі ординат відомий відрізок, а також кутовий коефіцієнт прямої:

$$By = -Ax - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

$$\text{звідки} \quad k = -\frac{A}{B} \tag{3.9}$$

Висновок. Якщо рівняння задане в загальному вигляді, то тангенс кута нахилу прямої визначається відношенням коефіцієнта при *x* до коефіцієнта при *y*, взятому з оберненим знаком;

<u>Приклад:</u> Знайти кутовий коефіцієнт прямої, що задана рівнянням $3x - 4y - 12 = 0$.

З формули (3.9.) маємо: $k = \frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$.

5. Рівняння прямої з відомим кутовим коефіцієнтом, яка відтинає на осі *Oy* відомий відрізок

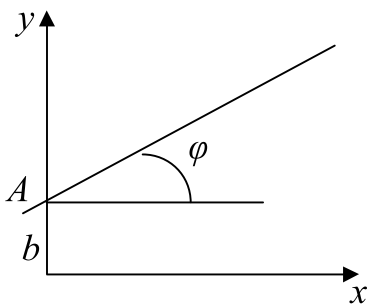


Рис. 3.8.

Координати точки *A* (рис. 3.8) будуть: *A*(0; *b*). Використовуючи формулу (3.6), одержимо: $y - b = k(x - 0) \Rightarrow y = kx + b$. Отже, рівняння прямої з відомим кутовим коефіцієнтом, яка відтинає на осі *Ox* відомий відрізок, має вигляд:

$$y = kx + b \tag{3.10}$$

<u>Приклад:</u> Записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = 3$, що відтинає по осі *Oy* 6 одиниць.

З формули (3.10.) маємо: $y=3x+6$.

6. Рівняння прямої, яка відтинає на осях координат відомі відрізки

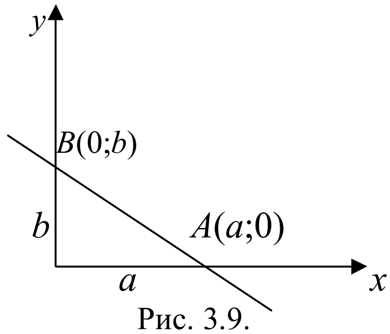


Рис. 3.9.

Знаючи довжини відрізків a і b (рис. 3.9.), знаходимо координати точок A і B: $A(a;\ 0)$, $B(0;\ b)$. Використовуючи рівняння прямої через дві задані точки, одержимо:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}\Rightarrow\frac{x}{-a}+1=\frac{y}{b}\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Отже, рівняння прямої , яка відтинає на осях координат відомі відрізки і коротко називається рівнянням прямої у відрізках і має вигляд:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (3.11)$$

<u>Приклад:</u> Пряма відсікає 5 одиниць по осі Ox і 10 одиниць по осі Oy. Записати рівняння прямої.

Згідно (3.11.) рівняння прямої буде мати вигляд: $\frac{x}{5}+\frac{y}{10}=1$.

§4. Перетин прямих

1. Координати точки перетину прямих

Якщо рівняння прямих, що перетинаються в точці $A(x_0;y_0)$, задані в загальному вигляді, то точка перетину цих прямих є точкою, координати якої є такими, що задовольняють обидва рівняння і знаходяться з розв'язування системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \qquad (3.10)$$

<u>Приклад:</u> Знайти точку перетину прямих, що задаються рівняннями $3x+5y-8=0$ та $7x-4y-3=0$.

Координати точки перетину прямих знаходимо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x+5y=8 \\ 7x-4y=3 \end{cases}.$$

Систему обчислимо методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 35 = -47;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -32 - 15 = -47; \ \Delta_{\acute{o}} = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 56 = -47.$$

З формул Крамера маємо: $x_0 = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 1$; $y_0 = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = 1$. Отже, $A(1;\ 1)$.

2. Кут між двома прямими

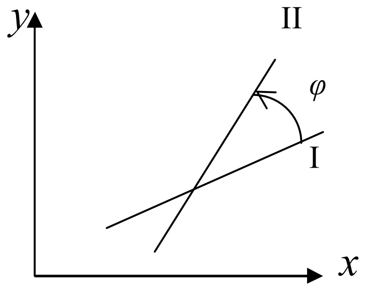


Рис. 3.9.

Кут між прямими знаходимо за годинниковою стрілкою від прямої I до прямої II. Із тригонометричних формул відомо: $tg(\beta - \alpha) = \dfrac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$, де β і α – кути нахилу прямих I і II. Оскільки $tg\alpha = k_1$,а $tg\beta = k_2$, то:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (3.11.)$$

<u>Приклад</u>: Знайти кут між прямими $3x + 5y - 8 = 0$ та $7x - 4y - 3 = 0$.

З формули (3.9) маємо: $k_1 = -\dfrac{3}{5}$ і $k_2 = -\dfrac{7}{4}$.

Тоді $tg\varphi = \dfrac{-7/4 - (-3/5)}{1 + (-7/4)\cdot(-3/5)} = \dfrac{3/5 - 7/4}{1 + 21/20} = \dfrac{(12 - 35)/20}{41/20} = \dfrac{-23}{41}$.

З тригонометричних таблиць маємо $\varphi \approx 151^\circ$

3. Умова паралельності прямих

Якщо прямі паралельні, то кут між ними φ=0. Тоді з умови $\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0$ маємо: $k_2 - k_1 = 0$. Отже, якщо прямі паралельні, то

$$k_1 = k_2. \qquad (3.12.)$$

<u>Приклад:</u> Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1;\ 2)$ і паралельна прямій $2\tilde{o} + 3\acute{o} - 8 = 0$.

Так, як прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні $k_1 = k_2 = -\frac{2}{3}$, тоді за рівнянням (5): $y - y_1 = k(x - x_1)$, тобто $y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$.

4. Умова перпендикулярності прямих

Якщо для прямих, що перетинаються, $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$,то $ctg\varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}$. Для перпендикулярних прямих $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тобто $ctg\frac{\pi}{2} = 0$, а значить, $1 + k_1 k_2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow k_2 = \frac{-1}{k_1}$.

Отже, якщо прямі перпендикулярні, то: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ (3.13.)

Приклад: Знайти рівняння перпендикуляра до прямої $3x - 4y + 1 = 0$, який проходить через точку $A(2; 7)$.

З умови перпендикулярності $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$, тоді за рівнянням (3.6.):

$$y - y_1 = k(x - x_1),\ \text{тобто}\ y - 7 = \frac{4}{3}(x - 2).$$

5. Відстань від точки до прямої

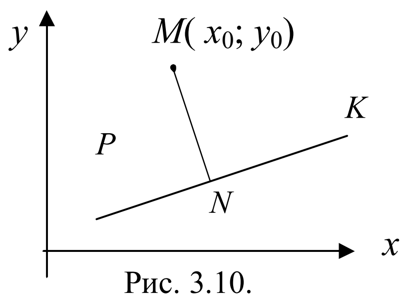


Рис. 3.10.

Відстань від точки до прямої знаходиться за перпендикуляром, тому спочатку треба знайти рівняння перпендикуляра *MN*, далі розв’язати систему рівнянь *MN* та *PK* і знайти координати точки *N*, після чого знайти довжину відрізка *MN*. Виконавши вказані дії, одержимо формулу для відстані від точки *M* до прямої *PK*:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.14.)$$

Чисельник взято за модулем, тому що відстань є невід’ємним числом.

Приклад: Знайти відстань від точки $A(2; 3)$ до прямої $3x+4y+7=0$.

Згідно формулі (3.14.) знаходимо: $d = \dfrac{|3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{25}{\sqrt{25}} = 5$.

Розглянемо узагальнюючий приклад.

Приклад: Дано координати вершин трикутника $\Delta A_1A_2A_3$: A_1 *(0; 6)*; A_2 *(3; 2)*; A_3 *(5; 3)* і точку A_4 *(2; 1)*. Побудувати рисунок в системі координат.

Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2;

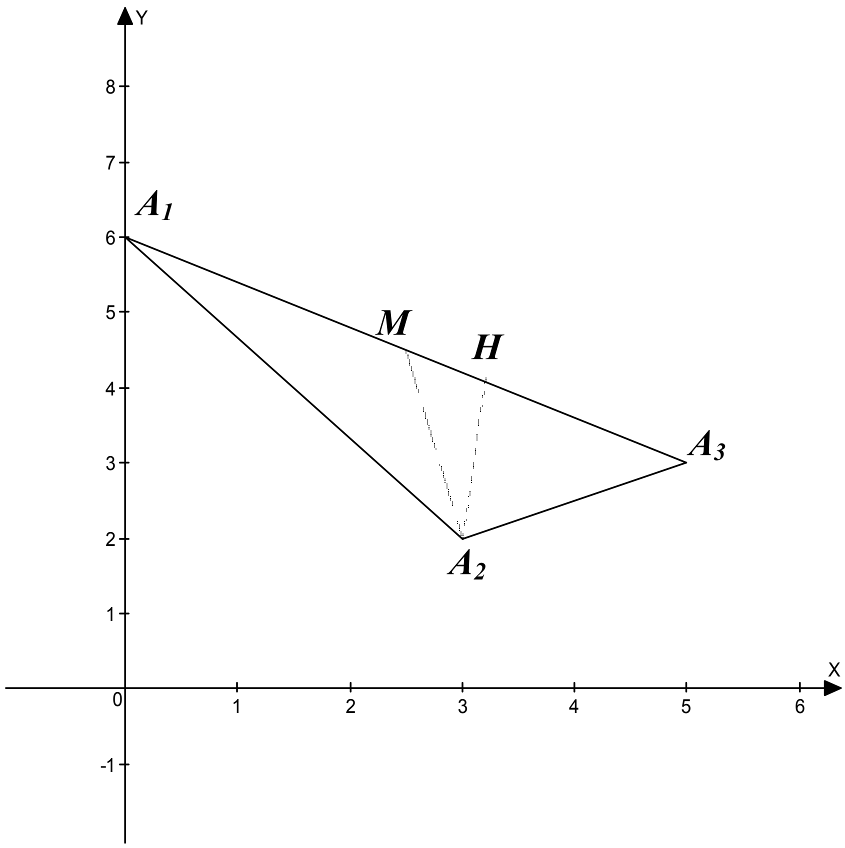
б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

Розв'язання: Побудуємо рисунок в системі координат:



а) Запишемо рівняння прямої A_1A_2:

Рівняння прямої, що проходить через дві точки, має вигляд: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Координати точок A_1 *(0; 6)* і A_2 *(3; 2)* відомі, тому рівняння набуватиме вигляду:
$\dfrac{x-0}{3-0} = \dfrac{y-6}{2-6}$, або після спрощення: $4x + 3y + 18 = 0$.

б) Запишемо рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2:
Для запису рівняння висоти A_2H, що перпендикулярна стороні A_1A_3, запишемо рівняння сторони A_1A_3, користуючись попередньою формулою:

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Координати точок *$A_1$ (0; 6)* і *A_3 (5; 3)* відомі, тому рівняння набуватиме вигляду: $\dfrac{x-0}{5-0}=\dfrac{y-6}{3-6}$, або після спрощення: $3x+5y-30=0$.

Кутовий коефіцієнт цієї прямої дорівнює: $k_{A_1A_3}=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{3}{5}$. Кутовий коефіцієнт перпендикулярної прямої: $k_{A_1A_3}=-\dfrac{1}{k_{A_1A_3}}=-\left(-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{5}{3}$.

Рівняння прямої, що проходить через точку *A_2 (3; 2*) з кутовим коефіцієнтом $k_{A_2H}=\dfrac{5}{3}$ має вигляд: $y-y_2=k(x-x_2)$, або $y-2=\dfrac{5}{3}\cdot(x-3)$. Після перетворення рівняння висоти набуває вигляду: $5x-3y-9=0$.

Для запису рівняння медіани *A_2M* знайдемо координати точки *M*, як середини сторони *A_1A_3*: $x_м=\dfrac{x_{A_1}+x_{A_3}}{2}=\dfrac{0+5}{2}=2{,}5$, $y_м=\dfrac{y_{A_1}+y_{A_3}}{2}=\dfrac{6+3}{2}=4{,}5$.

Запишемо рівняння медіани, як рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Так як координати точок *A_2* і *M* відомо, то: $\dfrac{x-3}{2{,}5-3}=\dfrac{y-2}{4{,}5-2}$. Після спрощення рівняння медіани: $5x+y-17=0$.

в) Знайдемо <u>тангенс кута A_2</u>, обчисливши кутові коефіцієнти прямих *A_1A_2* і *A_2A_3*. Рівняння прямої *A_1A_2*, з попередніх обчислень: $4x+3y+18=0$, тоді $k_{A_1A_2}=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{4}{3}$. Кутовий коефіцієнт прямої *A_2A_3* обчислимо за формулою: $k_{A_2A_3}=\dfrac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=\dfrac{2-3}{3-5}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$.

Кут між прямими знаходимо за годинниковою стрілкою, користуючись формулою: $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\dfrac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{11}{6}:\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{2}=5{,}5$. Тоді, користуючись чотиризначними таблицями маємо: $\varphi=78^\circ42'$.

г) Визначимо <u>площу трикутника $A_1A_2A_3$:</u>

$$S=\pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 6\\ 3 & 2\\ 5 & 3\\ 0 & 6\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\left(0\cdot2+3\cdot3+5\cdot6-3\cdot6-5\cdot2-0\cdot6\right)=\frac{11}{2}=5{,}5\text{кв.од.}$$

д) <u>Відстань від точки A_4 *(2; 1)* до прямої A_1A_2,</u> $\underline{4x+3y+18=0}$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\cdot2+3\cdot1+18|}{\sqrt{16+9}}=\frac{29}{5}=5{,}8\text{од.}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

3.1 Які з точок *M (3; 5)*, *N (2; 7)*, *P (–1; –3)*, *Q (–2; 0)*, *R (3; –5)* лежать на прямій $y=2x-1$.

3.2. Загальне рівняння прямої $3x-4y+12=0$ представити у вигляді:

а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях; в) побудувати пряму.

3.3. Знайти рівняння сторін трикутника, вершини якого є точки *A (1; –1), B (3; 5;), C (–7; 11)*.

3.4. Знайти кути трикутника, сторони якого задано рівняннями: $5x-2y-11=0$; $x+2y+5=0$; $x-2y+1=0$.

3.5. Знайти площу трикутника, сторони якого задано рівняннями: $5x-2y-11=0$; $x+2y+5=0$; $x-2y+1=0$.

3.6. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 *(2; 5)* паралельно прямій $3x-4y+15=0$.

3.7. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку P_0 *(5; –1)* паралельно прямій $3x-7y+14=0$.

3.8. Задана пряма $2x+3y+4=0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку *M (2; 1)*:

1) паралельно заданій прямій;

2) перпендикулярно до заданої прямої.

3.9. Знайти відстань між двома паралельними прямими: $3x+4y-12=0$, $3x+4y+13=0$.

3.10. Знайти точку *M*, яка симетрична точці *P(–6; 13)* відносно прямої $2x-3y-3=0$.

3.11. Знайти точку *K*, яка симетрична точці *P(8; –9)* відносно прямої, що проходить через точки *A (3; –4), B (–1; –2)*.

3.12. Задано три вершини паралелограма *A (–3; 1), B (3; 3), C (4; –1)*. Знайти координати четвертої вершини.

3.13. Задано вершини трикутника *A (12; –4), B (0; 5), C (–12; –11)*. Знайти:

а) довжини сторін;

б) рівняння сторін;
в) рівняння висоти, що проведена з вершини В;
г) довжину цієї висоти;
д) рівняння медіани, що проведена з вершини А;
е) точку перетину висоти, що проведена з вершини В, та медіани, що проведена з точки А;
ж) кут С;
з) площу трикутника.

Індивідуальне завдання

Дано координати вершин трикутника $\Delta A_1A_2A_3$ і точку A_4. Знайти:
а) рівняння прямої A_1A_2;
б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;
в) тангенс кута A_2;
г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;
д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2;
е) побудувати рисунок в системі координат.

1. $A_1\ (1;\ 2);\ A_2\ (-3;\ 2);\ A_3\ (-5;-3);\ A_4\ (2;\ -1)$.
2. $A_1\ (2;\ 1);\ A_2\ (-1;\ 2);\ A_3\ (-2;\ -3);\ A_4\ (1;\ -6)$.
3. $A_1\ (2;\ 2);\ A_2\ (-2;\ 2);\ A_3\ (-3;\ -3);\ A_4\ (2;\ -4)$.
4. $A_1\ (1;\ 1);\ A_2\ (-4;\ 2);\ A_3\ (-4;-3);\ A_4\ (2;\ -7)$.
5. $A_1\ (1;\ 6);\ A_2\ (-3;-2);\ A_3\ (-5;\ 3);\ A_4\ (2;\ -1)$.
6. $A_1\ (2;\ 6);\ A_2\ (-3;\ -1);\ A_3\ (-5;\ 2);\ A_4\ (1;\ -6)$.
7. $A_1\ (3;\ 6);\ A_2\ (-2;\ -2);\ A_3\ (-5;\ 1);\ A_4\ (2;\ -3)$.
8. $A_1\ (4;\ 6);\ A_2\ (-4;\ -2);\ A_3\ (-5;\ 4);\ A_4\ (2;\ -4)$.
9. $A_1\ (6;\ 6);\ A_2\ (-3;\ -5);\ A_3\ (-2;\ 3);\ A_4\ (2;\ -7)$.
10. $A_1\ (7;\ 6);\ A_2\ (-5;\ -2);\ A_3\ (-4;\ 3);\ A_4\ (2;\ -8)$.

/Завдання обирається за останньою цифрою номера студента в списку./

§5. Лінії другого порядку

У загальній алгебраїчній формі рівняння II порядку має вигляд:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (3.15)$$

Для прямої лінії діє принцип взаємооднозначної відповідності, згідно з яким:

1) для будь-якої накресленої в координатній системі прямої можна знайти її рівняння у вигляді рівняння I порядку;

2) для будь-якого заданого рівняння I порядку можна в координатній системі накреслити відповідну цьому рівнянню пряму лінію.

Для рівнянь II порядку цей принцип порушується. Наприклад, можна записати рівняння $x^2+y^2+6=0$, але відповідної цьому рівнянню лінії не існує (студенту рекомендується самому знайти пояснення). Ретельне дослідження рівнянь II порядку і пов'язаних з цими рівняннями ліній показало, що існує всього 4 види кривих ліній, які описуються рівняннями II порядку. Такими лініями є: коло, еліпс, парабола і гіпербола.

1. Коло.

Озн. Колом називається геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від деякої точки, яку називають центром кола. Відстань від центру до кривої називають радіусом кола.

Радіус, як відстань між двома точками, задається формулою:

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Піднесемо ліву та праву частину виразу до квадрату і одержимо рівняння кола:

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = R^2 \qquad (3.16.)$$

У випадку, коли центр кола знаходиться у початку координат, то рівняння кола матиме вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (3.17.)$$

Рівняння кола – це рівняння другого порядку. Загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Bx + Ey + P = 0$ і являє собою коло, якщо коефіцієнти при квадратах координат рівні між собою $A = C$ та якщо відсутній член з добутком координат xy, тобто $B = 0$.

<u>Приклад:</u> Записати рівняння кола, що проходить через точку $B(6;\ 0)$ і має центром точку $A(2;\ 3)$.

З умови маємо, що AB – це радіус кола. Тоді:

$R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

А рівняння кола буде: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$.

2. Еліпс

Озн. Еліпсом називається геометричне місце точок, для кожної з яких сума відстаней до двох точок, які називаються фокусами, є сталою величиною.

Це визначення дає можливість легко намалювати еліпс. Якщо нитку довжиною L закріпити кнопками по краях до листка паперу (це фокуси), а вістрям олівця водити вздовж натягнутої цим вістрям нитки, то одержимо еліпс.

Канонічне рівняння еліпса з центром на початку координат.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3.18.)$$

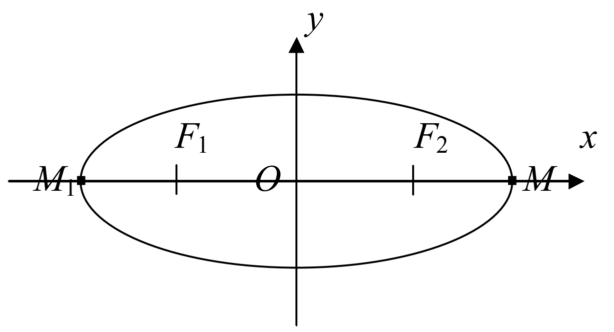


Рис. 3.11 а).

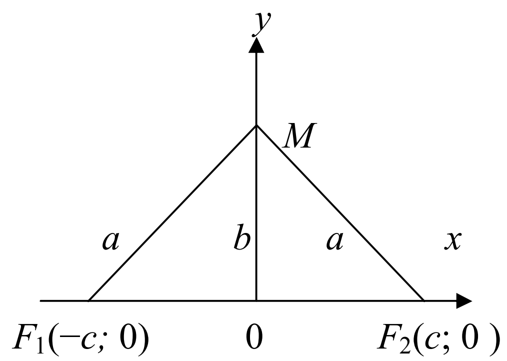


Рис. 3.11 б).

Координати фокусів еліпса $F_1(c;\ 0)$ і $F_2\ (-c;\ 0)$. Відстань між фокусами дорівнює $2c$. Точки перетину еліпса з осями координат $A_1\ (a;\ 0)$, $A_2\ (-a;\ 0)$ і $B_2\ (0;\ b)$, $B_2\ (0;\ -b)$ – називаються вершинами еліпса.

Відрізки $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2\ b$ – називаються осями еліпса.

Величина $e = \dfrac{c}{a}$ називається ексцентриситетом гіперболи, звідки $\dfrac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$. Ексцентриситет еліпса $e = \dfrac{c}{a} < 1$.

Відстані r_1 та r_2 точки $M\ (x,\ y)$ еліпса до його фокусів називаються фокальними радіусами цієї точки і визначаються за формулами: $r_1 = a - ex$, $r_1 = a + ex$.

Дві прямі, які паралельні до малої осі еліпса і знаходяться від неї на відстані $\dfrac{a}{e}$, називаються директрисами еліпса. Їхні рівняння: $x = \dfrac{a}{e}$, $x = -\dfrac{a}{e}$.

Якщо центр еліпса буде в точці $A(x_0;\ y_0)$, то рівняння еліпса буде таким:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (3.19.)$$

Якщо c=0, то ε=0 і b=a (випадок кола).

<u>Приклад:</u> Записати рівняння еліпса та знайти його ексцентриситет, якщо a=5, b=3, а центр еліпса знаходиться в точці A(3; 4).

Для зміщеного центру маємо:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1.$$

З виразу $\dfrac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$ маємо: $\dfrac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \varepsilon = \frac{4}{5.}$$

3. Гіпербола

Озн. Гіперболою називається геометричне місце точок, для кожної з яких різниця відстаней до двох деяких точок (фокусів) є величиною сталою.

Канонічне рівняння гіперболи з центром на початку координат:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3.20.)$$

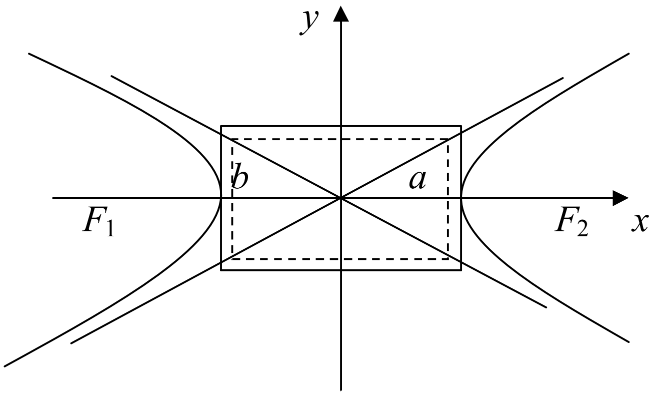


Рис. 3.12.

Координати фокусів гіперболи $F_1(c;\ 0)$ і $F_2\ (-c;\ 0)$. Відстань між фокусами дорівнює $2c$. Точки перетину еліпса з віссю абсцис $A_1\ (a;\ 0)$, $A_2\ (-a;\ 0)$ називаються дійсними вершинами. Відстань $A_1A_2 = 2a$ називається дійсною віссю гіперболи.

Точки $B_2\ (0;\ b)$, $B_2\ (0;\ -b)$ – називаються уявними вершинами гіперболи, а відрізок $B_1B_2 = 2b$ – уявною віссю гіперболи.

Ексцентриситет гіперболи $e=\frac{c}{a}>1$.

Відстані r_1 та r_2 точки $M\ (x,\ y)$ гіперболи до його фокусів називаються фокальними радіусами цієї точки і визначаються за формулами: $r_1=a-ex$, $r_1=a+ex$, за умови, що точка M лежить на правій вітці гіперболи.

Дві прямі, які паралельні до уявної осі гіперболи і знаходяться від неї на відстані $\frac{a}{e}$, називаються директрисами еліпса. Їхні рівняння: $x=\frac{a}{e}$, $x=-\frac{a}{e}$.

Прямі, що виражаються рівняннями $y=\pm\frac{b}{a}\cdot x$ називаються асимптотами гіперболи.

Дві прямі, що виражаються рівняннями:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \text{ і } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad (3.21.)$$

називаються спряженими.

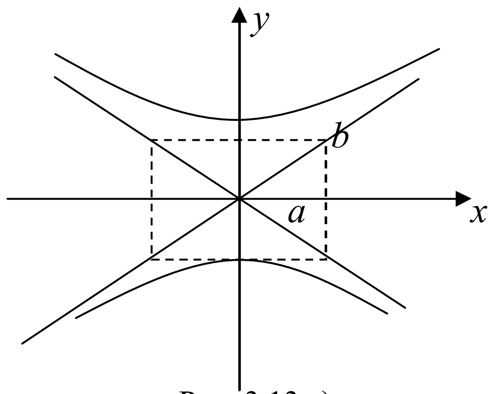


Рис. 3.13 а).

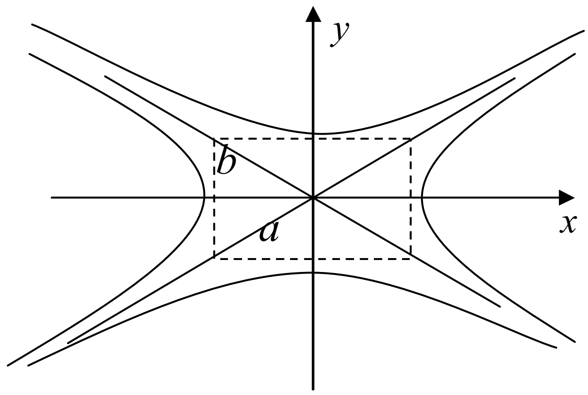


Рис. 3.13 б).

Якщо вісі гіперболи рівні, тобто $a = b$, то гіпербола називається рівнобічною або рівносторонньою. Її рівняння має вигляд: $x^2 - y^2 = a^2$

Якщо центр перетину асимптот не співпадає з початком координат і знаходиться в точці $A(x_0; y_0)$, то рівняння гіперболи відповідно будуть:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1 \qquad (3.22.)$$

<u>Приклад</u>: записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку $A(5;\ 5)$, якщо її асимптоти паралельні осям координат і перетинаються у точці $B(3;2)$.

З рівняння $(x-x_0)(y-y_0)=k$ маємо: $(x-3)(y-2)=k.$ Підставляючи координати точки A в рівняння, знаходимо: $(5-2)(5-3)=k \Rightarrow k=6$. Отже,

$(x-3)(y-2)=6$ є рівнянням гіперболи.

4. Парабола

Озн. Параболою називається геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від деякої точки (фокуса) та деякої прямої (директриси).

Канонічне рівняння параболи з вершиною на початку координат.

$$y^2=2px \qquad (3.23.)$$

де p – відстань від фокуса до директриси. Вершина параболи знаходиться у початку координат, віссю симетрії є вісь абсцис.

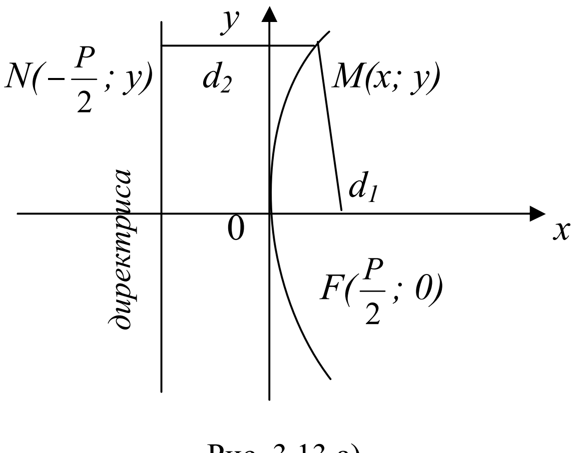


Рис. 3.13 а).

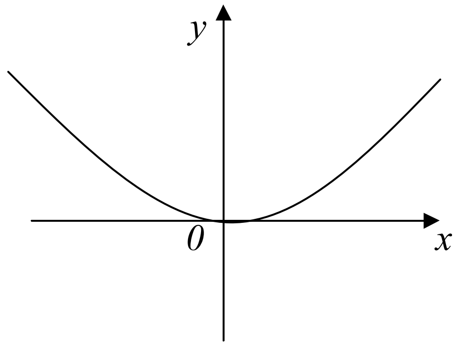


Рис. 3.13 б)

Координати фокуса F $\left(\frac{p}{2};0\right)$. Рівняння директриси параболи: $x=-\frac{p}{2}$.

Фокальний радіус *M (x,y)* параболи дорівнює $r=x+\frac{p}{2}$.

Ексцентриситет параболи вважається рівним одиниці.

Якщо віссю симетрії параболи служить вісь ординат, то рівняння параболи матиме вигляд:

$$x^2=2py, \qquad (3.24.)$$

Якщо ж вершина параболи з точки $O(0;0)$ переміститься в точку $A(x_0;y_0)$, то рівняння параболи будуть:

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0) \text{ або } (x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0).$$

<u>Приклад:</u> Записати рівняння параболи, яка має вершину в точці $A(6;\ 3)$ і проходить через точку $B(0;-8)$.

Гілки параболи (рис.66) спрямовані вниз, отже, її рівняння буде таким: $(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)\Rightarrow(x-6)^2=-2p(y-3)$. Точка B лежить на параболі, а значить задовольняє її рівняння. Підставивши в рівняння координати точки B, одержимо:

$$(0-6)=-2p(-8-3)\Rightarrow 36=22p\Rightarrow p=\frac{36}{22}\Rightarrow 2p=\frac{36}{11}.$$

Отже, рівняння параболи буде: $(x-6)^2=-\frac{36}{11}(y-3)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.14. Скласти рівняння кола з центром в точці *C (2; –3)* і радіусом *6 од*.

2.15. Скласти рівняння кола, що проходить через точку М (2; 6) і його центр співпадає з точкою *C (–1; 2)*.

2.16. Скласти рівняння кола, що проходить через точки *A (–1; 1)* і *B (1; –3)*, якщо центр лежить на прямій $2x-y+1=0$.

2.17. Скласти рівняння кола, що проходить через три точки *A (–1; 5)*, *B (–2; 2)* і *C (5; 5)*.

2.18. Скласти рівняння кола, якщо точки *A (3; 2)* і *B (–1;6)* є кінцями одного з діаметрів.

2.19. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично початку координат. Знаючи, що:

1) його велика вісь дорівнює 10 одиниць, а відстань між фокусами $2c=8$;

2) його мала вісь дорівнює 24 одиниць, а відстань між фокусами $2c=10$;

3) відстань між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$;

4) його велика вісь дорівнює 20 одиниць, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

5) його мала вісь дорівнює 10 одиниць, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

2.20. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично початку координат. Знаючи, що:

1) відстань між фокусами $2c = 10$ і вісь $2в = 8$;

2) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

3) вісь $2a = 16$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

4) рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$;

5) точки *A (6; –1)* і В *(–8;* $2\sqrt{2}$ *)* знаходяться на гіперболі.

2.21. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат. Знаючи, що:

1) парабола розміщена симетрично осі *Ox* і проходить через точку *M (9; 6)*;

2) парабола розміщена симетрично осі *Ox* і проходить через точку *P (–1; 3)*;

3) парабола розміщена симетрично осі *Oy* і проходить через точку *A (1; 1)*;

3) парабола розміщена симетрично осі *Oy* і проходить через точку *K (4; –8).*

2.22. Визначити, яка крива задається рівнянням та визначити її основні параметри: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.

2.23. Визначити, яка крива задається рівнянням та визначити її основні параметри: $x^2 + 4y^2 + 10x + 8y + 28 = 0$.

Індивідуальне завдання

1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично початку координат, знаючи, що відстань між фокусами $2c = 2n$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2n}{5}$.

2. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично початку координат, знаючи, що відстань між фокусами $2c = 2n$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3n}{2}$.

3. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі *Ox*, що проходить через точку *M (n; –2n)* і початок координат.

У вказаних завданнях *n* – номер студента за списком.

Запитання до розділу III

1. Що називають декартовою та полярною системами координат?
2. Які задачі належать до найпростіших?
3. Назвіть види рівняння прямої.
4. Як знаходиться відстань від точки до прямої?
5. Що таке взаємооднозначна відповідність?
6. Назвіть умови паралельності та перпендикулярності прямих.
7. Як знайти кут між прямими?
8. Чому для ліній II порядку не існує взаємооднозначної відповідності?
9. Що називається колом, еліпсом, параболою, гіперболою?
10. Що таке паралельний перенос та поворот осей координат?
11. Що таке ексцентриситет?
12. Чим відрізняються лінії II порядку зі зміщеним центром від ліній з незміщеним центром?