II. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§1. Основні поняття

Озн. Скаляром називається величина, яка має тільки чисельне значення (наприклад, маса тіла, об'єм тіла, площа городу тощо). Позначення: a, b, AB тощо.

Озн. Вектором називається величина, яка крім чисельного значення має напрямок (наприклад, сила, швидкість) і позначається літерами зі стрілкою над ними: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$ тощо.

Щоб обчислити координати вектора $\overrightarrow{AB}$ необхідно від координат кінця $B\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ відняти координати початку $A\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, тобто $\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1;\ \ y_2 - y_1;\ \ z_2 - z_1\}$.

<u>Приклад:</u> Обчислити координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A\{3;\ -1;\ 0\}$, $B\{1;\ 2;\ -4\}$.

Розв'язання: $\overrightarrow{AB}\ \{1-3;\ \ 2-(-1);\ \ -4-0\} = \{-2;\ \ 3;\ \ -4\}$.

Озн. Довжина вектора $\vec{a}\{a_x;\ \ a_y;\ \ a_z\}$ називається абсолютною величиною або модулем вектора і обчислюється за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$.

Якщо задані координати кінця $B\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ та початку вектора $A\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, то його довжину обчислюють за формулою: $|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

<u>Приклад:</u> Обчислити довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A\{3;\ -1;\ 0\}$, $B\{1;\ 2;\ -4\}$.

Розв'язання:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(1-3)^2 + (2-(-1))^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}.$$

Щоб визначити вектор, треба вказати:

1) точку, з якої вектор починається (початок);
2) сторону простору, в яку направлено вектор;
3) пряму, якій він паралельний;
4) довжину вектора.

Вектор, вказаний всіма цими елементами, не буде вільним.

Озн. Якщо вектор може мати початок у будь-якій точці прямої, на якій він лежить, то він буде ковзним.

Озн. Вектор, початок якого може знаходитись у будь-якій точці простору, називається вільним.

Як правило, вивчають вільні вектори, як найбільш прості та важливі.

Озн. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ рівні, якщо вони паралельні між собою, спрямовані в один бік і мають однакову довжину, тобто $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Якщо ж вони спрямовані в протилежні сторони, то $|\vec{a}| = -|\vec{b}|$.

Озн. Вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Ознакою колінеарності двох векторів $\vec{a}\{a_x;\ \ a_y;\ \ a_z\}$ та $\vec{b}\{b_x;\ \ b_y;\ \ b_z\}$ є пропорційність їх координат: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

<u>Приклад:</u> Вектори $\vec{a}\{-2;\ \ a_y;\ \ -1\}$ та $\vec{b}\{3;\ \ -6;\ \ b_z\}$ колінеарні. Знайти координати цих векторів.

Розв’язання: За умовою колінеарності векторів маємо рівність: $\frac{-2}{3} = \frac{a_y}{-6} = \frac{-1}{b_z}$. Звідси: $a_y = \frac{-2\cdot(-6)}{3} = 4$, а $b_z = -\frac{2}{3}$. Тобто вектори мають координати: $\vec{a}\{-2;\ \ 4;\ \ -1\}$ та $\vec{b}\left\{3;\ \ -6;\ \ -\frac{2}{3}\right\}$.

Озн. Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$.

Тобто, щоб одержати суму векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, треба початок першого вектора $\vec{a}$ з’єднати з кінцем другого $\vec{b}$ і спрямувати утворений вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ від початку першого до кінця другого (рис. 2.1.).

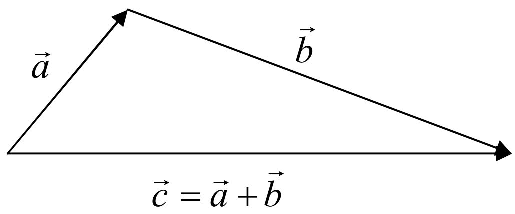

Рис. 2.1.

Щоб знайти різницю векторів, треба сумістити початок векторів як доданків. Тоді вектор, спрямований від кінця другого до початку першого, буде різницею векторів. З $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$, звідси стає зрозумілим напрямок вектора $\vec{c}$ (рис. 2.2.).

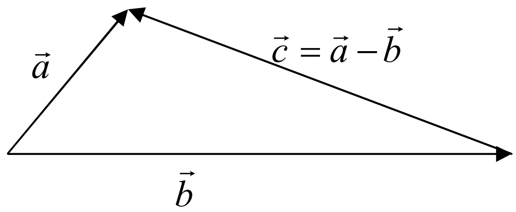

Рис. 2.2.

<u>Приклад:</u> Дано два вектори $\vec{a} = \{2;\ \ -1;\ \ 3\}$ та $\vec{b} = \{3;\ \ 4;\ \ 5\}$. Знайти вектори $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язання:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \{2+3;\ \ -1+4;\ \ 3+5\} = \{5;\ \ 3;\ \ 8\}$,

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \{2-3;\ \ -1-4;\ \ 3-5\} = \{-1;\ \ -5;\ \ -2\}$.

Суму та різницю векторів можна знайти, користуючись діагоналями паралелограма (рис. 2.3):

Вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{OB}$ рівні, тому вектор $\overrightarrow{OC}$ є сумою векторів $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{AC}$, тобто $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$. Між векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{AC}$ за рис.23 є кут α, тому з трикутника OAC за теоремою косинусів маємо:

$\left|\overrightarrow{OC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot cos\alpha$, звідси $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos\alpha$

Отже, $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos\alpha}$ (2.1)

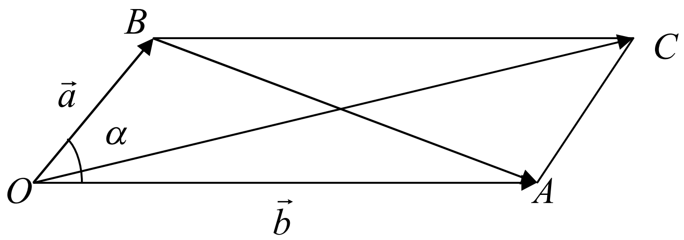

Рис. 2.3.

З трикутника *OBA* маємо за теоремою косинусів:

$$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BA}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos\left(180^\circ - \alpha\right)$$

Отже, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot sin\alpha}$ (2.2)

<u>Приклад:</u> Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, а їх довжини відповідно дорівнюють $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 8$. Знайти суму $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ та різницю векторів $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$.

Розв'язання:

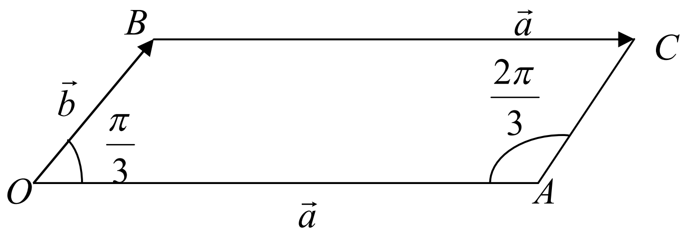

Рис. 2.4.

Маємо: $\angle\, OAC = \frac{\pi}{3}$, тому для вектора $\overline{OC}$ кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є $\frac{2\pi}{3}$. Тоді $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\alpha} = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot cos\frac{2\pi}{3}} =$

$= \sqrt{25+64+40} = \sqrt{129} \approx 11{,}36$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\alpha} = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot cos\frac{\pi}{3}} =$$

$= \sqrt{25+64-40} = \sqrt{49} = 7$.

Озн. Добутком вектора $\vec{a}$ на скаляр k є вектор $\vec{a} = k\cdot\vec{b}$, довжина якого дорівнює $\left|\vec{a}\right| = |k|\cdot\left|\vec{b}\right|$.

<u>Приклад:</u> Дано два вектора $\vec{a} = \{2;\ -1;\ 3\}$ та $\vec{b} = \{3;\ 4;\ 5\}$. Знайти координати вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язання: $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = \{2\cdot 2 - 3;\ \ 2\cdot(-1) - 4;\ \ 2\cdot 3 - 5\}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

№2.1. Дано два вектора $\vec{a} = \{1;\ -1;\ 2\}$ та $\vec{b} = \{3;\ 4;\ 0\}$. Знайти координати вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

№2.2. Дано три вектора $\vec{a} = \{3;\ -2;\ 1\}$, $\vec{b} = \{0;\ 2;\ -4\}$ та $\vec{c} = \{1;\ 1;\ -2\}$. Знайти координати та довжину вектора $\vec{d} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$.

№2.3. Дано точки $A(5;\ 0;\ 2)$, $B(-3;\ 3;\ -1)$, $C(1;\ 2;\ -3)$, $D(5;\ -4;\ 3)$. Чи можуть вони бути вершинами трапеції.

№2.4. Знайти точку N, з якою збігається кінець вектора $\bar{a} = \{3;\ -1;\ 4\}$, якщо його початок збігається з точкою $M\ (1;\ 2;\ -3)$.

№2.5. Знайдіть координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$, якщо $A(1;3)$, $B(2;5)$, $C(3;4)$, $D(-1;3)$.

№2.6. Вектори одиничні $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Знайти суму $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ та різницю векторів $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

№2.7. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, а їх довжини відповідно дорівнюють $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$. Знайти суму $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ та різницю векторів $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

№2.8. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\alpha = 120^{\circ}$, а їх довжини відповідно дорівнюють $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 5$. Знайти суму $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ та різницю векторів $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

№2.9. Дано: $\left|\vec{a}\right| = 11$, $\left|\vec{b}\right| = 23$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 30$. Визначити $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

№2.10. Визначити суму $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ та різницю векторів $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$ і $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 12$.

Індивідуальне завдання

1. Обчислити координати та довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{0;\ -n;\ 2n\}$, $\vec{b} = \{n-3;\ n-4;\ n-6\}$

2. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, а їх довжини відповідно дорівнюють $\left|\vec{a}\right| = n$, $\left|\vec{b}\right| = n+1$. Знайти суму $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ та різницю векторів $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

n – остання цифра номера студента за списком.

§2. Проекція вектора на вісь

Розглянемо проекцію вектора на вісь (рис. 2.5). Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь Ox є AB, тобто пр$_x\vec{a} = AB$. Вектор $\vec{a}$ та його проекція утворюють кут α, тому:

$$np_x\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot cos\alpha = a_x .$$

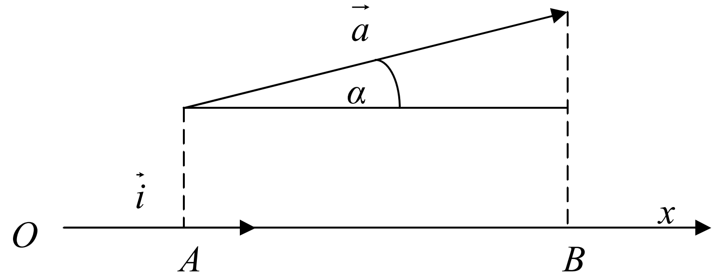

Рис.2.5.

Нехай $\vec{i}$ – вектор на осі $Ox,$ для якого $\left|\vec{i}\right| = 1$. Такий вектор називається одиничним або ортом. Тоді $AB = m\cdot\left|\vec{i}\right|$, а значить $пр_x\vec{a} = m\cdot\left|\vec{i}\right|$.

На площині відповідно матимемо (рис. 2.6.): $пр_x\vec{a} = m_1\cdot\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot cos\alpha = a_x$, $пр_x\vec{a} = m_2\cdot\left|\vec{j}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot cos\beta = a_y$, при чому $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ($\alpha+\beta=90^o$). Тоді вектор $\vec{a}$ можна розкласти за ортами $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$.

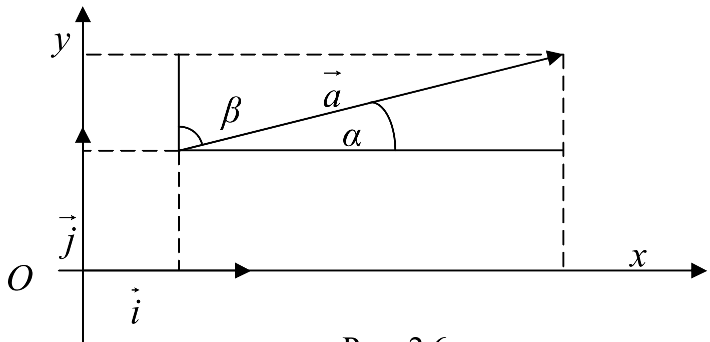

Рис. 2.6.

Аналогічно у просторі матимемо: $пр_x\vec{a} = m_1\cdot\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot cos\alpha = a_x$, $пр_x\vec{a} = m_2\cdot\left|\vec{j}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot cos\beta = a_y$, $пр_z\vec{a} = m_3\cdot\left|\vec{k}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot cos\gamma = a_z$. При чому $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, де $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$ Тоді вектор $\vec{a}$ можна розкласти за ортами $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

<u>Приклад:</u> Три вектори $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ задані в базисі векторів $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\overline{\ k\ }$. Знайти проекцію вектора $\vec{d} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 5\vec{c}$ у цьому базисі.

Розв'язання: Додамо вектори:

$$+\begin{cases} 3\vec{a} = 6\vec{i} + 9\vec{j} + 12\vec{k} \\ 4\vec{b} = -4\vec{i} + 20\vec{j} + 24\vec{k} \\ -5\vec{c} - -25\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 5\vec{c} \Rightarrow \vec{d} = 23\vec{i} + 24\vec{j} + 26\vec{k}.$$

Отже, координати шуканого вектора $\vec{d}\{-23;\quad 24;\quad 26\}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

№2.11. У ромбі *ABCD* дано вектори-діагоналі $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Розкласти по цих векторах усі вектори-сторони ромба: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

№2.12. У ромбі *ABCD* дано вектори-сторони $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Розкласти по цих векторах усі вектори: $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

№2.13. Знайти координати вектора $\vec{a}=4$, якщо відомі кути $\alpha=60^o$; $\beta=45^o$; $\gamma=60^o$, які він утворює з осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz* і його довжину.

№2.14. Знайти координати вектора $\vec{a}=8$, якщо відомі кути $\alpha=135^o$; $\beta=60^o$; $\gamma=60^o$, які він утворює з осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz* і його довжину.

№2.15. Дано вектори $\vec{a}=\{2;\ 2;\ 1\}$, $\vec{b}=\{6;\ 3;\ 2\}$. Знайти проекцію вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ і проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

№2.16. Розкласти вектор $\vec{b}=\{6;\ 3;\ 2\}$ за ортами.

№2.17. Дано вектори $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$.Обчислити $np_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

№2.18. Знайти довжину вектора $\vec{a}=20\vec{i}+30\vec{j}-60\vec{k}$.

№2.19. Дано вектор $\vec{a}=\{-2;\ 2;\ 1\}$. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на координатні осі.

№2.20. Дано вектор $\vec{a}=\{5;\ -2;\ -4\}$ та $\vec{b}=\{6;\ 3;\ 2\}$. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ та проекцію вектора $\vec{b}$ на вектора $\vec{a}$.

Індивідуальне завдання

Дано вектор $\vec{b}=\{n-3;\ n-4;\ n-6\}$. Знайти проекцію вектора $\vec{b}$ на координатні осі (*n* – остання цифра номера студента за списком).

§3. Перехід від одного базису до іншого

Озн. Вектори (більше двох) називаються компланарними, якщо вони лежать на одній площині або паралельні цій площині.

Вектор $\vec{d}\{d_1;\ d_2;\ d_3\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Існує три некомпланарних вектори $\vec{a}\{a_1;\ a_2;\ a_3\}$, $\vec{b}\{b_1;\ b_2;\ b_3\}$ і $\vec{c}\{c_1;\ c_2;\ c_3\}$, які утворюють новий базис. Вектор $\vec{d}$ у новому базисі має координати $\vec{d}(x;\ y;\ z)$.

Для їх знаходження необхідно розв'язати систему: $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$.

Тобто, існує матриця переходу $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

Приклад: Вектор $\vec{d}\{20;\ \ 11;\ \ -2\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{-1;\ 3;\ 5\}$, $\vec{b}\{3;\ -2;\ 1\}$, $\vec{c}\{5;\ 4;\ -3\}$.

Розв'язання: У новому базисі вектор $\vec{d}$ матиме координати $\vec{d}\{x;\ \ y;\ \ z\}$. Тоді маємо систему:

$$\begin{cases} -x+3y+5z=20 \\ 3x-2y+4z=11 \\ 5x+y-3z=-2 \end{cases}$$, яку розв'яжемо методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 150;\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 20 & 3 & 5 \\ 11 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 150;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & 20 & 5 \\ 3 & 11 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 300;\ \Delta_z = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 450.$$

Тоді за формулами Крамера: $x=\frac{150}{150}=1$, $y=\frac{300}{150}=2$, $z=\frac{450}{150}=3$.

Отже, у новому базисі вектор $\vec{d}$ матиме координати $\vec{d}\{1;\ \ 2;\ \ 3\}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.21. Вектор $\vec{d}\{0;\ 13;\ -15\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{2;\ 1;\ 3\}$, $\vec{b}\{1;\ -1;\ -2\}$, $\vec{c}\{-1;\ -3;\ 3\}$.

2.22. Вектор $\vec{d}\{4;\ \ 3;\ \ 0\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{1;\ 2;\ 3\}$, $\vec{b}\{1;\ -3;\ -2\}$, $\vec{c}\{-2;\ 1;\ 6\}$.

2.23. Вектор $\vec{d}\{6;\ \ 8;\ \ 9\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{5;\ 2;\ 1\}$, $\vec{b}\{-3;\ 1;\ 4\}$, $\vec{c}\{6;\ -3;\ -2\}$.

2.24. Вектор $\vec{d}\{3;\ \ 11;\ \ 8\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{1;\ 2;\ 1\}$, $\vec{b}\{-1;\ 1;\ 1\}$, $\vec{c}\{1;\ 1;\ 2\}$.

2.25. Вектор $\vec{d}\{-2;\ 9;\ 3\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{3;\ 6;\ 2\}$, $\vec{b}\{-1;\ 2;\ 4\}$, $\vec{c}\{-4;\ 1;\ -3\}$.

Індивідуальне завдання

Вектор $\vec{d}\{1;\ 1;\ 1\}$ задано в базисі векторів $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$. Знайти координати цього вектора у базисі наступних векторів $\vec{a}\{-1;\ n;\ n-5\}$, $\vec{b}\{n+1;\ 1;\ n-3\}$, $\vec{c}\{n;\ n-2;\ n-3\}$ (n – остання цифра номера студента за списком).

§4. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

а) ***Озн.*** Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}$) називають число, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними (рис. 2.7). Нехай задано вектори $\vec{a}\{a_1;\ a_2;\ a_3\}$ і $\vec{b}\{b_1;\ b_2;\ b_3\}$, тоді:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\alpha = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z \qquad (2.6.)$$

У даному записі $|\vec{b}|\cdot cos\alpha$ є проекцією вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$. Звідси знаходимо: $cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x + a_y + a_z}\cdot\sqrt{b_x + b_y + b_z}}$ (2.7.)

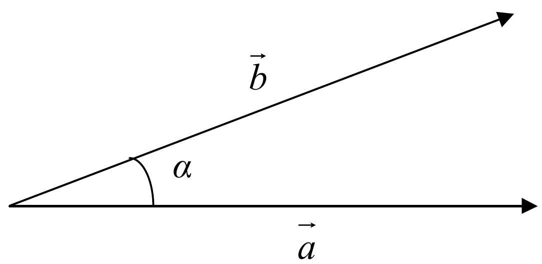

Рис. 2.7.

<u>Приклад:</u> Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ і $\vec{b} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$, де $\vec{i},\ \vec{j}$ одиничні вектори ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$), що утворюють базис, тобто кут між ними складає 90°.

Розв'язання:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\vec{i} + 3\vec{j})\cdot(5\vec{i} + 3\vec{j}) = 10\vec{i}^{\,2} + 15\vec{i}\cdot\vec{j} - 8\vec{i}\cdot\vec{j} - 12\vec{j}^{\,2}$.

Відмітимо, що $\vec{i}^{\,2} = |\vec{i}|\cdot|\vec{i}|\cdot cos0^\circ = 1$, аналогічно $\vec{j}^{\,2} = |\vec{j}|\cdot|\vec{j}|\cdot cos0^\circ = 1$, $\vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cdot cos90^\circ = 0$. Маємо: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 10\cdot1 + 15\cdot0 - 8\cdot0 - 12\cdot1 = 10 - 12 = -2$.

Тоді кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{5^2+4^2}} = -\frac{2}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{41}} = -\frac{2}{\sqrt{533}} = -\frac{2\sqrt{533}}{533} \approx -0{,}087 \Rightarrow \alpha \approx 105{,}5^\circ.$$

Приклад: Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}\{3;\ \ 4;\ \ 5\}$, $\vec{b}\{2;\ \ 4;\ \ 6\}$, та косинус кута між ними.

Розв'язання: Скалярний добуток обчислимо згідно формули: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$, тобто $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 2 + 4\cdot 4 + 5\cdot 6 = 6 + 16 + 30 = 52$.

Тоді косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\cos\alpha = \frac{52}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2+6^2}} = \frac{52}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{56}} = \frac{13}{5\sqrt{7}} = \frac{13\sqrt{7}}{35} \approx 0{,}9827\,.$$

б) ***Озн.*** Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (позначається $\vec{a}\times\vec{b}$) називають вектор, модуль якого дорівнює добутку модулів цих векторів на синус кута між ними, а напрямок у нього такий, що якщо дивитися з кінця вектора на його початок, то вектор $\vec{a}$ можна перевести в положення вектора $\vec{b}$ поворотом проти годинникової стрілки (рис 2.8.):

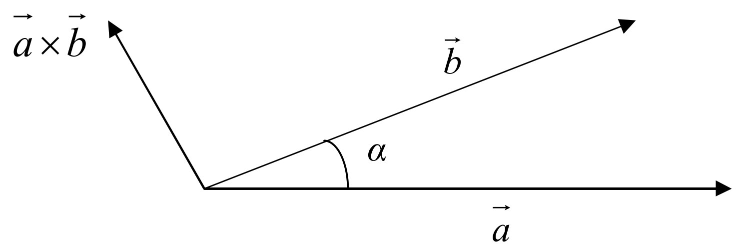

Рис. 2.8.

Модуль векторного добутку є площею паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, як на сторонах:

$$S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot sin\alpha \tag{2.8}$$

Нехай задано вектори $\vec{a}\{a_1;\ \ a_2;\ \ a_3\}$, $\vec{b}\{b_1;\ \ b_2;\ \ b_3\}$ і $\vec{c}\{c_1;\ \ c_2;\ \ c_3\}$, тоді в координатній формі векторний добуток можна записати таким чином:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x - a_x & b_y - a_y & b_z - a_z \\ c_x - a_x & c_y - a_y & c_z - a_z \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

А формулу площі трикутника можна подати у вигляді:

$$S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| \tag{2.10}$$

Для обчислення модуля використовують його властивість: $\left|a\right|^2 = a^2$, звідки добувають корінь. Застосуємо цю властивість до обчислення модуля векторного добутку, ураховуючи, що координати векторів задано $\vec{a}\{a_1;\ \ a_2;\ \ a_3\}$, $\vec{b}\{b_1;\ \ b_2;\ \ b_3\}$ і $\vec{c}\{c_1;\ \ c_2;\ \ c_3\}$:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = \begin{vmatrix} b_y - a_y & b_z - a_z \\ c_y - a_y & c_z - a_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_x - a_x & b_z - a_z \\ c_x - a_x & c_z - a_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_x - a_x & b_y - a_y \\ c_x - a_x & c_y - a_y \end{vmatrix}^2,$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2} \tag{2.11}$$

Якщо вектори колінеарні, то $\alpha = 0$ і відповідно $sin\alpha = 0$, тому векторний добуток дорівнює 0.

в) ***Озн.*** Мішаним добутком векторів (позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$) називають число, яке дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Нехай задано вектори $\vec{a}\{a_1;\ \ a_2;\ \ a_3\}$, $\vec{b}\{b_1;\ \ b_2;\ \ b_3\}$ і $\vec{c}\{c_1;\ \ c_2;\ \ c_3\}$, то їх мішаний добуток дорівнює $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ (2.12)

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють базис, то їх мішаний добуток не дорівнює нулю. Якщо цей добуток дорівнює нулю, то вектори компланарні.

<u>Приклад:</u> Задано вектори $\vec{a}\{1;\ \ -2;\ \ 3\}$, $\vec{b}\{4;\ \ 3;\ \ -5\}$ і $\vec{c}\{-3;\ \ 2;\ \ 1\}$. Обчислити об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання: Ураховуючи означення мішаного добутку, об'єм паралелепіпеда дорівнює: $V = \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 42.$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.26. Дано вектори $\vec{a}\{1;\ \ 2;\ \ -1\}$, $\vec{b}\{1;\ \ -1;\ \ 3\}$, $\vec{c}\{6;\ \ 0;\ \ 8\}$. Обчислити $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}$, $\sqrt{\vec{c}\cdot\vec{c}}$.

2.27. Обчислити скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, а кут між цими векторами дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

2.28. Обчислити скалярний добуток $\vec{a}+\vec{b}$ і $3\vec{a}-2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, а кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\dfrac{\pi}{3}$.

2.29. Обчислити скалярний добуток $(2\vec{a}+3\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, а кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\dfrac{2\pi}{3}$.

2.30. Визначити кут між векторами $\vec{a}\{-2;\ 0;\ 2\}$, $\vec{b}\{-1;\ 1;\ 0\}$.

2.31. Визначити кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

2.32. Визначити кут між векторами $-9\vec{a}$ і $\dfrac{1}{9}\vec{b}$, $\vec{a}\{2;\ 1;\ -2\}$, $\vec{b}\{5;\ -1;\ 1\}$.

2.33. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вони утворюють кут 45° і $\vec{a}\cdot\vec{b}=18$.

2.34. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вони утворюють кут 60° і $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}$.

2.35. При якому значенні p вектори $\vec{a}\{1;\ p;\ -2\}$, $\vec{b}\{p;\ 3;\ -4\}$ є взаємно перпендикулярними?

2.36. При якому значенні x вектори $\vec{m}=x\vec{p}+13\vec{q}$ і $\vec{n}=2\vec{p}-\vec{q}$ є взаємно перпендикулярними, якщо $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=1$, а кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$ дорівнює $\dfrac{2\pi}{3}$?

2.37. Знайти гострий кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\{3;\ 2;\ 0\}$, $\vec{b}\{1;\ -2;\ 2\}$.

2.38. Дано вектор $\vec{a}\{1;\ 3;\ 4\}$. Знайти колінеарний до нього вектор з початком у точці $A(1;\ 2;\ 8)$ і кінцем у точці B, що лежить у площині xOy.

2.39. Знайти об'єм тетраедра з вершинами $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(4;\ 4;\ 4)$, $C(2;\ 6;\ 4)$, $D(2;\ 3;\ 6)$.

2.40. Знайти об'єм паралелепіпеда з вершинами $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(4;\ 0;\ -4)$, $C(2;\ 6;\ 4)$, $D(2;\ 2;\ -2)$.

2.41. Перевірити на компланарність вектори $\vec{a}\{1;\ \ 1;\ \ 5\}$, $\vec{b}\{1;\ \ 1;\ \ -3\}$, $\vec{c}\{-2;\ \ 2;\ \ -6\}$.

2.42. Перевірити на компланарність вектори $\vec{a}\{-1;\ \ 1;\ \ 3\}$, $\vec{b}\{1;\ \ 1;\ \ -3\}$, $\vec{c}\{-2;\ \ 2;\ \ -6\}$.

Індивідуальне завдання

1. Обчислити об'єм паралелепіпеда, якщо координати його вершин дорівнюють $A(-1;\ \ n;\ \ n-5)$, $B(n+1;\ \ 1;\ \ n-3)$, $C(n;\ \ n-2;\ \ n-3)$, $D(-n;\ \ n-1;\ \ n+4)$.

2. Перевірити на компланарність вектори $\vec{a}\{-1;\ \ n;\ \ n-5\}$, $\vec{b}\{n+1;\ \ 1;\ \ n-3\}$, $\vec{c}\{-2;\ \ 2n;\ \ 2n-6\}$ (n – остання цифра номера студента за списком).

Запитання до розділу ІІ:

1. Що таке модуль вектора?
2. Правила додавання та віднімання векторів.
3. Які вектори називаються колінеарними та компланарними?
4. Властивості векторів та дії над ними. Знаходження довжини вектора.
5. Розкладання вектора на складові.
6. Базисні вектори.
7. Проекція вектора на вісь. Що таке одиничний вектор?
8. Що таке скалярний добуток векторів?
9. Як знаходиться кут між векторами?
10. Правило переходу від одного базису до другого. Матриця переходу.
11. Знаходження скалярного добутку за відомими координатами векторів.
12. Що таке векторний добуток?
13. Геометричний зміст модуля векторного добутку.
14. Що таке мішаний добуток векторів?