# XII. РЯДИ

## § 1. Основні поняття і теореми

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, u_3, ... u_n, ...,$

Озн. Числовим рядом називають суму членів заданої послідовності

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \qquad (12.1)$$

А самі числа $u_1, u_2, u_3, ... u_n, ...$ називаються членами ряду.

***Озн.*** Якщо члени ряду − додатні числа, то ряд називається знакопозитивним.

***Озн.*** Якщо серед членів ряду зустрічаються додатні та від'ємні числа, то ряд називається знакозмінним.

***Озн.*** Якщо у знакозмінному ряді спостерігається почергова зміна знаку, то він називається знакопочерговим.

Наприклад, ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} ...$ є знакопозитивним, ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...$ − знакозмінним, а ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} ...$ − знакопочерговим.

Розглянемо основні поняття на прикладі знакопозитивного ряду. Частковою сумою членів ряду називається сума перших $k$ членів, яка позначається $S_k$. Тоді: $S_1 = u_1$;

$$S_2 = u_1 + u_2;$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3;$$

$$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k;$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + ... + u_n.$$

***Озн.*** Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ існує у вигляді скінченного числа, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (15.1) буде збіжним, а число $S$ – сумою ряду.

Наприклад, відома зі школи спадна геометрична прогресія, знаменник якої дорівнює $\frac{1}{2}$, є числовим рядом:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots \qquad (12.2)$$

сума якого дорівнює $\frac{1}{1-0,5}=2$.

Дійсно, $S_2=1,5$; $S_4=1\frac{7}{8}=1,875$ … $S_{10}=1\frac{127}{128}=1,9921875$.

***Озн.*** Якщо границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ необмежена або не існує, то ряд (12.1) буде розбіжним і суми не матиме. Наприклад, ряд $2+2+\ \ldots\ +2+\ldots$ буде розбіжним, бо його часткова сума $S_n=\underbrace{2+2+2+\ldots+2}_{n}=2n$.

**Основні теореми**

***Теорема 1.*** Якщо з ряду (12.1) вилучити декілька членів і при цьому отриманий ряд збіжний, то ряд (12.1) також буде збіжним, тобто якщо збігається ряд

$$u_4+u_5+u_6+u_7+\ldots+u_n+\ldots, \qquad (12.3)$$

то ряд

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+\ldots+u_n+\ldots$$

також збігається.

***Теорема 2.*** Якщо ряд (15.1) збіжний, то ряд, отриманий з ряду (12.1) вилученням декількох членів, також збіжний, тобто із збіжності ряду

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5\ldots+u_n+\ldots$$

випливає збіжність ряду

$$u_3+u_4+u_5+\ldots+u_n+\ldots.$$

***Теорема 3.*** Множення членів ряду на сталу не впливає на його збіжність: якщо ряд (12.1) збіжний, то ряд

$$cu_1+cu_2+cu_3+\ldots+cu_n+\ldots$$

також збіжний.

***Теорема 4.*** Якщо ряд (12.1) збіжний і має суму $S_1$ і ряд

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots \qquad (12.4)$$

також збіжний і має суму $S_2$, то ряди, утворені додаванням та відніманням членів з однаковими номерами, будуть збіжними і мати відповідно суми $S_1+S_2$ та $S_1-S_2$, тобто:

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+...=S_1+S_2$$

і

$$(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+(u_3-v_3)+...=S_1-S_2.$$

***Теорема 5.*** Якщо ряди (12.1) і (12.4) такі, що $u_1 \le v_1$;. $u_2 \le v_2$; ... $u_n \le v_n$, а ряд (12.1) розбіжний, то ряд (12.4) також буде розбіжним.

***Теорема 6.*** Якщо ряди (12.1) і (12.4) такі, що $u_1 \ge v_1$; $u_2 \ge v_2$;...; $u_3 \ge v_3$, а ряд (12.1) збіжний, то ряд (12.4) також збіжний.

Останні дві теореми називаються порівняльними і мають широке практичне застосування при дослідженні збіжності рядів.

<u>Приклад:</u> Обчислити суму заданого ряду:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$;   б) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}+...$.

*Розв'язання:*

а) Для знаходження суми ряду $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$скористаємося тотожністю: $\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ . Тоді сума може бути представлена у вигляді: $S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$.

Тоді $\lim_{x\to\infty} S=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

Тобто ряд збігається і його сума дорівнює 1.

б) Для ряду $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}+...$ винесемо спільний множник $\frac{1}{3}$ за дужки: $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)$. В дужках одержали ряд, що являє собою нескінченну прогресію, знаменник якої $q=\frac{1}{2}$.

Тоді $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$. Отже, сума заданого ряду $S=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Записати можливий загальний член ряду:

**12.1.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...;$

**12.2.** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...;$

**12.3.** $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}+...;$

**12.4.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...;$

**12.5.** $sin\alpha+\frac{sin2\alpha}{2}+\frac{sin3\alpha}{3}+...;$

**12.6.** $cos\alpha+\frac{cos2\alpha}{2}+\frac{cos3\alpha}{6}+...;$

**12.7.** $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+...;$

**12.8.** $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{9\cdot 7}+\frac{1}{14\cdot 11}+...;$

**12.9.** $1{,}1-1{,}02+1{,}003-1{,}0004+...$

**12.10.** $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+...;$

Обчислити суму заданого ряду:

**12.11.** $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...;$

**12.12.** $3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}-...;$

**12.13.** $1{,}1-1{,}02+1{,}003-1{,}0004+...;$

**12.14.** $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+...;$

**12.15.** $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...;$

**12.16.** $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+...;$

**12.17.** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...;$

**12.18.** $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+...;$

**12.19.** $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...$

**12.20.** $3-\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+...;$

### Індивідуальне завдання

Обчислити суму заданого ряду:

$$\frac{1}{N\cdot(N+1)}+\frac{1}{(N+1)\cdot(N+2)}+\frac{1}{(N+2)\cdot(N+3)}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots$$

## §2. Необхідна ознака збіжності рядів

У теорії рядів з'ясування питання про збіжність ряду має більше значення, ніж питання про знаходження його суми.

Розглянемо ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ .

Якщо ряд (12.1) такий, що $u_1\le u_2\le u_3\le\ldots\le u_n\le\ldots,$то ряд буде розбіжним. Наприклад, ряд з натуральних чисел $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ є розбіжним. Частинна сума ряду при додаванні наступного числа зростає на ціле число. Розбіжним буде також ряд, складений з однакових чисел. Так, ряд

$$2+2+2+2+\ldots$$

буде розбіжним (кожен наступний член збільшує суму на дві одиниці). Тому можемо говорити тільки про збіжність спадного ряду, у якого кожен наступний член менший попереднього (додавання наступних членів збільшує суму на все менше число).

Можемо стверджувати: у збіжному ряді (12.1) завжди

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0 \tag{12.5}$$

Розглянемо ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\ldots, \tag{12.6}$$

який називається гармонічним. В цьому ряді також $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0.$ Щоб зрозуміти, збіжний ряд чи розбіжний, використаємо порівняльні теореми. Для цього запишемо більшу кількість членів: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\ldots$ і створимо з її членів групи, починаючи з третього члена: перша група вміщує два члени, друга − чотири, третя − вісім і т.д. Отримаємо:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{4}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)}_{8}+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{17}+...+\frac{1}{32}\right)}_{16}+\underbrace{\left(\frac{1}{33}+...+\frac{1}{64}\right)}_{32}+...$$

Складемо допоміжний ряд таким чином: в першій групі число $\frac{1}{3}$ замінимо меншим числом $\frac{1}{4}$, у другій групі три перших числа − меншим числом $\frac{1}{8}$ (останнім у групі), у всіх інших групах аналогічно всі попередні члени групи замінимо останнім членом групи. Отримаємо:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+...+\frac{1}{8}\right)}_{4}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+...+\frac{1}{16}\right)}_{8}+\underbrace{\left(\frac{1}{32}+...+\frac{1}{32}\right)}_{16}+\underbrace{\left(\frac{1}{64}+...+\frac{1}{64}\right)}_{32}...=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Ряд розбіжний, тому що члени ряду не зменшуються. Але цей ряд складений з гармонічного ряду шляхом заміни більших членів меншими. Тому на підставі п’ятої теореми гармонічний ряд розбіжний.

На підставі цієї ж теореми ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+... \qquad (12.7)$$

буде розбіжним, тому що члени ряду більші відповідних членів розбіжного гармонічного ряду ($\sqrt{2}<2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{2}$ і т.д.).

Аналогічно ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+... \qquad (12.8)$$

збіжний, тому що члени цього ряду менші відповідних членів ряду (12.2), який як спадна геометрична прогресія (будь-яка спадна геометрична прогресія зі знаменником $q$ має суму $S = \frac{1}{1-q}$) належить до збіжних рядів.

Приклад: Чи виконується необхідна ознака збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$.

*Розв'язання:*

Знайдемо границю загального члена $U_n = \frac{2n}{n^2+1}$ при необмеженому зростанні його номера $n$: $\lim\limits_{x\to\infty} U_n = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$.

Отже, необхідна умова збіжності $\lim\limits_{x\to\infty} U_n = 0$ виконується.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності рядів:

**12.21.** $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \ldots + \frac{2n}{2n+1}$;

**12.22.** $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \ldots + \frac{2n-1}{n^2}$;

**12.23.** $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \ldots + \frac{n}{1+n^2}$;

**12.24.** $\frac{1}{1001} + \frac{2}{2001} + \ldots + \frac{n}{1000n+1}$;

**12.25.** $\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \ldots + \sqrt{\frac{n+1}{n}}$;

**12.26.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{28} + \ldots + \frac{1}{1+n^3}$;

**12.27.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n+1}$;

**12.28.** $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$;

**12.29.** $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

**12.30.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{n+n!}$;

### Індивідуальне завдання

Перевірити виконання необхідної ознаки збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Nn}{n^N+1}$,

де $N$ – номер студента за списком.

## §3. Достатні умови збіжності

**Ознака Даламбера**

Якщо знакопозитивний ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$$

такий, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \qquad (12.9)$$

то ряд (12.1) буде збіжним при $l < 1$ і розбіжним при $l > 1,$ а при $l = 1$ ознака відповіді не дає (ряд може бути збіжним чи розбіжним).

<u>Приклад:</u> Дослідити на збіжність ряд: $1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n!}$

*Розв'язання:* Якщо $u_n = \frac{1}{n!}$ то $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.

Тоді $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{n!\cdot(n+1)} = \frac{1}{n+1}$.

Обчислимо границю цього виразу: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$ – ряд збіжний.

<u>Приклад:</u> Дослідити на збіжність гармонічний ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \ .$$

*Розв'язання:* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Ознака відповіді не дає, але, як ми знаємо з попереднього параграфу, цей ряд розбіжний.

<u>Приклад:</u> Дослідити на збіжність ряд:

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{13\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

*Розв'язання:* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\lim\limits_{n\leftrightarrow\infty}\frac{n}{n+2}=1$, але ряд збіжний.

**Ознака Коші**

Якщо для знакопозитивного ряду $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ існує

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l, \tag{12.10}$$

то при $l<1$ ряд збіжний, при $l>1$ − розбіжний, а при $l=1$ ознака відповіді не дає.

<u>Приклад:</u> Дослідити на збіжність ряд: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^n}+...$

*Розв'язання:* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0<1$ – ряд збіжний.

**Інтегральна ознака**

Якщо у знакопозитивному ряді $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ виконується умова $u_1\ge u_2\ge u_3\ge...\ge u_n\ge...$ і існує така функція $f(x)$, для якої справедливо $f(1)=u_1$; $f(2)=u_2$, $f(3)=u_3$, ..., $f(n)=u_n$,..., то ряд (15.1) буде збіжним, якщо невласний інтеграл $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ збіжний, і розбіжним, якщо інтеграл розбіжний.

<u>Приклад :</u> Дослідити на збіжність гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

*Розв'язання:* Складемо функцію $f(x)=\frac{1}{x}$ , яка задовольняє ознаку. Отримаємо:

$\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\ln\infty=\infty.$ Інтеграл розбіжний. Отже, ряд також розбіжний (ознака Даламбера відповіді не давала).

<u>Приклад:</u> Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

*Розв'язання:* Складемо функцію:

$$f(x)=\frac{1}{x(x+1)}\Rightarrow\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x(x+1)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})dx=$$

$$=\lim_{b\to\infty}(\ln x-\ln(x+1))\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\ln\frac{x}{x+1}\Bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln\frac{b}{b+1}-\ln\frac{1}{2})=$$

$=\ln\lim\limits_{b\to\infty}\frac{b}{b+1}-\ln\frac{1}{2}=\ln 1+\ln 2=\ln 2-$ інтеграл збіжний, тому ряд також збіжний.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Користуючись ознакою Даламбера, дослідити на збіжність ряди:

**12.31.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;

**12.32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$;

**12.33.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$;

**12.34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

**12.35.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ntg\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

**12.36.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}$;

**12.37.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2 s^3 n\frac{\pi}{2^n}$;

**12.38.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$;

Користуючись ознакою радикальною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

**12.39.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

**12.40.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$;

**12.41.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}s^3n^n\frac{\pi}{2^n}$;

**12.42.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{1}{n}$.

Користуючись ознакою інтегральною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

**12.43.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$;

**12.44.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\ln^2 n}$;

**12.45.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

**12.46.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$;

**12.47.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$;

**12.48.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n\ln n}$.

**Індивідуальне завдання**

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Nn-N}{N^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{Nn+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(Nn+1)(Nn+3)}$;

де $N$ – номер студента за списком.

## §4. Знакозмінні ряди

Якщо члени знакопочергового ряду

$$u_1-u_2+u_3-u_4+... \qquad (12.10)$$

такі, що $u_1>u_2>u_3>u_4...$ і

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0, \qquad (12.11)$$

то ряд буде збіжним (ознака Лейбніца).

Наприклад, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$ збіжний, тому що $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>...$ і $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0.$

На відміну від знакопочергового у знакозмінного ряду знак ”–” може бути розташований довільним чином (не обов’язково за знаком ”+” буде знак ”–”), тому знакопочерговий ряд є частковим випадком знакозмінного ряду.

***Озн.*** Якщо знакозмінний ряд

$$u_1+u_2+u_3+u_4+..., \qquad (12.12)$$

члени якого можуть бути як додатними, так і від’ємними, є таким, що ряд

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|..., \qquad (12.13)$$

складений з абсолютних величин його членів, буде збіжним, то цей знакозмінний ряд буде збіжним і називається абсолютно збіжним рядом.

***Озн.*** Якщо знакозмінний ряд (12.12) збіжний, а ряд (12.13), складений з абсолютних величин його членів, буде розбіжним, то цей знакозмінний ряд називається умовно збіжним.

Наприклад, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$ умовно збіжний, тому що гармонічний ряд (12.7) розбіжний, а ряд $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+...$ абсолютно збіжний, бо ряд, складений з абсолютних величин його членів, як було показано, збіжний.

***Зауваження 1:*** Якщо знакозмінний ряд збігається абсолютно, то будь-яка перестановка членів ряду місцями не впливає на його збіжність та суму;

***Зауваження 2:*** Якщо знакозмінний ряд збігається умовно, то перестановка місцями членів ряду може змінити суму ряду і навіть зробити його розбіжним.

Розглянемо збіжний знакозмінний ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$. Суму вказаного ряду позначимо через $S$. Переставимо члени ряду (пам'ятаємо, що їх безліч) так, щоб за кожним додатним членом знаходилось два від'ємних. Отримаємо:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+...=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+...=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...\right)=\frac{1}{2}S.$$

Застосування наведеної перестановки зменшило суму ряду у 2 рази.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

З'ясувати, які з поданих рядів абсолютно збіжні, які неабсолютно, які розбігаються:

**12.49.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{3}$;

**12.50.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}$;

**12.51.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$;

**12.52.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}$;

**12.53.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}$;

**12.54.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

### Індивідуальне завдання

Дослідити ряд на абсолютну збіжність $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(Nn)^N}$, де $N$ – номер студента за списком.

## § 5.Функціональні ряди

***Озн.*** Ряд $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+u_4(x)+...+u_n(x)+...$ (12.14)

називається функціональним, якщо всі $u_k(x)$ – певні функції. Якщо в цих функціях замість змінної $x$ підставити сталу, то функціональний ряд перетвориться в числовий. З одного і того ж функціонального ряду можливо отримати будь-яку кількість числових рядів (достатньо тільки змінити значення сталої). Отримані числові ряди можуть бути збіжними чи розбіжними.

***Озн.*** Сукупність всіх значень $x$, при яких функціональний ряд буде збіжним, називається областю збіжності ряду (рис.132).

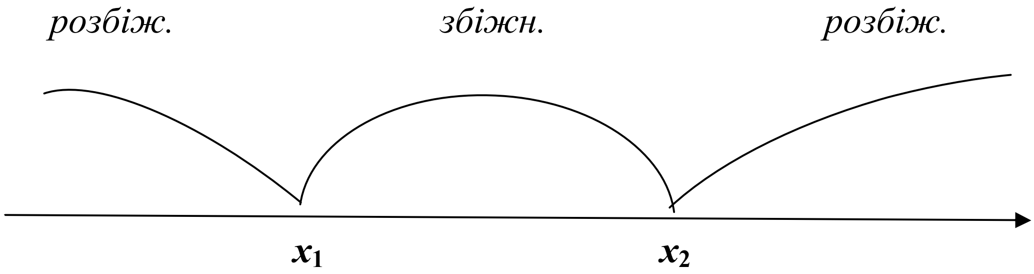


Рис. 12.1.

Наприклад, ряд $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+...$ буде розбіжним на інтервалі $[-1;1]$ і збіжним на інтервалах $(-\infty;-1)$ та $(1;+\infty)$.

***Озн.*** Функціональний ряд $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+u_4(x)+...+u_n(x)+...$ називається мажорантним для $x\in[a;b]$, якщо існує такий збіжний знакопозитивний числовий ряд $v_1+v_2+v_3+...+v_n+...$, для якого на інтервалі $[a;b]$ справедливо:

$$|u_1(x)|\le v_1;|u_2(x)|\le v_2;|u_3(x)|\le v_3;...|u_n(x)|\le v_n;....$$

Наприклад, ряд

$$\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+...+\frac{\cos nx}{n^2}+...$$

буде мажорантним на всій числовій осі, бо існує збіжний числовий ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...,$$

для якого $|\cos x| \le 1,\ |\cos 2x| \le 1$ і т.д.

З теорії рядів відомі три важливих для подальшого вивчення висновки:

***Висновок 1.*** В області мажорантності $[a;b]$ функціональний ряд має суму у вигляді деякої неперервної функції, тобто:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots = S(x),$$

де $S(x)$ як сума ряду є неперервна функція на інтервалі $[a;b]$.

***Висновок 2.*** Якщо мажорантний на $[a;b]$функціональний ряд має суму $S(x)$, то цей ряд в області мажорантності можна почленно інтегрувати (рис. 12.2), тобто:

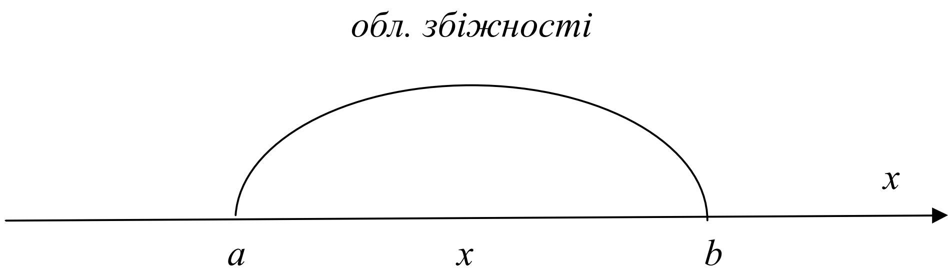


Рис. 12.2.

$$\int_a^x (u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)\ldots)dx = \int_a^x S(x)dx. \qquad (12.15)$$

***Висновок 3.*** Якщо функціональний ряд на $[a;b]$ збіжний і має суму $S(x)$, а його члени мають на цьому інтервалі неперервні похідні $u_1'(x), u_2'(x), u_3'(x), \ldots$, які утворюють на інтервалі мажорантний ряд $u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \ldots$, то його сума є похідною від $S(x)$, тобто:

$$u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \ldots = S'(x)\,. \qquad (12.16)$$

## § 6. Степеневі ряди

***Озн.*** Степеневим рядом називається функціональний ряд, члени якого − степеневі функції.

Ряд має вигляд:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots. \qquad (12.17)$$

***Теорема Абеля:*** Якщо степеневий ряд збігається при $x_0 \neq 0$, то він абсолютно збігається при $|x| < |x_0|$. Якщо степеневий ряд розбіжний при деякому $x_1$, то він буде розбіжним для будь-якого $|x| > |x_1|$.

Степеневий ряд має область збіжності з центром у точці $x = 0$ (рис.12.3).

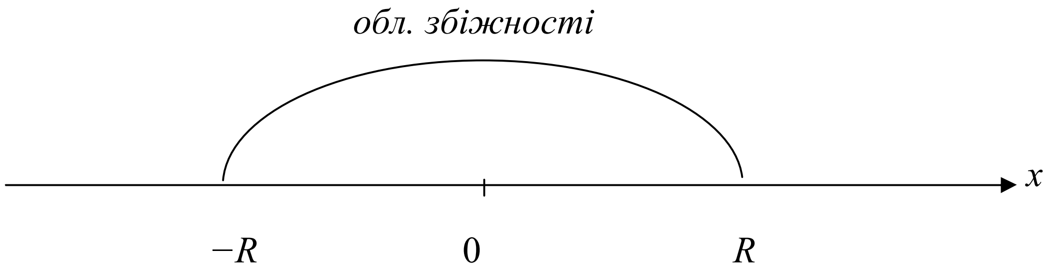


Рис. 13.3.

Область збіжності симетрична відносно $x = 0$, тому величину $R$ називають радіусом збіжності. На кінцях інтервалу (при $x = \pm R$) для встановлення збіжності ряду необхідні додаткові дослідження. Радіус збіжності степеневого ряду залежно від його вигляду може змінюватись у межах від 0 до $\infty$.

Для знаходження радіуса збіжності степеневого ряду розглядають ряд, складений з абсолютних величин його членів, тобто розглядають ряд

$$|a_0| + |a_1| \cdot |x_1| + |a_2| \cdot |x_2| + |a_3| \cdot |x_3| + \ldots + |a_n| \cdot |x_n| + \ldots,$$

для якого використовують ознаку Даламбера.

Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \left|\frac{x_{x+1}}{x_x}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \cdot L,$ то до неї можемо застосувати ознаку Даламбера для числових рядів, враховуючи, що всі множники при невідомих − числа. Тоді можемо стверджувати, що ряд (12.17) буде збіжним, якщо вираз $|x| \cdot L < 1$ і розбіжним, якщо $|x| \cdot L > 1$. Отже, для всіх $|x| < \frac{1}{L}$ ряд (12.17) буде збіжним, а для $|x| > \frac{1}{L}$ − розбіжним. Інтервал $(-\frac{1}{L}; \frac{1}{L})$ є інтервалом збіжності степеневого ряду, тобто (див. рис.12.3) $R = \dfrac{1}{L}$. Таким чином, радіус збіжності:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}. \tag{12.18}$$

Якщо сталі величини у формулі (12.17) мають степеневу форму, то для знаходження радіуса збіжності зручно використовувати ознаку збіжності Коші, за якою: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$.

<u>Приклад:</u> Визначити область збіжності ряду

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} ... + \frac{x^n}{n} + ... .$$

З умови маємо: $a_n = \frac{1}{n}$ і $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. За ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Отже, в інтервалі $(-1;1)$ ряд збіжний.

Для $x = -1$ отримаємо знакозмінний умовно збіжний ряд $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ...$. Для $x = 1$ отримаємо розбіжний гармонічний ряд. Отже, наведений у прикладі ряд буде збіжним в інтервалі $[-1;1)$.

Якщо степеневий ряд (12.17) збігається на інтервалі $(-R;R)$, то на деякому інтервалі $[a;b]$, що знаходиться всередині $(-R;R)$, ряд (12.17) буде мажорантним, тобто його сума є неперервною функцією (рис. 12.4), а інтервал $[a;b]$ є інтервалом мажорантності.

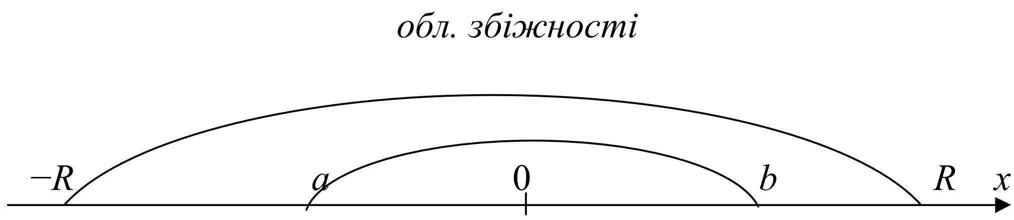


Рис. 12.4.

Для степеневого ряду (12.17) характерно, що:

а) в області збіжності ряд, складений з похідних степеневого ряду, також буде збіжним, і його сума дорівнює похідній від суми ряду (12.17), тобто якщо

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... + u_n(x) + ... = S(x), \text{ то}$$

$$u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + ... = S'(x). \quad (12.19)$$

Це означає, що в області збіжності при диференціюванні степеневого ряду отримаємо ряд, сума якого дорівнює похідній від суми цього ряду.

б) в області збіжності при інтегруванні степеневого ряду отримаємо ряд, сума якого дорівнює інтегралу від суми цього ряду, тобто якщо

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...=S(x), \text{ то}$$

$$\int_a^x (u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...)dx=\int_a^x S(x)dx, \qquad (12.20)$$

де інтервал $[a;x]$ належить $(-R;R)$.

***Висновки***

На будь-якому відрізку, що знаходиться всередині області збіжності степеневого ряду:

1) сума степеневого ряду − неперервна функція;

2) степеневий ряд допускає почленне інтегрування і сума інтегралів дорівнює інтегралу від суми ряду;

3) степеневий ряд допускає почленне диференціювання, причому сума ряду, складеного з похідних степеневого ряду, дорівнює похідній від суми ряду.

Вказані властивості степеневого ряду мають найширше застосування при розкладанні функцій в ряд.

**Розкладання степеневого ряду по степенях $x-a$**

Розглянемо степеневий ряд (12.17). У ньому змінні величини піднесені до степеня, тому маємо розкладання в ряд по степенях величини $x$, яке називають розкладанням по степенях $x$. Якщо ввести заміну $x=(x-a)+a$ і звести спільні члени, то отримаємо ряд

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+...+c_n(x-a)^n+..., \qquad (12.21)$$

який називається степеневим рядом, розкладеним по степенях $x-a.$ Якщо ряд (12.17) має інтервал збіжності $-R\le x\le R,$ то для ряду (12.17) запишемо:

$-R\le x-a\le R \Rightarrow -R+a\le x\le R+a$ (рис. 12.5).

*обл. збіжн.*

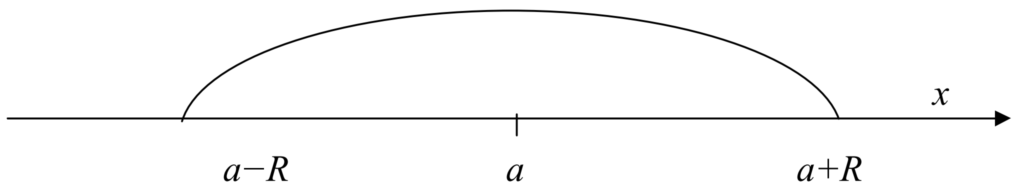


Рис. 12.5.

Ряд (15.26) збігається на інтервалі $(a-R;a+R)$ з центром у точці $a$. Якщо $a=0$, то отримаємо ряд (12.21). До ряду (12.21) належать всі властивості, які розглянуті для ряду (12.17). Наприклад, для ряду

$$(x-3)+(x-3)^2+(x-3)^3+...$$

при заміні $t=x-3$ отримаємо ряд $t+t^2+t^3+...$, збіжний на інтервалі $(-1;1)$. Тоді $-1<t<1 \Rightarrow -1<x-3<1 \Rightarrow 2<x<4$ − область збіжності цього ряду.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти інтервал збіжності степеневих рядів та з'ясувати питання про збіжність на кінцях інтервалу:

**12.55.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{4^n\sqrt[4]{n}}$; **12.56.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^n\sqrt[5]{n}}$;

**12.57.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{5^n\sqrt[6]{n}}$; **12.58.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n x^n}{7^n\sqrt[4]{n}}$.;

**12.59.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{5^n\sqrt[3]{n}}$; **12.60.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{9^n\sqrt{n}}$;

**12.61.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{7^n\sqrt[7]{n}}$; **12.62.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{2^n\sqrt[6]{n}}$;

### Індивідуальне завдання

Знайти інтервал збіжності степеневих рядів та вияснити питання про збіжність на кінцях інтервалу $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{N^n x^n}{(N+1)^n\sqrt[N]{n}}$, де $N$ – номер студента за списком.

## §7. Ряд Тейлора. Використання бінома Ньютона

З §5, IX відомо, що многочлен $R_n(x)$ розкладається за формулою Тейлора. Якщо степінь многочлена − число від'ємне чи дробове, то формула

Тейлора стає нескінченною, тобто перетворюється в степеневий ряд, який називається рядом Тейлора.

Будь-яка функція може бути представлена у вигляді многочлена і деякого остаточного члена $M_n(x)$ . Якщо при зростанні числа членів остаточний член прямує до нуля, то ця функція може бути замінена многочленом у вигляді ряду Тейлора, тобто:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots . \qquad (12.22)$$

В області збіжності степеневий ряд Тейлора збіжний і має своєю сумою функцію $f(x)$. Справедливо стверджувати, що ця функція розкладається у ряд Тейлора в області збіжності ряду, коли $x \in (a-R; a+R)$. При цьому остаточний член прямує до нуля. Якщо остаточний член до нуля не прямує, то така функція не може бути представлена цим рядом Тейлора, або цей ряд представляє іншу функцію .

Якщо в ряді Тейлора взяти $a = 0$, то отримаємо ряд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x + \frac{f'''(0)}{3!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x + \ldots, \qquad (12.23)$$

який називається рядом Маклорена і є частковим випадком ряду Тейлора.

***Розкладання елементарних функцій в ряд Тейлора***

1) $y = e^x$ .

Всі похідні від $e^x$ будуть $e^x$, а в точці $x = 0$ завжди $e^0 = 1$. Тоді:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n, \ (x \in R). \qquad (12.24)$$

Якщо $x = 1$ то $e^x = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots \approx 2{,}718281\ldots$ .

2) $y = \sin x$.

Похідні: $y' = \cos x$; $y'' = -\sin x$; $y''' = -\cos x$; $y^{(4)} = \sin x$ і т.д. При $x = 0 \Rightarrow \sin 0 = 0; \cos 0 = 1$.

Тоді:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \ldots \quad (x \in R) \tag{12.25}$$

3) $y = \cos x$.

Похідні: $y' = -\sin x$; $y'' = -\cos x$; $y''' = \sin x$; $y^{(4)} = \cos x$ і т.д. При $x = 0 \Rightarrow \sin 0 = 0$; $\cos 0 = 1$.

Тоді:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x + \frac{1}{4!}x^2 - \frac{1}{6!}x^3 + \ldots \quad (x \in R) \tag{12.26}$$

***Зауваження***: в розкладанні обох тригонометричних функцій кут вимірюється в радіанах (при доведенні похідних цих функцій використовується перша визначна границя, в якій застосовується радіанна міра кута).

г) $y = (1+x)^m$. Це біном Ньютона.

Похідні: $y' = m(1+x)^{m-1}$;

$y'' = m(m-1)(1+x)^{m-2}$;

$y''' = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$;...

$y^{(n)} = m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)...(m-n+1)(1+x)^{m-n}$;... .

При $x = 0$ маємо:

$y(0) = 1; y'(0) = m; y''(0) = m(m-1); y'''(0) = m(m-1)(m-2)$;...
$y^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)(m-3)...(m-n+1)$. Тоді

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}m(m-1)(m-2)(m-3)...(m-n+1)x^n + \ldots,\ (x \in (-1;1)). \tag{12.27}$$

Якщо $m \in N$, то число членів обмежене і дорівнює $m+1$. Якщо $m \notin N$, то число членів необмежене.

## Використання бінома Ньютона

Розглянемо функцію $y=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$. Для цієї функції можемо використати формулу (12.27), в якій $m=-1$. Тоді:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots, \qquad (12.28)$$

де права частина є геометричною прогресією. Інтегруємо ряд в інтервалі $[0;x]$, який знаходиться всередині інтервалу $(-1;1)$. Отримаємо:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\int_0^x (1-x+x^2-x^3+\ldots)dx \Rightarrow \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,$$

$$x\in(-1;1) \qquad (12.29)$$

Заміна в (12.29) $+x$ на $-x$ дає:

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots. \qquad (12.30)$$

Тоді:

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\ldots \Rightarrow \ln\frac{1+x}{1-x}=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots).$$

Зробимо заміну: $\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{1}{n}\Rightarrow x=\frac{1}{2n+1}$. Отримаємо:

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n=2(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots).$$

Якщо $n=1,$ то $\ln 2=2(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\ldots)=0{,}6931.$

При $n=2\Rightarrow \ln 3-\ln 2=2(\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 7^3}+\frac{1}{5\cdot 7^5}+\ldots)-0{,}6931=1{,}0986$.

Аналогічно знаходяться логарифми інших чисел.

В розкладанні формули (12.28) введемо заміну $x$ на $x^2$.

Тоді: $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots\Rightarrow\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x(1-x^2+x^4-x^6+\ldots)dx\Rightarrow$

$$\Rightarrow arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad x \in [-1;1]. \qquad (12.31)$$

Якщо $x = 1$, то $arctg1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \Rightarrow \pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \ldots$ . Цей ряд збігається повільно, тому для обчислення $\pi$ необхідно взяти досить велику кількість членів.

В розкладанні формули (12.27) підставимо $m = -\frac{1}{2}$ . Тоді:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)x^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)x^3 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4!\cdot 2^4}x^4 - \ldots.$$

Проведемо заміну $x$ на $-x^2$. Отримаємо:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4!\cdot 2^4}x^8 + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x (1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4!\cdot 2}x^8 + \ldots)dx \Rightarrow$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}\cdot\frac{x^9}{9} + \ldots . \qquad (15.32)$$

Цей ряд збігається на інтервалі $(-1;1)$.

Якщо $x = \frac{1}{2}$, то $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4\cdot 3} + \frac{3}{2^8\cdot 5} + \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi = 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} + \ldots \approx 3{,}139$ . Це число отримане при використанні всього трьох членів. Таким чином, цей ряд збігається досить швидко.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розкласти в ряд Маклорена функції:

**12.63.** $\frac{\ln(1+x^3)}{x^2}$;

**12.64.** $\frac{\arcsin x^3}{x\sqrt{x}}$;

**12.65.** $\frac{\sin 5x}{x}$; **12.66.** $\frac{arctgx\sqrt{x}}{x}$;

**12.67.** $x^2 e^{-x\sqrt{x}}$; **12.68.** $\sqrt{x}\cos x\sqrt{x}$;

**12.69.** $e^{-\frac{1}{2}x^2}$; **12.70.** $x\sin\sqrt[3]{x}$.;

**Індивідуальне завдання**

Розкласти в ряд Маклорена функцію $\frac{\arccos\sqrt{x}}{Nx}$, де $N$ – номер студента за списком.

## § 8. Використання рядів до наближених обчислень інтегралів

При розкладанні будь-якої функції в ряд Тейлора отримуємо степеневий ряд, який в області збіжності допускає інтегрування. При цьому інтеграл від функції дорівнює інтегралу від отриманого ряду при необмеженому зростанні членів ряду. Досить часто інтеграл від функції, що розкладається в ряд, обчислюється з певними труднощами, або взагалі його первісна не виражається через елементарні функції. Разом з тим інтегрування членів ряду зводиться в основному до неодноразового використання формули:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Розглянуті міркування спонукали до виникнення ідеї використати розкладання в ряд Тейлора до наближеного інтегрування. Степінь наближеності визначається необхідною точністю обчислень (як правило, точність обчислень відома заздалегідь) та вибраною для інтегрування кількістю членів ряду, яка визначається швидкістю збіжності ряду. При безумовній простоті використання такого методу наближеного інтегрування існує досить суттєве обмеження його використання: межі інтегрування повинні знаходитись в межах збіжності ряду Тейлора. Підінтегральна функція може досить суттєво відрізнятись від наведених розкладань елементарних функцій, але для її розкладання необов'язково завжди знаходити похідні й використовувати безпосередньо ряд Тейлора. Якщо функція, що розкладається в ряд Тейлора, така, що допускає можливість використати розкладання елементарних функцій, то таку можливість необхідно завжди використовувати. Наприклад, потрібно розкласти в ряд Тейлора функцію $y = \frac{\sin x}{x}$. Звичайно, для розкладання в ряд можемо застосувати формулу (12.22), але такий спосіб неефективний. Набагато простіше використати відоме розкладання функції $y = \sin x$. Отже:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots .$$

Ділимо наведене розкладання почленно на $x$. Отримаємо:

$$\frac{\sin x}{x} = x - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots$$

Якщо розкладанню підлягає функція $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, то використовують розкладання бінома Ньютона при $m = \dfrac{1}{2}$. Отримаємо:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \dots .$$

Проводимо заміну $x$ на $x^2$ і отримаємо:

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 + \dots .$$

Отримане розкладання ділимо на $x$:

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^7 + \dots .$$

<u>Приклад:</u> Обчислити $\int\limits_0^1 e^{-0,5x^2}dx$ з точністю до $0,001$.

Використовуємо розкладання: $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \dots .$

Проводимо заміну $x$ на $-\dfrac{1}{2}x^2$ і отримаємо:

$$e^{-0,5x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{8}\cdot x^6 + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{16}x^8 - \dots .$$

Підставимо отримане розкладання, яке збігається при всіх значеннях $x$, в інтеграл:

$$\int_0^1 e^{-0,5x^2}dx = \int_0^1 (1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{48}x^6+\frac{1}{384}x^8-...)dx =$$

$$= \left( x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{40}x^5-\frac{1}{336}x^7+\frac{1}{3456}x^9-...\right)\Bigg|_0^1 = 1-\frac{1}{6}+\frac{1}{40}-\frac{1}{336}+\frac{1}{3456}+...\approx 0,856.$$

<u>Приклад:</u> Обчислити $\int_0^{0,5}\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}dx$ з точністю до $0,001$.

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+...\Rightarrow \sin x^2 = x^2-\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{5!}x^{10}-\frac{1}{7!}x^{14}+...\Rightarrow$$

$$\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{\sqrt{x}}-\frac{x^6}{3!\sqrt{x}}+\frac{x^{10}}{5!\sqrt{x}}-\frac{x^{14}}{7!\sqrt{x}}+...=$$

$$= x\sqrt{x}-\frac{1}{6}x^5\sqrt{x}+\frac{1}{120}x^9\sqrt{x}-\frac{1}{5040}x^{13}\sqrt{x}+....$$

Обчислюємо інтеграл:

$$\int_0^{0,5}\frac{\sin\ x^2}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{0,5}(x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}x^{\frac{11}{12}}+\frac{1}{120}x^{\frac{19}{2}}-\frac{1}{5040}x^{\frac{27}{2}}+...)\,dx =$$

$$= \left( \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{x^{\frac{13}{2}}}{\frac{6\cdot 13}{2}}+\frac{x^{\frac{21}{2}}}{\frac{120\cdot 21}{2}}-\frac{x^{\frac{29}{2}}}{\frac{5040\cdot 29}{2}}+...\right)\Bigg|_0^{0,5} = \left(\frac{1}{10\sqrt{2}}-\frac{1}{2496\sqrt{2}}+...\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{20}-\frac{\sqrt{2}}{4992}+...\approx 0,0498\cdot\sqrt{2}\approx 0,0704\ .$$

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити з точністю до 0,001 визначені інтеграли

**12.71.** $\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

**12.72.** $\int_0^{0,5}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$;

**12.73.** $\int_0^{0,5}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$;

**12.74.** $\int_0^1 xe^{-x}dx$;

**12.75.** $\int_0^1 x^3\cos\sqrt{x}dx$;

**12.76.** $\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\sin x^{\frac{1}{2}}dx$;

**12.77.** $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{arctgx^3}{x^2}dx$;

**12.78.** $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.;

**Індивідуальне завдання**

Обчислити з точністю до 0,001 визначені інтеграли $\int_0^1 (x+N)e^{-Nx}dx$, де $N$ – номер студента за списком.

## § 9. Розв’язування диференціальних рівнянь за допомогою рядів

Наведеними в XIII методами розв’язування диференціальних рівнянь розв’язується досить обмежена кількість рівнянь. До всіх інших рівнянь застосовують методи наближеного обчислення. Одним із них є метод представлення розв’язку у вигляді степеневого ряду Тейлора, за яким частинним розв’язком рівняння є сума ряду. Досить часто для диференціального рівняння відомі початкові умови. Нехай необхідно розв’язати диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$, яке задовольняє початкову умову: $y(a) = y_0$. Його розв’язок шукаємо у вигляді ряду Тейлора:

$$y = y(a) + y'(a)\cdot(x-a) + \frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{y'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Для цього розв’язку з умови задачі відомий перший член ряду: $y(a)=y_0$. Щоб знайти другий член, вирахуємо $y'(a)$ , для чого використаємо диференціальне рівняння: $y'(a) = f(x,a)$. Шляхом диференціювання заданого диференціального рівняння знаходимо наступні похідні, з яких після заміни $x$ на $a$ обчислюємо $y''(a), y'''(a)$ і т.д.

<u>Приклад:</u> розв’язати диференціальне рівняння $y' = x^2 + y^2 - e^x$ , якщо $y(0) = 0$.

Знаходимо $y'(0) = 0^2 + 0^2 - e^0 = -1$.

Знайдемо послідовно декілька похідних:

$y'' = 2x + 2yy' - e^x \Rightarrow y''(0) = 2\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot(-1) - e^0 = -1$.

$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2y\cdot y'' - e^x \Rightarrow y'''(0) = 2+2-1 = 3$.

$y^{(4)} = 4y'\cdot y'' + \ + 2y'\cdot y'' + 2y\cdot y''' - e^x = 6y'\cdot y'' + 2y\cdot y''' - e^x \Rightarrow y^{(4)}(0) = 5$.

$y^{(5)} = 6(y'')^2 + 6y'\cdot y''' + 2y'\cdot y''' + 2y\cdot y^{(4)} - e^x \Rightarrow y^{(5)}(0) = -19$.

$y^{(6)} = 12y''\cdot y''' + 6y''\cdot y''' + 6y'\cdot y^{(4)} + 2y''\cdot y''' + 2y'\cdot y^{(4)} + 2y'\cdot\ y^{(4)} + 2y\cdot y^{(5)} - e^x =$

$= 20y''y''' + 10y'\cdot y^{(4)} + 2y\cdot y^{(5)} - e^x \Rightarrow y^{(6)}(0) = -111$.

Тоді розв’язок буде:

$$y = 0 + (-1) \cdot x + \frac{-1}{2!} \cdot x^2 + \frac{3}{3!} \cdot x^3 + \frac{5}{4!} \cdot x^4 + \frac{-19}{5!} \cdot x^5 + \frac{-111}{6!} \cdot x^6 + \ldots =$$
$$= -x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{19}{120}x^5 - \frac{111}{720}x^6 + \ldots.$$

<u>Приклад:</u> Розв'язати рівняння: $y'' - e^y \cdot y' = 0; y(0) = 0; y'(0) = 1$.

Знайдемо $y''(0) = e^0 \cdot 1 = 1$.

Знайдемо наступні похідні при $a = 0$:

$$y''' = e^y (y')^2 + e^y y'' \Rightarrow y'''(0) = 2.$$
$$y^{(4)} = e^y (y')^3 + e^y 2y'y'' + e^y y'y'' + e^y y''' = e^y ((y')^3 + 3y'y'' + y''') \Rightarrow y^{(4)}(0) = 6.$$

$$y^{(5)} = e^y y'((y')^3 + 3y'y'' + y''') + e^y (3(y')^2 y'' + 3(y'')^2 + 3y'y''' + y^{(4)}) =$$
$$= e^y ((y')^4 + 6(y')^2 y'' + 3(y'')^2 + 4y'y''' + y^{(4)}) \Rightarrow y^{(5)}(0) = 24.$$

Підставимо в ряд Тейлора і отримаємо:

$$y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 + \frac{6}{24}x^4 + \frac{24}{120}x^5 + \ldots = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^5 + \ldots \quad .$$

Отриманий розв'язок − розкладання в ряд функції $-\ln(1 - x)$.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти перші чотири ненульових члени розв'язку рівнянь

**12.79.** $y' = y^2 + e^{-2x}; \quad y(0) = 0$.

**12.80.** $y' = \cos 2x - \sin x; \; y(0) = 0$.

**12.81.** $y'' = \dfrac{1 + \ln x}{x}; \; y(1) = y'(1) = 0$.

**12.82.** $y'' = 3\sqrt{1 + y}; \; y(2) = 0; y'(2) = 2$.

**12.83.** $y'' + 2y' + y = x - 2\sin x + 2; \; y(0) = 1; y'(0) = 2.$

### Індивідуальне завдання

Знайти перші чотири ненульових члени розв'язку рівнянь
$y' = \cos Nx - (N + 1)\sin x; \; y(0) = 0$ , де $N$ – номер студента за списком.

***Запитання до розділу XI***

1. Що таке числовий ряд?
2. Що таке функціональний ряд?
3. Що таке степеневий ряд?
4. Які ряди називаються знакопозитивними?
5. Яка різниця між знакозмінними та знакочерговими рядами?
6. Чи утворює ряд спадна геометрична прогресія?
7. Що таке сума ряду та частинна сума ряду?
8. Які теореми називаються порівняльними та в чому їх цінність?
9. Що таке збіжність та розбіжність ряду?
10. В чому полягає зміст необхідної умови збіжності ряду?
11. Ознака збіжності Даламбера.
12. Ознака збіжності Коші.
13. Інтегральна ознака збіжності.
14. Ознака збіжності Лейбніца для знакозмінних рядів.
15. Що таке область збіжності функціонального ряду?
16. Які ряди називаються мажорантними?
17. Які умови інтегрування та диференціювання степеневого ряду?
18. Який зміст в понятті: ”розкладання по степенях $x$”?
19. Як розуміти поняття: ”розкладання по степенях $x-a$”?
20. Який вигляд має ряд Тейлора?
21. Що таке ряд Маклорена і чим він відрізняється від ряду Тейлора?
22. За яких умов функція розкладається в ряд Тейлора?
23. Як провести розкладання в ряд Тейлора функцій $e^x$, $\sin x$, $\cos x$?
24. Як розкладається в ряд Тейлора біном Ньютона?
25. Як знаходять розкладання в ряд $\arcsin x$ та $\arccos x$?
26. Як обчислюються натуральні логарифми?
27. Як використовують ряд Тейлора до обчислення визначених інтегралів?
28. Як розв’язують диференціальні рівняння за допомогою рядів?
29. Чи існують функціональні ряди від неалгебраїчних функцій?