IX. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§1. Первісна та невизначений інтеграл

З основ диференціального числення знаємо, що для відомої функції $y=f(x)$ маємо похідну $y' = f'(x)$. Можемо поставити обернену задачу: для відомої похідної $f'(x)$знайти функцію $f\ (x)$, від якої знайдена ця похідна. Така функція називається **первісною**.

Озн: Знаходження функції $F(x)$ по відомому її диференціалу $dF(x) = f(x)dx$, тобто дія, обернена до диференціювання, називається інтегруванням, а шукана функція $F(x)$ – первісною функцією від заданої функції $f(x)$.

Отже, якщо відома похідна $f'(x)$, то її первісна буде $f(x)$. Оскільки похідна від елементарної функції залежить від аргументу x, тобто похідна є функцією від аргументу x, то можемо саму похідну позначити через $f(x)$, а первісну − через $F(x)$. Тоді:

$$(F(x))' = F'(x) = f(x),$$

або в диференціальній формі

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Наприклад, якщо $y = \sin x$, то $y' = \cos x$. Тому $\cos x$ є похідною, а $\sin x$ − первісною. Аналогічно функція $arctgx$ буде первісною для функції $\frac{1}{1+x^2}$.

Озн. Дія знаходження первісної за відомою похідною називається інтегруванням.

У геометричному змісті похідна – це тангенс кута нахилу дотичної, тому про первісну можемо говорити як про функцію, до якої в області завдання у будь-якій точці можемо побудувати дотичну. Це означає, що $f(x)$ повинна бути неперервною функцією, а сама первісна − гладкою функцією (див. визначення гладкої функції).

Функція $\cos x$ є похідною від $\sin x$. Але й від функції $\sin x + 3$ похідна також буде $\cos x$. Адже похідна від будь-якого числа дорівнює нулю. Таким чином бачимо, що можемо створити безліч функцій виду $\sin x + C$ (C − стала величина), похідна від яких є $\cos x$. Виникає питання: чи не існують ще якісь функції, похідна від яких буде також дорівнювати $\cos x$? Або взагалі скільки первісних (і які) існує для неперервної функції $f(x)$? Нехай крім первісної $F(x)$ існує ще одна первісна $\Phi(x)$, похідна від якої також дорівнює $f(x)$. Знайдемо різницю між ними, позначивши її через $U(x)$. Маємо:

$$F(x) - \Phi(x) = U(x).$$

Похідна від $U(x)$ буде:

$$F'(x) - \Phi'(x) = U'(x).$$

Але за умовою $F'(x) = f(x)$ і $\Phi'(x) = f(x)$, тому:

$$U'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Отже, $U'(x) = 0$. Це означає, що $U(x) = C$ (похідна від сталої завжди дорівнює нулю). Таким чином, для функції $f(x)$ її первісні $F(x)$ та $\Phi(x)$ відрізняються між собою тільки на число, тобто:

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Висновок. Для будь-якої похідної існує безліч первісних, але всі вони відрізняються тільки на число. Тому можемо в цілому сказати: для функції $f(x)$ існує первісна $F(x) + C$. У вигляді математичної формули це записується так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (9.1)$$

Символ $\int f(x)dx$ (читається: інтеграл від еф від ікс деікс) ввів Г. Лейбніц як поняття граничної суми. Розташована під знаком інтеграла функція називається підінтегральною функцією. З рівності (9.1) маємо:

$$f(x) = F'(x) \Rightarrow f(x)dx = dF(x) \Rightarrow \int dF(x) = F(x) \Rightarrow \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Озн. 2: Загальний вираз $F(x) + C$ сукупності всіх первісних від функцій $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від цієї функції і позначається:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (9.1)$$

Правило: Щоб переконатися в правильності проведеного інтегрування, необхідно знайти похідну від отриманої первісної і впевнитись в тому, що вона співпадає з підінтегральною функцією.

Залежно від підінтегральної функції використовують ті чи інші методи знаходження первісної, які називають методами інтегрування, але всі вони у кінцевому результаті зводяться до знаходження наступних елементарних інтегралів, які необхідно запам'ятати:

Запишемо основні формули інтегрування:

1.	$\int dx = x + C$	2.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ (n \neq -1)$
3.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	4.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5.	$\int e^x dx = e^x + C$	6.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
7.	$\int \cos x dx = \sin x + C$	8.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
9.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	10.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	12.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert v + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
13.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	14.	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$

Властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$;

2. $\int F'(x)dx = F(x) + C$;

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, тобто сталий множник можна винести за знак інтеграла.

4. $\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$, тобто інтеграл від алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі всіх доданків.

5. $\int f(kx+b)dx = \dfrac{1}{k}\cdot F(kx+b)$.

Приклад: Обчислити невизначений інтеграл $\int (x^2 + \frac{7}{x} - \frac{4}{1+x^2})dx$.

$$\int (x^2 + \frac{7}{x} - \frac{4}{1+x^2})dx = \int x^2dx + \int \frac{7}{x}dx - \int \frac{4}{1+x^2}dx = \int x^2dx + 7\int \frac{1}{x}dx - 4\int \frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$\frac{x^3}{3} + C_1 + 7\ln x + C_2 - 4arctgx + C_3 = \frac{x^3}{3} + 7\ln x - 4arctgx + C.$$

З цього прикладу робимо висновок: якщо маємо суму інтегралів, то немає ніякого сенсу після кожного обчисленого інтеграла писати сталу, її пишуть після обчислення всіх інтегралів.

§ 2. Найпростіші методи інтегрування

а) Метод безпосереднього інтегрування.

Даний метод полягає в тому, що для знаходження інтеграла ми безпосередньо користуємося формулами інтегрування.

Приклад: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (5x^3 - \frac{1}{4}x^4 + 2x - 1)dx$; б) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^5} - \frac{7}{x^3})dx$;

Розв'язання: Для знаходження невизначеного інтегралу користуємося таблицею інтегралів.

а) $\int (5x^3 - \frac{1}{4}x^4 + 2x - 1)dx = 5\int x^3dx - \frac{1}{4}\int x^4dx + 2\int xdx - \int dx =$

$$= \frac{5x^{3+1}}{3+1} - \frac{x^{4+1}}{4(4+1)} + \frac{2x^{1+1}}{1+1} - x + C = \frac{5x^4}{4} - \frac{x^5}{20} + x^2 - x + C.$$

б) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^5} - \frac{7}{x^3})dx = \int \sqrt{x}dx + \int \sqrt[3]{x^5}dx - \int \frac{7}{x^3}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{5}{3}}dx - 7\int x^{-3}dx =$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} - 7\int x^{-3}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} - 7\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - 7\frac{x^{-2}}{-2} + C =$$

$7 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + \frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{x^8} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + C.$

б) Метод заміни змінної (підстановки).

Якщо заданий інтеграл $\int f(x)dx$ не може бути знайдений безпосередньо за основними формулами, то введення нової незалежної змінної в багатьох випадках вдається перетворити підінтегральний вираз $\int f(x)dx$ в легко інтегрований. При цьому інтеграл зводиться до табличного або до такого, спосіб обчислення якого відомо. Заміна змінної інтегрування і складає суть методу, що називається методом підстановки.

<u>Приклад:</u> Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \cos(9x-4)dx$; б) $\int \frac{\ln x}{x} dx$;

Розв'язання:

$$\text{а)} \int \cos(9x-4)dx = \left| \begin{matrix} 9x-4=t \\ 9dx = dt \\ dx = \frac{1}{9}dt \end{matrix} \right| = \int \cos t \cdot \frac{1}{9}dt = \frac{1}{9}\int \cos t \cdot dt = \frac{1}{9}\sin t + C =$$

$$= \frac{1}{9}\sin(9x-4) + C.$$

$$\text{б)} \int \frac{\ln x}{x} dx = \left| \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \right| \Rightarrow \int t \cdot dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

в) Інтегрування частинами.

Із формули диференціала добутку $d(uv) = duv + udv$ інтегруванням обох частин рівності одержується формула інтегрування частинами:

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (9.2)$$

За цією формулою знаходження інтеграла $\int udv$ зводиться до знаходиться іншого інтеграла $\int vdu$. Застосовувати цю формулу зручно у тих випадках, коли $\int vdu$ буде легко знаходитися. Для застосування формули інтегрування частинами необхідно підінтегральний вираз представити у вигляді добутку двох співмножників u та dv. За dv завжди вибирають такий вираз, що містить dx, із якого інтегруванням можна знайти v. За u в більшості випадків приймається функція, яка при диференціюванні спрощується.

<u>Приклад:</u> Знайти невизначений інтеграл $\int \ln xdx$.

$$\int \ln xdx = \left| \begin{matrix} \ln x = u; \frac{dx}{x} = du \\ dx = dv; x = v \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x\ln x - \int dx + C =$$

$$x \cdot \ln x - x + C.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти невизначені інтеграли:

9.1. $\int (10x^2 + 2x + \frac{3}{x})dx$;

9.2. $\int (10x + \frac{1}{7} + \cos x)dx$;

9.3. $\int (\frac{1}{5}x + 5 + \cos x)dx$;

9.4. $\int (10x^5 - x + \frac{3}{x})dx$;

9.5. $\int \left(2x^7 - \frac{1}{6}x^6 - 2\right)dx$;

9.6. $\int \left(4x^2 - 7x + 2\right)dx$;

9.7. $\int (3x^2 + 4x + \frac{5}{x})dx$;

9.8. $\int (10x^4 + 12x + \sin x)dx$;

9.9. $\int (4x^3 + 2x^2 + \frac{1}{x})dx$;

9.10. $\int (\frac{1}{3}x^2 + 3x + \frac{4}{x})dx$;

9.11. $\int (\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^{11}}})dx$;

9.12. $\int (7x^2 + \frac{1}{\sqrt[9]{x^5}} + 6)dx$;

9.13. $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}})dx$;

9.14. $\int (\sqrt[7]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}})dx$;

9.15. $\int (\sqrt[9]{x} - \frac{1}{\sqrt[7]{x^{12}}})dx$;

9.16. $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}})dx$;

9.17. $\int (\sqrt[11]{x} - \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}})dx$;

9.18. $\int \left(3\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^4} + 1\right)dx$;

9.19. $\int \left(4\sqrt[7]{x^8} + \frac{1}{3x^3} + 2\right)dx$;

9.20. $\int (\sqrt[7]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2x)dx$.

Знайти невизначені інтеграли, користуючись заміною змінних:

9.21. $\int \cos(4x + 1)dx$;

9.22. $\int \frac{dx}{1 - 3x}$;

9.23. $\int e^{6-4x}dx$;

9.24. $\int 4^{\frac{x}{4}+1}dx$;

9.25. $\int \frac{dx}{\sin^2(3 - 4x)}$;

9.26. $\int \frac{dx}{(3 - 4x)^2 + 1}$;

9.27. $\int cos(8x + 3)dx$;

9.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}}$;

9.29. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$;

9.30. $\int \frac{dx}{3 - 8x}$;

9.31. $\int \frac{x^4}{x^5 + 1}dx$;

9.32. $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1}dx$;

9.33. $\int x^2 \sqrt{x^3 - 4}dx$;

9.34. $\int \frac{1}{x \ln x}dx$;

9.35. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$; **9.36.** $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$;

9.37. $\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx$; **9.38.** $\int \frac{x^3}{x^4+1}dx$;

9.39. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$; **9.40.** $\int \frac{\ln x}{x}dx$.

Знайти невизначені інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами.

9.41. $\int xe^x dx$; **9.42.** $\int x^2 \ln x dx$;

9.43. $\int (x-2)cosxdx$; **9.44.** $\int (6+x)sinxdx$;

9.45. $\int \sqrt{x}\ln x dx$; **9.46.** $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$;

9.47. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$; **9.48.** $\int x^2 cosxsx$;

9.49. $\int (x+3)^2 e^{2x} dx$; **9.50.** $\int (4-x)^2 sii\, 5xdx$.

Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (5x^n + 2x^{n-1} + \frac{n}{x^n})dx$; б) $\int (\sqrt[n]{x} - \frac{n-1}{\sqrt[3]{x^{n+3}}} + nx)dx$;

в) $\int \frac{(n-1)dx}{\sqrt[n+1]{x+n}}$; г) $\int (n-x)^2 e^{\frac{x}{n}} dx$.

де n – номер студента за списком.

§ 3. Інтеграли, що зводяться самі до себе

Зустрічаються такі інтеграли, для яких застосування формули інтегрування ”частинами” призводить до того, що інтеграл у правій частині формули відрізняється від інтеграла у лівій частині лише множником, тобто у формулі $\int udv = uv - \int vdu$ маємо: $\int vdu = k\int udv$. Тому:

$$\int udv = uv - k\int udv.$$

Вводячи заміну $\int udv = I,$ отримаємо формулу:

$$I = uv - kI \Rightarrow I = \frac{uv}{1+k} + C.$$

Число k – залежить від підінтегральної функції і може бути як додатним, так і від’ємним. Число С у формулі дописане згідно з поняттям невизначеного інтеграла.

<u>Приклад:</u> Обчислити $\int e^x \sin x \cdot dx.$

В добутку функцій зв'язок через похідну відсутній (похідна від $e^x \neq \sin x$ та похідна від $\sin x \neq e^x$), тому використовуємо формулу інтегрування „частинами".

$$I = \int e^x \sin x \cdot dx = \left| \begin{matrix} \sin x = u; \cos x \cdot dx = du \\ e^x dx = dv; e^x = v \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x \cdot dx.$$

Але у цьому інтегралі також є добуток незв'язаних через похідну функцій, тому до нього застосовуємо формулу інтегрування "частинами". Отже, будемо мати:

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x \cdot dx = \left| \begin{matrix} \cos x = u; - \sin x \cdot dx \\ e^x dx = dv; e^x = v \end{matrix} \right| = e^x \sin x - (e^x \cos x -$$

$$- \int e^x (-\sin x) dx) = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \cdot dx = e^x (\sin x - \cos x) - I.$$

Одержали: $I = e^x (\sin x - \cos x) - I \Rightarrow 2I = e^x (\sin x - \cos x) \Rightarrow I = \dfrac{e^x (\sin x - \cos x)}{2}.$

Інтеграл невизначений, тому:

$$\int e^x \sin x \cdot dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти невизначені інтеграли:

9.51. $\int e^{2x} \cos 3x \cdot dx$;

9.52. $\int e^{3x} \sin 2x \cdot dx$;

9.53. $\int e^{5x} \sin 4x \cdot dx$;

9.54. $\int e^{4x} \cos 3x \cdot dx$;

9.55. $\int 5^{3x} \cos 7x \cdot dx$;

9.56. $\int 3^x \sin 3x \cdot dx$;

9.57. $\int e^{-3x} \sin 3x \cdot dx$;

9.58. $\int e^{-4x} \cos 5x \cdot dx$;

9.59. $\int e^{-x} \cos 2x \cdot dx$;

9.60. $\int e^x \sin(3x - 2) dx$.

Індивідуальне завдання

Знайти невизначений інтеграл: $\int \cos nx \cdot e^{\frac{x}{n}} dx$

де n – номер студента за списком.

§3. Інтегрування правильного алгебраїчного дробу

Алгебраїчний раціональний дріб − це дріб виду $\dfrac{R_n(x)}{S_m(x)}$, де $R_n(x)$ і $S_m(x)$ є многочленами виду:

$$R_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0 \text{ і}$$
$$S_m(x) = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + ... + B_1 x + B_0.$$

В цих многочленах степені n та m − цілі числа. Якщо хоч одне з них буде дробовим, то дріб $n \geq m,$б буде ірраціональним. Якщо $n < m,$ то дріб буде правильним, а якщо то неправильним. Якщо дріб неправильний, то шляхом ділення чисельника на знаменник виділяємо цілу частину і отримуємо правильний дріб (наприклад, для числового дробу $\frac{17}{3} = \frac{15+2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$). Для неправильного функціонального дробу після ділення одержимо:

$$\frac{R_n(x)}{S_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{W_k(x)}{S_m(x)}, \tag{9.3}$$

де $P_{n-m}(x)$ та $W_k(x)$ − правильні многочлени. Таким чином, інтегрування неправильного дробу зводиться до інтегрування многочлена $P_{n-m}(x)$ та правильного дробу $\frac{W_k(x)}{S_m(x)}$.

Приклад: Виділити цілу частину з неправильного алгебраїчного дробу

$$\frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 10x - 12}{x^2 - 2x - 8}.$$

Ділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^4 - x^3 - 3x^2 - 10x - 12 & x^2 - 2x - 8 \\ \cline{3-3}
- & \underline{x^4 - 2x^3 - 8x^2} & x^2 + x + 7 \\
 & \quad x^3 + 5x^2 - 10x & \\
- & \quad \underline{x^3 - 2x^2 - 8x} & \\
 & \qquad 7x^2 - 2x - 12 & \\
- & \qquad \underline{7x^2 - 14x - 56} & \\
 & \qquad\qquad 12x + 44 &
\end{array}$$

Отже, $\frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 19x - 12}{x^2 - 2x - 8} = x^2 + x + 7 + \frac{12x + 44}{x^2 - 2x - 8}$.

Приклад: Обчислити $I = \int \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 10x - 12}{x^2 - 2x - 8} dx.$

Підінтегральна функція є попереднім дробом, тому можемо записати:

$$I = \int \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 10x - 12}{x^2 - 2x - 8} dx = \int (x^2 + x + 7 + \frac{12x + 44}{x^2 - 2x - 8}) dx =$$

$$= \int (x^2 + x + 7) dx + \int \frac{12x + 44}{x^2 - 2x - 8} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 7x + \int \frac{12x + 44}{x^2 - 2x - 8} dx \ .$$

Останній інтеграл − інтеграл від правильного алгебраїчного дробу, який ще треба навчитись обчислювати. Тому до цього інтеграла повернемося дещо пізніше.

Згідно з основною теоремою алгебри будь-який многочлен степеня n може бути розкладеним на лінійні та квадратичні множники, тобто:

$$S_m(x) = (x - a)^{\alpha} \cdot (x - b)^{\beta} \cdot \ldots \cdot (x^2 + px + q) \cdot \ldots, \tag{12.4}$$

де α і β − натуральні числа, що вказують на кратність коренів a та b.

Квадратичні вирази виду $x^2 + px + q$ на множники не розкладаються (дискримінант від'ємний). Після проведеного розкладання правильний дріб буде мати вигляд:

$$\frac{W_k(x)}{S_m(x)} = \frac{W_k(x)}{(x-a)^\alpha \cdot (x-b)^\beta \cdot \ldots \cdot (x^2 + px + q) \cdot \ldots}.$$

Знаменник дробу – добуток функцій, що свідчить про те, що цей правильний дріб одержаний в результаті додавання декількох дробів, кожен з яких є правильним дробом, тобто отримаємо:

$$\frac{W_k(x)}{(x-a)^\alpha \cdot (x-b)^\beta \cdot \ldots \cdot (x^2 + px + q) + \ldots} = \frac{f_1(x)}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_2(x)}{(x-b)^\beta} + \ldots +$$

$$+ \frac{f_i(x)}{x^2 + px + q} + \ldots \text{ (наприклад, } \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{71}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{71}{105}\text{)}. \qquad (9.5)$$

Наголошуємо, що дріб правильний, тобто менший від одиниці, тому дроби, які в сумі утворюють заданий дріб як складові частини, також правильні дроби (кожен з них менший від одиниці).

Розглянемо дріб $\frac{f_1(x)}{(x-a)^\alpha}$.

Цей дріб можемо розкласти на складові частини (нагадуємо, що $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{2^3}$).

Його чисельник є многочленом степеня, що не перевершує число $(\alpha - 1)$ (дріб правильний), тому можемо його записати у вигляді:

$$f_1(x) = A_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + A_{\alpha-2} x^{\alpha-2} + \ldots + A_1 x + A_0.$$

Якщо застосувати заміну $x = (x-a) + a,$то отримаємо:

$f_1(x) = C_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1} + C_{\alpha-2}(x)^{\alpha-2} + \ldots + C_1(x-a) + C_0$, де коефіцієнти C_k складені з коефіцієнтів від A_0 до $A_{\alpha-1}$. Тоді:

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^\alpha} = \frac{C_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1} + C_{\alpha-2}(x-a)^{\alpha-2} + \ldots + C_1(x-a) + C_0}{(x-a)^\alpha} = \frac{C_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{C_{\alpha-2}}{(x-a)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{C_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{C_0}{(x-a)^\alpha}$$

Таким чином, правильний дріб виду $\frac{f_1(x)}{(x-a)^\alpha}$ розкладається на суму дробів, чисельники яких – числа. Аналогічно розкладається дріб $\frac{f_2(x)}{(x-b)^\beta}$.

Розглянемо правильний дріб $\frac{f_i(x)}{x^2 + px + q}$, чисельник якого – многочлен виду $Ax + B$ (степінь чисельника обов'язково менший степеня знаменника не менше, ніж на одиницю).

Враховуючи, що інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від кожної з них, розкладання правильного дробу на складові приводить до знаходження наступних інтегралів:

$$1)\ \int\frac{kdx}{x-a};\qquad 2)\int\frac{k\cdot dx}{(x-a)^n};\qquad 3)\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx.$$

Відомо, що

$$\int\frac{k\cdot dx}{x-a}=k\int\frac{dx}{x-a}=\begin{vmatrix}x-a=t\\dx=dt\end{vmatrix}=k\int\frac{dt}{t}=k\cdot\ln t+C=k\cdot\ln(x-a)+C\ .$$

Також відомо $\int\frac{k\cdot dx}{(x-a)^n}=k\int\frac{dx}{(x-a)^n}=k\int(x-a)^{-n}dx=\begin{vmatrix}x-a=t\\dx-dt\end{vmatrix}=k\int t^{-n}dt=$

$$=k\cdot\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+C=k\cdot\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C=\frac{k}{-n+1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C.$$

Розглянемо $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx.$ Відомо, що $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C.$

Тоді: $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\begin{vmatrix}f(x)=t\\f'(x)dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln\ f(x)+C.$

З наведеного інтегралу робимо висновок: якщо підінтегральна функція є дробом, чисельник якого – похідна від знаменника, то такий інтеграл завжди буде дорівнювати натуральному логарифму знаменника.

Тому, якщо $Ax+B=(x^2+px+q)'$, то:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{(x^2+px+q)'}{x^2+px+q}dx=\ln(x^2+px+q)+C\ .$$

Будь-яка зміна числа A може призвести до появи деякого множника перед інтегралом, але якщо $A=0$, то $(x^2+px+q)\neq A$.

Отже: $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\ln(x^2+px+q)+C$, якщо $Ax+B=(x^2+px+q)'$.

Розглянемо $\int\frac{B}{x^2+px+q}dx=B\int\frac{dx}{x^2+px+q}$.

Згадуємо, що підінтегральний квадратичний вираз на множники не розкладається. В таких випадках необхідно у квадратичному виразі виділити повний квадрат. Розглянемо на прикладі.

<u>Приклад:</u> Обчислити інтеграл, виділивши повний квадрат у знаменнику:

а) $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$;   б) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

Розв'язання:

а) $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$.

$x^2+4x+8=x^2+2\cdot2\cdot x+2^2-2^2+8=(x+2)^2+4=(x+2)^2+2^2$. Тоді:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+2^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{x+2}{2} + C.$$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

$2-6x-9x^2 = -(9x^2+6x-2) = -((3x)^2+2\cdot 3x+1-1-2) = -(3x+1)^2+3 =$
$= \sqrt{3}^2 - (3x+1)^2$. Тоді:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{3}^2-(3x+1)^2}} = \frac{1}{3} arcsin \frac{3x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Розглянемо загальний приклад: $\int \frac{2x^4-2x^3+4x^2-x+2}{x(x-1)^2(x^2+2x+2)} dx.$

Підінтегральна функція − правильний алгебраїчний дріб, у якому чисельник є многочленом четвертого степеня, а знаменник − п’ятого степеня. Тому розкладемо дріб на суму більш простих дробів:

$$\frac{2x^4-2x^3+4x^2-x+2}{x(x-1)^2(x^2+2x+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+2}.$$

У цьому виразі невідомі коефіцієнти такі, що рівняння задовольняється при будь-яких значеннях x. Тому цей вираз є тотожністю.

Але $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+2} =$ (*)

$$= \frac{A(x-1)^2(x^2+2x+2) + Bx(x-1)(x^2+2x+2) + Cx(x^2+2x+2) + x(Dx+E)(x-1)^2}{x(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

Знаменники й чисельники тотожностей рівні. Тому:

$$2x^4-2x^3+4x^2-x+2 \equiv A(x-1)^2(x^2+2x+2) + Bx(x-1)(x^2+2x+2) +$$
$$+ Cx(x^2+2x+2) + (Dx+E)x(x-1)^2 \Rightarrow A(x^2-2x+1)\cdot(x^2+2x+2) +$$
$$+ B(x^2-x)(x^2+2x+2) + C(x^3+2x^2+2x) + (Dx^2+Ex)(x^2-2x+1) \equiv$$
$$\equiv x^4(A+B+D) + x^3(B+C-2D+E) + x^2(D-A+2C-2E) +$$
$$+ x(-2A-2B+2C+E) + 2A \equiv 2x^4-2x^3+4x^2-x+2.$$

З тотожності випливає, що при невідомих з однаковими степенями знаходяться однакові коефіцієнти. Порівняння коефіцієнтів дає можливість записати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A+B+D=2 \\ B+C-2D+E=-2 \\ A-2C-D+2E=-4 \\ 2A+2B-2C-E=1 \\ 2A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B+D=1 \\ B+C-2D+E=-2 \\ 2C+D-2E=5 \\ 2B-2C-E=-1 \end{cases}.$$

Розв’яжемо систему за правилом Крамера:

$$A=1; B=\frac{\Delta_B}{\Delta}=\frac{0}{25}=0; C=\frac{\Delta_C}{\Delta}=1; D=\frac{\Delta_D}{\Delta}=1; E=\frac{\Delta_E}{\Delta}=-1.$$

Підставляючи отримані значення коефіцієнтів у рівняння (*), одержимо:

$$\frac{2x^4-2x^3+4x^2-x+2}{x(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{1}{x}+\frac{0}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x-1}{x^2+2x+2}.$$

Тоді:

$$\int\frac{2x^4-2x^3+4x^2-x+2}{x(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx=\int(\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x-1}{x^2+2x+2})dx=$$

$$=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{x-1}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\int\frac{(x-1)dx}{x^2+2x+2}.$$

Обчислимо останній інтеграл окремо. Похідна від знаменника дорівнює $2x+2=2(x+1)$, тому чисельник запишемо у вигляді: $x-1=(x+1)-2$. Одержимо:

$$\int\frac{x-1}{x^2+2x+2}dx=\int\frac{(x+1)-2}{x^2+2x+2}dx=\int\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx-\int\frac{2dx}{x^2+2x+2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}dx-2\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-2\int\frac{dx}{1+(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-2arctg(x+1)+C.$$

Остаточно маємо:

$$\int\frac{2x^4-2x^3+4x^2-x+2}{x(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx=\ln x-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-2arctg\ (x+1)+C.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти невизначені інтеграли:

6.61. $\int\frac{dx}{x^2-7x+10}$;

6.72. $\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

6.63. $\int\frac{dx}{9x^2+6x+4}$;

6.74. $\int\frac{4x-1}{4x^2-4x+5}dx$;

6.65. $\int\frac{x-2}{x^2-7x+12}dx$;

6.76. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;

6.67. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$;

6.78. $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

6.69. $\int\frac{5x-7}{(x+1)(x-2)}dx$;

6.70. $\int\frac{21-x}{(x-5)(x+3)}dx$;

6.71. $\int\frac{17x+13}{(2x+1)(3x+2)}dx$;

6.72. $\int\frac{x+3}{(2x-1)(3x+2)}dx$

6.73. $\int\frac{3x-4}{x^2-x}dx$;

6.74. $\int\frac{x-9}{x^2+6x+5}dx$;

6.75. $\int \frac{-14x-18}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$; **6.76.** $\int \frac{x^2+5x+8}{(x+4)(x+3)}dx$;

6.77. $\int \frac{2x^2-4x+1}{x(5x-1)}dx$; **6.78.** $\int \frac{2x^2+x-4}{x(x+2)}dx$.

Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x^2+nx+2n}$; б) $\int \frac{nx+5}{(x+n)(nx-2)}dx$;

де n – номер студента за списком.

§4. Інтегрування деяких тригонометричних виразів

Інтеграли виду $\int \sin kx \cos lxdx$, $\int \sin kx \sin lxdx$, $\int \cos kx \cos lxdx$:

Інтеграли виду $\int \sin kx \cos lxdx$, $\int \sin kx \sin lxdx$, $\int \cos kx \cos lxdx$, де l та k дійсні числа, $l \neq k$, знаходяться за допомогою формул:

$$\sin kx \cdot \cos lxdx = \frac{1}{2}(\sin(k-l)x + \sin(k+l)x),$$

$$\sin kx \cdot \sin lxdx = \frac{1}{2}(\cos(k-l)x - \cos(k+l)x), \tag{9.6}$$

$$\cos kx \cdot \cos lxdx = \frac{1}{2}(\cos(k-l)x + \cos(k+l)x)$$

Приклад: Знайти невизначений інтеграл $\int \sin 3x \cos 7xdx$.

$$\int sin3xcos7xdx = \frac{1}{2}\int (sin(3-7)x + sin(3+7)x)dx = \frac{1}{2}\int (sin(-4)x + sin10x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int sin4xdx + \int sin10xdx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}cos4x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}cos10x + C = \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 10x}{10} +$$

$+C$.

Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$:

Розглянемо інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Даний запис означає, що над синусом і косинусом проводяться тільки раціональні операції: додавання та віднімання, множення на сталі величини, піднесення до цілого степеня, ділення. Іншими словами, під символом $\int R(\sin x \cos x)dx$ розуміють інтеграл від раціональної функції синуса та косинуса.

Такі інтеграли приводяться до інтегралів від інтегральної функції нового аргументу t підстановкою, яку називають універсальною: $t = tg\frac{x}{2}$, тоді

$$sinx = \frac{2t}{1+t^2},\ cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{9.7}$$

<u>Приклад:</u> Знайти невизначений інтеграл: $\int \frac{dx}{2sinx - cosx}$

Використаємо універсальну тригонометричну підстановку $t = tg\frac{x}{2}$. Тоді:

$$\int \frac{dx}{2sinx - cosx} = \int \frac{\frac{2dx}{1+t}}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dx}{1+t}}{\frac{4t-1+t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+4t-1} = 2\int \frac{dt}{(t+2)^2-5} =$$

$$= 2\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + C.$$

Інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$:

Нехай хоча б один з показників степеня є непарне число. Нехай $n = 2k+1$. В такому випадку підінтегральний вираз можна перетворити так:
$\sin^m x \cos^n x dx = \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \sin^m x \cos^{2k} x dx = \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^k \cos x dx$

Застосовуємо підстановку $\sin x = u$, $\cos x dx = du$. Тоді питання зводиться до інтегрування суми степеневих функцій.

<u>Приклад:</u> Знайти невизначений інтеграл:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \sin x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x dx =$$

$$= \int \cos x d(\cos x) - \int \cos^4 x d(\cos x) = \frac{\cos^2 x}{2} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Якщо ж обидва показника степеня парні числа, то користуються тригонометричними формулами пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right);\ \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right) \tag{9.8}$$

<u>Приклад:</u> Знайти невизначений інтеграл:

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4\cdot 2}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Інтеграли виду $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$:

При розв'язуванні інтегралів виду $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$ необхідно застосовувати підстановку:

$$z = tgx,\ sin^2 x = \frac{z^2}{1+z^2},\ cos^2 x = \frac{1}{1+z^2};\ dx = \frac{dz}{1+z^2} \tag{9.9}$$

<u>Приклад:</u> Знайти невизначений інтеграл: $\int \frac{dx}{4+5sin^2 x - 3cosx}$

Використаємо підстановку $z = tgx$. Тоді:

$$\int \frac{dx}{4+5sin^2x-3cos^2x} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{4+5\frac{z^2}{1+z^2}-3\frac{1}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{4+4z^2-3+5z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{9z^2+1} =$$

$$= \frac{1}{3} arctr 3z + C = \frac{1}{3} arctg(3tgx) + C .$$

Інтеграли виду $\int R(tgx, ctgx)dx$:

Даний інтеграл розв'язується за допомогою підстановки:

$$z = tgx,\ \frac{1}{z} = ctgx,\ dx = \frac{dz}{1+z^2} \qquad (9.10)$$

і зводиться до інтегралу від дробово-раціональної функції.

Приклад: Знайти невизначений інтеграл $\int tg^2 x$.

$$\int tg^2 x = \int z^2 \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{1+z^2-1}{1+z^2} dz = \int dz - \int \frac{dz}{1+z^2} = z - arctgz + C = tgx - x + C .$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти невизначені інтеграли:

9.79. $\int sin2xsin\frac{2x}{3}dx$; **9.80.** $\int sin6xcos2xdx$;

9.81. $\int cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{3}dx$; **9.82.** $\int sin3xsin5xdx$;

9.83. $\int sin5xsin2xdx$; **9.84.** $\int cos5xcos2xdx$;

9.85. $\int sin2xcos5xdx$; **9.86.** $\int cosxcos3xdx$;

9.87. $\int \frac{dx}{sinx}$; **9.88.** $\int \frac{dx}{5+4sinx}$;

9.89. $\int \frac{dx}{2+3cosx}$; **9.90.** $\int \frac{dx}{3sinx+2cosx+1}$;

9.91. $\int \frac{dx}{1+cosx}$; **9.92.** $\int \frac{dx}{2+sinx}$;

9.93. $\int sin^2 2xdx$; **9.94.** $\int cos^2 4xdx$;

9.95. $\int cos^4 xdx$; **9.96.** $\int sin^3 2xdx$;

9.97. $\int cos^5 xdx$; **9.98.** $\int \frac{cos^3 x}{sin^4 x}dx$;

6.99. $\int \frac{sin^3 x}{cos^2 x}dx$; **9.100.** $\int sin^4 xcos^3 xdx$;

6.101. $\int sin^3 xcos^3 xdx$; **9.102.** $\int sin^5 xcos^4 xdx$.

Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int sin(n+1)xsin(n+3)xdx$; б) $\int sin^n xcos^{n+1} xdx$;

де *n* – номер студента за списком.

Запитання до розділу IX

1. Що таке первісна?
2. Що таке невизначений інтеграл?
3. Властивості невизначеного інтеграла
4. Що таке підінтегральна функція?
5. До яких функцій застосовують метод безпосереднього інтегрування?
6. Які функції інтегрують методом заміни змінних?
7. Що таке формула інтегрування „частинами”?
8. В яких випадках використовують формулу інтегрування „по частинах”?
9. Як виділити цілу частину з неправильного дробу?
10. Як розкласти правильний дріб на доданки?
11. Що таке ”повний квадрат” і як він виділяється з квадратичного виразу?
12. Як інтегрується добуток функцій синуса та косинуса?
13. Як інтегруються функції тангенса та котангенса?
14. Що таке інтеграл, який зводиться сам до себе?
15. Що таке ”універсальна заміна” при інтегруванні тригонометричних функцій?