

**МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ УКРАЇНИ  
БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**АГРОНОМІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

*Кафедра механізації та електрифікації сільськогосподарського  
виробництва*

# **НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ**

**Навчально-методичний посібник  
для самостійної роботи та лабораторно-практичних занять  
за кредитно-модульною системою навчання студентів агрономічного  
факультету**

**Напрямок 6.090103 – Лісове і садово-паркове господарство  
за спеціальністю «Садово-паркове господарство»  
Освітньо-кваліфікаційний рівень 6.130400 – бакалавр**

Біла Церква

2011

**УДК:** 514.18(075)

Затверджено радою агрономічного факультету  
(Протокол № 1 від 2.09. 2010 р.)  
та методичною комісією БНАУ (Протокол № 1  
від 16. 09. 2010 р.)

Укладачі: **Сенчук М.М.**, канд. техн. наук, **Рубець А.М.**, канд. техн. наук

Нарисна геометрія: Навчально-методичний посібник для самостійної роботи та лабораторно-практичних занять за кредитно-модульною системою навчання студентів агрономічного факультету за напрямом 06.09.103 «Лісове і садово-паркове господарство»/М.М. Сенчук, А.М. Рубець – Біла Церква, 2011. – 124с.

Навчально-методичний посібник призначений для виконання лабораторно-практичних занять і самостійного навчання та оцінки рівня знань з дисципліни: „Нарисна геометрія”

Рецензенти: **Черняк В.М.**, зав. кафедри садово-паркового господарства та лісівництва, д-р с.-г. наук, професор; **Олійник І.А.**, д-р техн. наук, професор.

@ БНАУ, 2011

## ЗМІСТ

|                                                                                                                          |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Вступ .....</b>                                                                                                       | <b>4</b>  |
| <b>Модуль 1. Основи нарисної геометрії.....</b>                                                                          | <b>5</b>  |
| Лабораторно-практична робота № 1. Проекції основних геометричних образів.                                                | 6         |
| Лабораторно-практична робота № 2. Позиційні та метричні властивості<br>проекцій пар геометричних образів.....            | 15        |
| Лабораторно-практична робота № 3. Багатогранники.....                                                                    | 27        |
| Лабораторно-практична робота № 4. Перетин кривих поверхонь з лінією,<br>площиною, між собою і та з багатогранниками..... | 40.       |
| Лабораторно-практична робота № 5. Аксонометрія.....                                                                      | 56        |
| <b>Модуль 2. Основні правила виконання креслень.....</b>                                                                 | <b>66</b> |
| Лабораторно-практична робота № 6. Креслярські інструменти і приладдя.<br>Вимоги стандартів до оформлення креслень.....   | 66        |
| Лабораторно-практична робота № 7. Геометричні побудови.....                                                              | 87        |
| Лабораторно-практична робота № 8. Проекційне креслення .....                                                             | 100       |
| Лабораторно-практична робота № 9. Технічний малюнок.....                                                                 | 114       |
| Рівні оцінювання знань.....                                                                                              | 123       |
| Основні правила з охорони праці .....                                                                                    | 123       |

## ВСТУП

До лабораторного заняття студент повинен готуватися, що полягає у повторенні матеріалу лекції і розв'язуванні самостійної роботи, яка розміщена в кінці попереднього заняття (перед наступною лабораторною роботою). Поточний контроль знань здійснюється опитуванням. На лабораторні заняття обов'язково приносити домашні графічні роботи із нарисної геометрії, незалежно від їх готовності, для перевірки викладачем. Відразу ж після того як графічна робота буде доопрацьована, викладач підписує і робить відповідний запис у журналі реєстрації зданих робіт і ставить відмітку на графіку задачі.

Відмітка має наступні значення: "достроково", "в строк", "після строку". З метою успішного освоєння дисципліни "Нарисна геометрія" домашні графічні завдання потрібно здавати в терміни, вказані на графіку.

Після здачі двох графічних робіт згідно графіком проводиться рубіжний контроль (двогодинна контрольна робота), а в кінці семестру – підсумковий контроль (залік).

***Не забувайте приносити на заняття креслярське приладдя і робочий зошит! Графічні завдання обов'язково приносити і показувати викладачеві на кожне заняття незалежно від їх готовності, аж поки вони не будуть підписані викладачем!***

***Технічне забезпечення виконання робіт.***

До початку занять придбайте необхідне креслярське приладдя: готувальню середніх розмірів, лінійку, косинці із кутами  $45^\circ$  та  $30^\circ$  і  $60^\circ$ , олівці "Конструктор" марки М, 2М, ТМ, Т (іноземного виробництва відповідно В, 2В, НВ, Н), кнопки, гумки. Слід мати на увазі, що механічні олівці із товщиною стержня 0,5 мм придатні для проведення тонких ліній; для наведення креслень обов'язково потрібно користуватися олівцями, які підстручуються.

### **Вимоги до оформлення графічних робіт:**

- кожна робота повинна бути виконана охайно і підписана викладачем;
- графічні побудови виконувати тільки за допомогою креслярських інструментів;
- лінії повинні бути яскраво-чорними;
- підписи виконують шрифтом креслярським згідно з ГОСТом 2.304-68 висотою 3,5 мм, 5 мм та 7 мм;
- точки позначати великими буквами латинського і українського алфавіту  $A, B, C...$  із відповідними індексами ( $A_1, A_2, B_1...$ );
- прямі позначати малими буквами латинського і українського алфавіту  $a, b, c...$  із відповідними індексами ( $a_1, a_2, b_1...$ );
- зображення точок на кресленнях показувати колами діаметром 1-2 мм і позначати великими буквами латинського алфавіту  $A, B, C...$  або цифрами 1,2,3 ...із відповідними індексами;
- прямі і криві лінії позначати малими буквами латинського алфавіту із  $b, c, m...$  із відповідними індексами; аналогічно площини – малими буквами грецького алфавіту  $\alpha, \beta, \delta, \gamma...$ ; поверхні – великими буквами грецького алфавіту  $\Omega, \Sigma, \Theta, ...$ ;

В записях алгоритму використовувати знаки – символи:  $\parallel$  – паралельність;  $\perp$  – перпендикулярність;  $\bullet/$  – мимобіжність;  $\cap$  – перетин;  $\in$  – належність;  $\equiv$  – тотожність;  $=$  – результат.

### **Рекомендована література**

Михайленко В.Є. Нарисна геометрія. – К.: Вища школа, 1995.

Михайленко В.Є. та ін. Інженерна графіка. – К.: Каравела, 2004.



# Модуль 1 ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

**У результаті вивчення першого модуля ви повинні знати:**

1. У чому полягає предмет і метод нарисної геометрії.
2. Як у прямокутних проекціях зображуються геометричні фігури, що розташовані у різних чвертях простору.
3. Які положення може займати пряма лінія, та як визначається натуральна величина відрізка прямої.
4. Які положення може займати площина в тривимірному просторі.
5. Дві групи задач нарисної геометрії – позиційні та метричні.
6. Правильні багатогранники – тіла Платона.
7. Перетин багатогранників із прямою та площиною.
8. Взаємний перетин багатогранників.
9. Перетин кривих поверхонь з лінією, площиною, між собою та з багатогранниками. Розгортки поверхонь.
10. Головні поняття та визначення в аксонометрії.
11. Основні аксонометричні системи.

**На основі набутих знань ви повинні вміти:**

1. Зображати основні геометричні фігури – точки, прямі, площини в прямокутних проекціях.
2. Визначати натуральну величину відрізка прямої та кути нахилу його до площин  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ .
3. Розв'язувати першу основну позиційну задачу на перетин прямої з площиною.
4. Розв'язувати позиційні задачі на взаємну належність та перетин геометричних фігур.
5. Знаходити точки перетину багатогранників із прямою, лінії перетину їх з площиною, а також будувати лінії взаємного перетину багатогранників.
6. Знаходити точки зустрічі прямих з кривими поверхнями, лінії їх перетину з площинами та лінії взаємного перетину поверхонь.
7. Знаходити лінії перетину кривих поверхонь із багатогранниками.
8. Будувати геометричні фігури в ізометрії, прямокутній диметрії та косокутній фронтальній диметрії.
9. Розв'язувати в аксонометрії позиційні задачі.

## ПРЕДМЕТ І МЕТОД НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Нарисна геометрія, яка є одним із розділів математики, вивчає методи зображення тривимірного простору на площині, а також способи графічного розв'язання задач за рисунком.

Предметом нарисної геометрії є різноманітність геометричних образів та співвідношень між ними. Розрізняють три види геометричних образів: лінійні (точка, пряма, площина), нелінійні (крива лінія, крива поверхня) та складені (багатогранники, одновиірні та двовиірні обводи).

Основним елементом або образом тривимірного простору прийнято вважати точку. Довільну множину точок називають геометричною фігурою. Основними геометричними фігурами, крім точки, є ще пряма та площина.

Розрізняють два співвідношення між фігурами: позиційні та метричні. **Позиційна властивість** визначає розміщення геометричних фігур на площині та в просторі на основі взаємної належності одних фігур до інших. Належність може бути повною (пряма лежить у площині), частковою (пряма перетинається з площиною в точці) або її може не бути взагалі (дві мимобіжні прямі).

**Метричні властивості** пов'язані з визначенням метричних характеристик (розмірів) відстаней, кутів та площ. Залежно від характеру властивостей розрізняють позиційні та метричні задачі.

## Тема: Проекції основних геометричних образів

**Мета роботи** – систематизація і закріплення знань щодо отримання навиків:  
– зображати основні геометричні фігури – точки, прямі, площини в прямокутних проекціях.

### Завдання для виконання роботи

1. Вивчити основні способи проєкціювання.
2. Зобразити основні геометричні фігури – точки, прямі, площини в прямокутних проекціях.

### Порядок опрацювання завдань

**Місце проведення занять:** кафедра механізації (ауд. 140а).

**Місце та час отримання консультації:** кафедра механізації (згідно з графіком).

**Обладнання та матеріали:** готовальня середніх розмірів, лінійка, косинці із кутами  $45^\circ$  та  $30^\circ$  і  $60^\circ$ , олівці "Конструктор" марки М, 2М, ТМ, Т (іноземного виробництва відповідно В, 2В, НВ, Н), кнопки, гумки.

**Форми підсумкового контролю:** захист практичних робіт.

### 1.1. Основні методи проєкціювання

Основою нарисної геометрії є **метод проєкціювання**, який дає змогу отримувати зображення просторових фігур на площині, що має три складові: об'єкт, площина проєкцій та центр проєкціювання.

На рис. 1.1. показані точки  $A, B, C$ , площина проєкцій  $\Pi$  та центр проєкціювання  $S$ . Якщо точки з'єднати прямими з центром  $S$ , то в перетині з площиною  $\Pi$  одержимо проєкції цих точок на площині  $\Pi$ . Пряма, що проходить через центр проєкціювання і паралельна площині проєкцій, перетинається з нею також у невласній точці. Центр  $S$  може бути власним, в цьому разі проєкціювання має назву центрального, або невласним (нескінченно віддаленим), при якому проєкціювання є паралельним. Паралельні прямі перетинаються у нескінченно віддаленій (невласній) точці. Паралельне, в свою чергу, має два різновиди: косокутне та прямокутне. У першому випадку кут між напрямом проєкціювання та площиною проєкцій є непряим (рис. 1.1б), а в другому – прямим (рис. 1.1а).

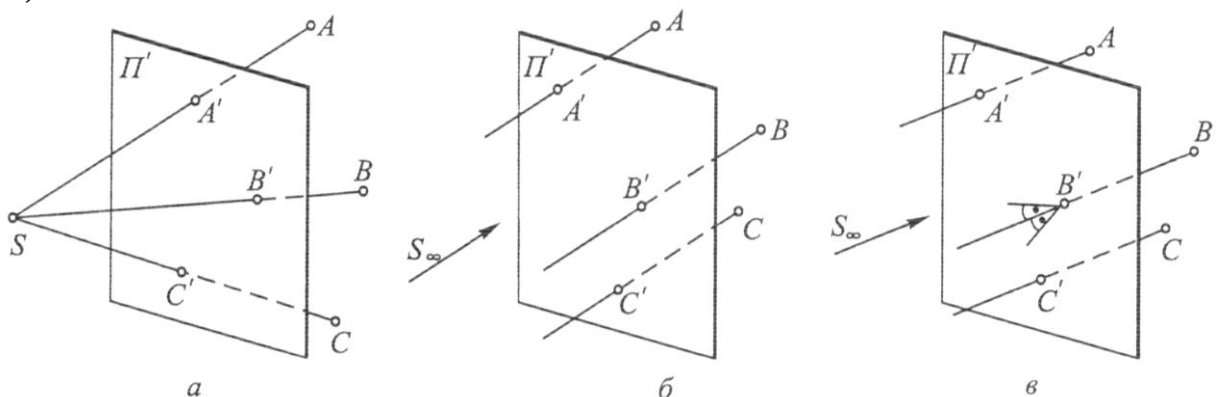


Рис. 1.1. Проекціювання точки  $A, B, C$  на площину  $\Pi$ .

Як видно з рис. 1.1, положення точки в тривимірному просторі не можна визначити за допомогою однієї проєкції, бо ця проєкція є проєкцією будь-якої точки, що належить проєкціюючому променю. Для визначення положення точки в просторі треба мати щонайменше її дві проєкції. За методом Монжа ці дві площини розташовуються перпендику-

лярно одна одній, одна з них  $\Pi_1$  розташовується горизонтально і має назву **горизонтальної площини проєкцій**, а друга  $\Pi_2$  – фронтально і має назву **фронтальної площини проєкцій**. Вони перетинаються по прямій – осі проєкцій  $x_{12}$ . Геометричні образи проєкціюються на ці площини проєкцій променями, перпендикулярними до них. На рис. 1.2 показано проєкціювання точки  $A$  на площини  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$  прямими з центрів  $S_\infty$  та  $T_\infty$ , розташованих у напрямках, перпендикулярних до  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ . Для того щоб одержати зображення точки на одній площині, можна вдаватися до двох прийомів:

- 1) сумістити площину  $\Pi_1$  з площиною  $\Pi_2$  обертанням навколо осі проєкцій  $x_{12}$ ;
- 2) спроекціювати з центру  $S_\infty$  точку  $A$  на бісекторну площину  $K$ , яка ділить двограний кут між площинами  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$  навпіл, і потім перепроекціювати її у напрямі, перпендикулярному до  $\Pi_2$ , на цю площину проєкцій.

Залежно від положення площин проєкцій та центрів проєкціювання можна одержати різні проєкційно-зображувальні системи. Найбільш поширеною системою в техніці є **система прямокутних проєкцій, або метод Монжа**. За цим методом площини  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$  взаємно перпендикулярні, а центри проєкціювання віддалені в нескінченність у напрямі, перпендикулярному до площин проєкцій. Сукупність кількох зв'язаних між собою проєкцій фігури (мінімум двох) називають системою прямокутних (ортогональних) проєкцій, або комплексним рисунком Монжа. Площини проєкцій  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$  при своєму продовженні ділять тривимірний простір на **чотири чверті, або квадранти**. На рис. 1.2в римськими цифрами показано послідовність чвертей.

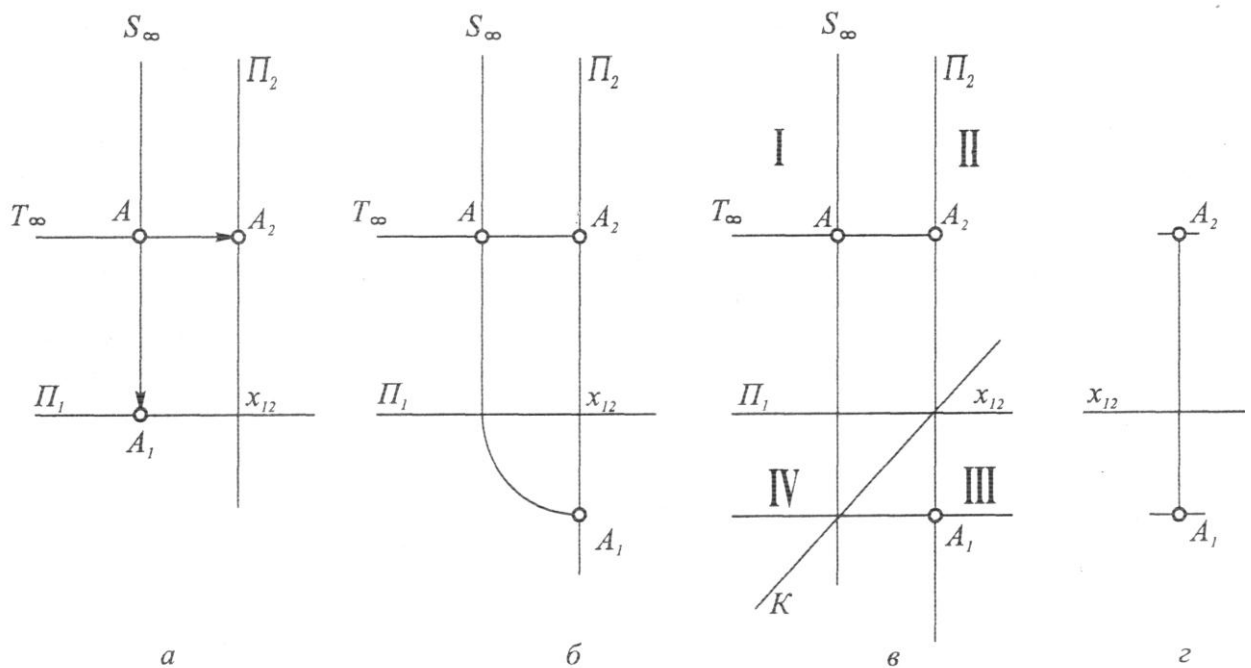


Рис. 1.2. Проекціювання точки  $A$  на площини проєкцій  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ .

### 1.2. Проекції точки

На рис. 1.3а,б показано спосіб проєкціювання точки  $A$  на горизонтальну площину  $\Pi_1$  та фронтальну  $\Pi_2$ . На рис. 1.3в,г показано спосіб проєкціювання точки  $A$  на профільну площину  $\Pi_3$ .

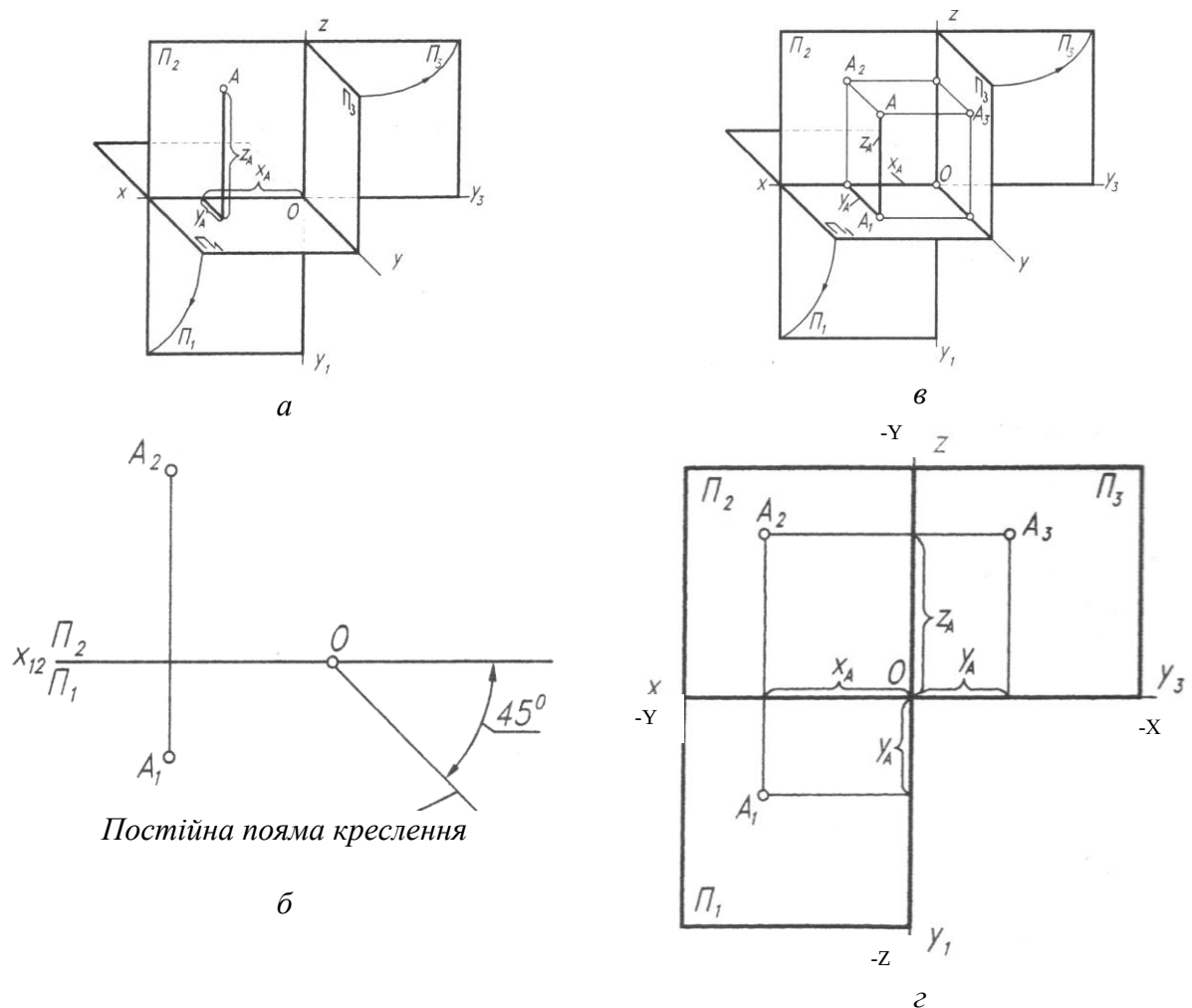


Рис. 1.3. Проекція точки  $A$  на площини  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , та профільну площину  $\Pi_3$ .

### 1.3. Проекції прямої

Як відомо, пряма визначається двома точками. Пряма, довільно розташована відносно до площин проекцій, називається **прямою загального положення**, її проекції довільно розташовуються на комплексному рисунку. Точки перетину прямої з площинами проекцій називаються її слідами: перетин з  $\Pi_1$  має назву **горизонтального сліду**, а перетин з  $\Pi_2$  - **фронтального**.

На рис. 1.4 показано побудову слідів прямої загального положення. Щоб отримати горизонтальний слід, фронтальна проекція продовжується до осі, з отриманої точки проводиться вертикальна лінія відповідності до перетину з продовженою горизонтальною проекцією. Для одержання фронтального сліду горизонтальна проекція продовжується до осі і т. д. Якщо продовжити до взаємного перетину проекції прямої, отримаємо так званий слід відповідності  $K_1$ ,  $K_2$ , тобто перетин прямої з бісекторною площиною  $K$ . Як уже зазначалося, проекції геометричних образів, що лежать у площині  $K$ , збігаються.

Крім загального положення, пряма в просторі може займати окремі положення (рис. 1.5). Пряма  $AB$ , паралельна площині  $\Pi_1$  називається **горизонтальною**, на  $\Pi_1$  зображується в натуральну величину відрізок прямої та кут  $\beta$  її нахилу до площини  $\Pi_2$ . Пряма  $CD$ , паралельна площині  $\Pi_2$ , називається **фронтальною**, її відрізок і кут нахилу  $\alpha$  до площини  $\Pi_1$  зображаються без спотворення на площині  $\Pi_2$ . Пряма  $EO$ , паралельна профільній площині проекцій  $\Pi_3$ , має назву **профільної**, там же визначаються її натуральна величина, горизонтальний і фронтальний сліди та кути нахилу до  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ . Прямі, пара-

лельні площинам проєкцій, називають ще **прямими рівня**. Крім прямих, паралельних  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  та  $\Pi_3$ , існують прямі, перпендикулярні до них. Пряма  $IK$ , перпендикулярна до  $\Pi_1$  називається **горизонтально-проєкціуючою** або вертикальною; пряма  $IM$ , перпендикулярна до  $\Pi_2$ , – **фронтально-проєкціуючою** або глибинною; пряма  $NP$ , перпендикулярна до  $\Pi_3$ , – **профільно-проєкціуючою** або поздовжньою.

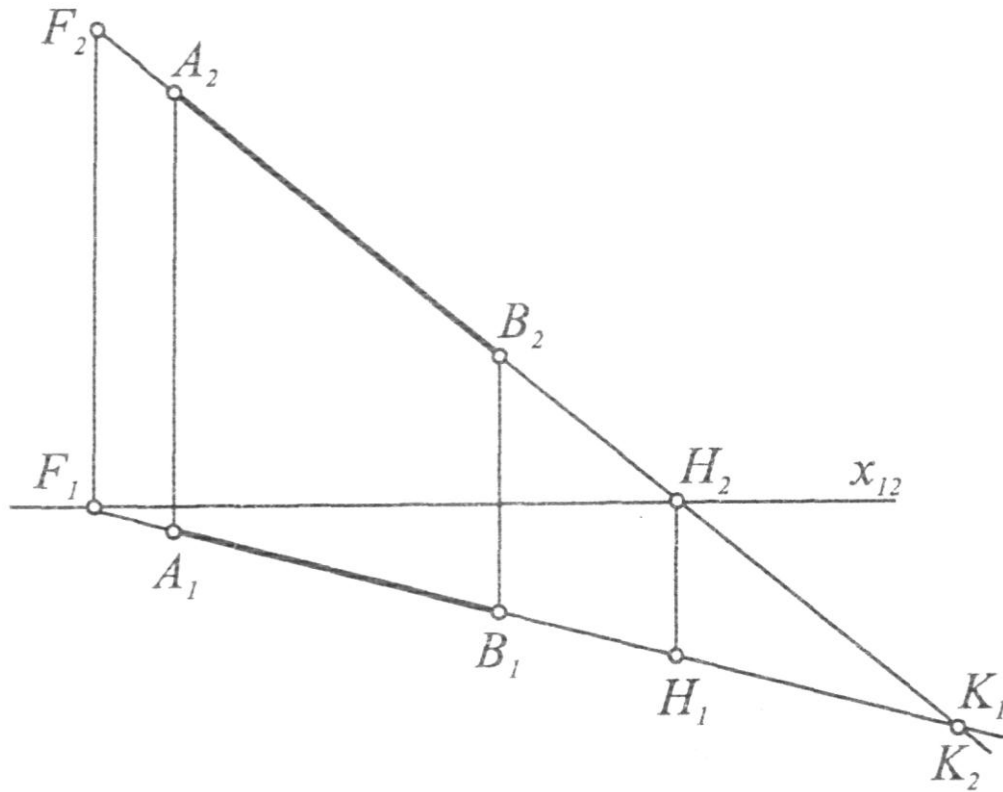


Рис. 1.4. Побудова слідів прямої  $AB$  загального положення

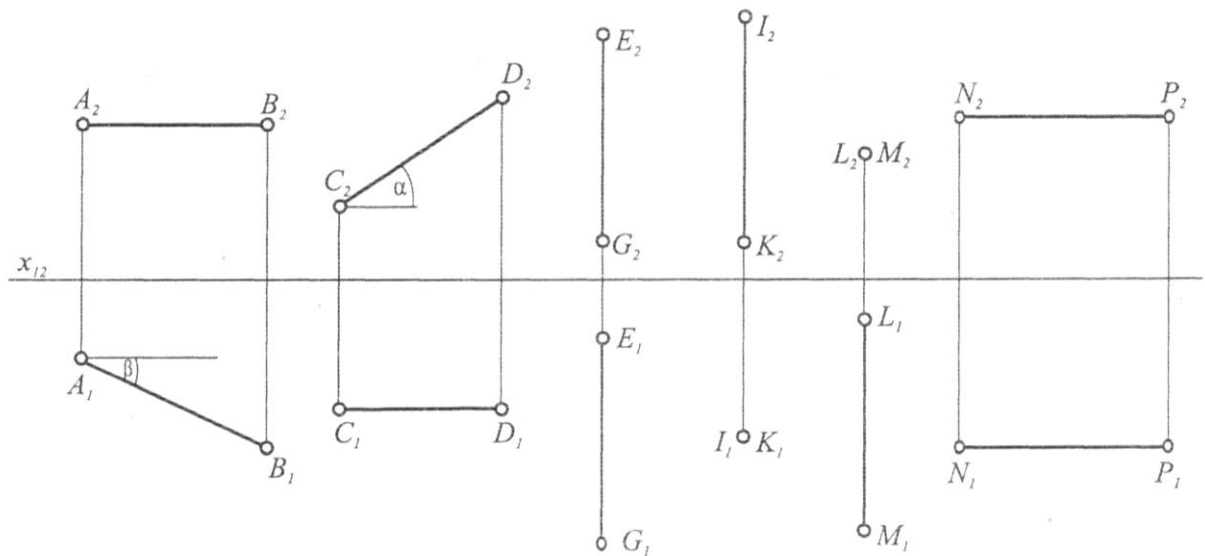


Рис. 1.5. Проекції прямих окремого положення

На рис. 1.6 показаний відрізок  $AB$  прямої в системі площин проєкцій  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ . Як видно з рис. 1.6 а, **натуральна величина відрізка прямої** – це гіпотенуза прямокутного

три-кутника, одним катетом якого є одна з проекцій, а другим катетом – різниця відстаней кінців відрізка на другій проекції до відповідної площини проекцій (рис. 1.6б).

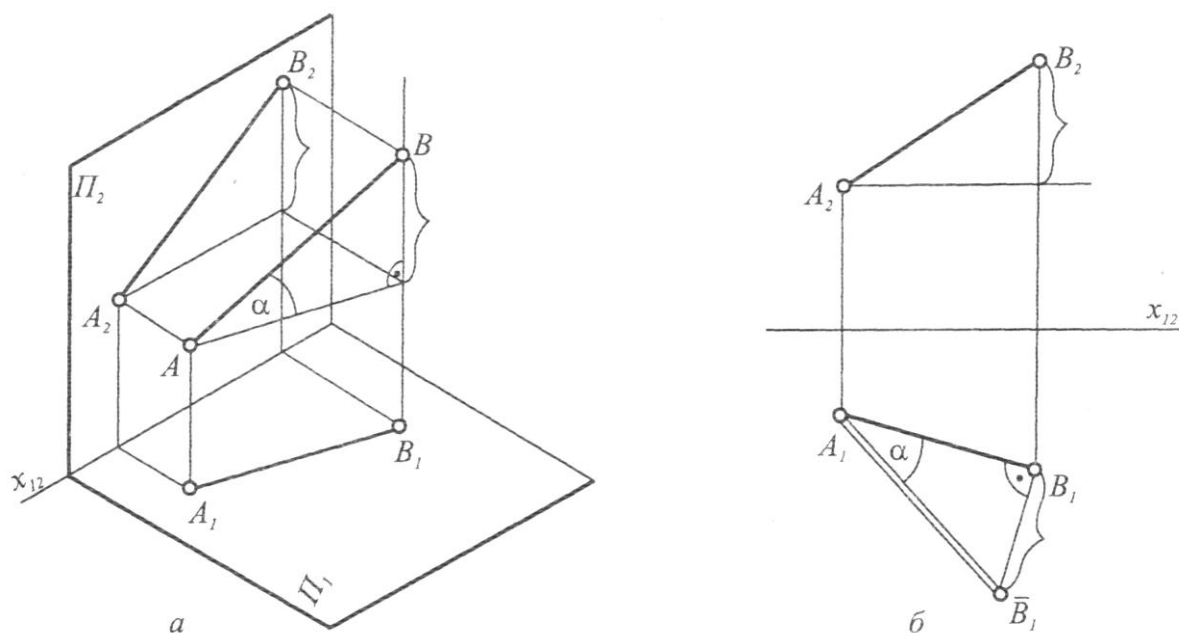


Рис. 1.6. Спосіб визначення натуральної величини відрізка  $AB$ .

Цей спосіб визначення натуральної величини відрізка прямої називається **способом прямокутного трикутника**. З цього ж прямокутного трикутника визначається і кут нахилу прямої до відповідної площини проекцій.

До сьогодні комплексний рисунок Монжа виконувався за наявності осі  $x_{12}$ , яка розділяла поля проекцій  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ . Але наявність цієї осі не завжди необхідна, від неї не залежить вигляд проекцій. В технічному кресленні найбільш **поширений** так званий **без-осьовий рисунок**, коли ця вісь відсутня. В подальшому будуть використовуватися рисунки як з **віссю**, так і без неї.

#### 1.4. Проекції площини

Площина визначається трьома точками, що не лежать на одній прямій. Крім цього, вона може визначатися прямою і точкою, двома прямими, що перетинаються, і трикутним відрізком (рис. 1.7). Часто площину задають слідами, тобто лініями перетину її з площинами проекцій. Перетин площини з  $\Pi_1$  називається **горизонтальним слідом**, а з  $\Pi_2$  – **фронтальним** (рис. 1.8). Площина, довільно розташована до площин проекцій, називається **площиною загального положення**.

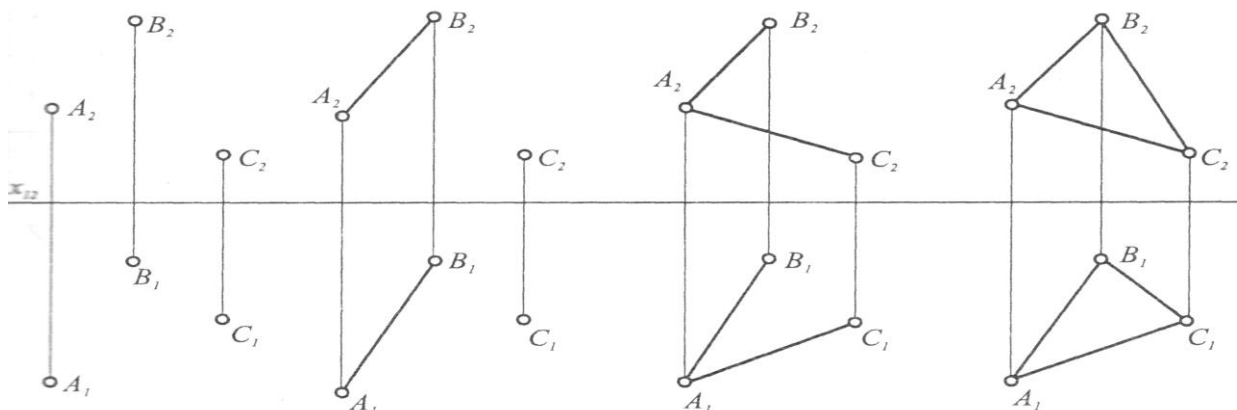


Рис.1.7. Способи зображення площини.

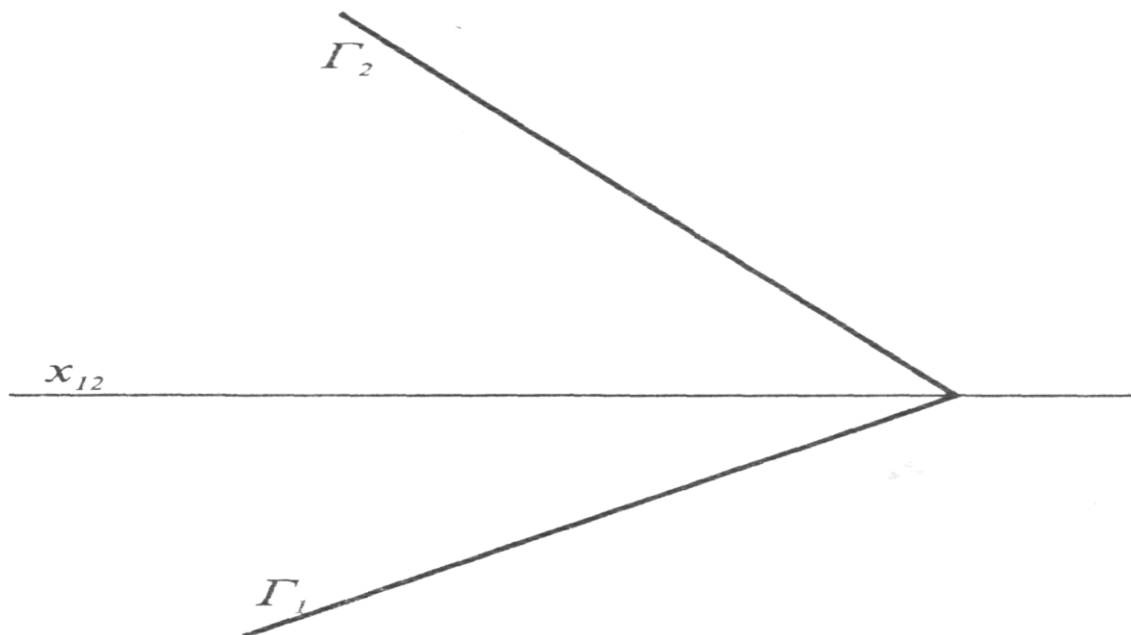


Рис. 1.8 Задання площини слідами.

На рис. 1.9 площину задано трикутним відсіком  $ABC$ . Щоб задати в цій площині будь-яку пряму, одну проекцію задають довільно, продовжують її до перетину зі сторонами відсіку, точки перетину визначають на другій проекції, через ці точки пройде друга проекція прямої. Щоб задати в площині точку, необхідно через неї провести будь-яку пряму, знайти другу проекцію прямої і за вертикальною відповідністю знайти на цій проекції другу проекцію точки. На рис. 1.9 точка  $D$  в площині знайдена за допомогою прямої  $l$ .

При розв'язанні багатьох задач нарисної геометрії широко використовують **головні лінії площини** – **горизонталь**, **фронталь** і **лінію найбільшого ухилу**. На рис. 1.10 задано трикутний відсік  $ABC$ , в якому проведено всі три головні лінії. Горизонталь  $h$  – це пряма, що належить площині і паралельна горизонтальній площині проекцій  $\Pi_1$ . Фронталь – це пряма, що належить площині і паралельна фронтальній площині проекцій  $\Pi_2$ . Горизонталь та фронталь називають ще **лініями рівня**. **Лінія найбільшого ухилу**  $BD$  по відносно до площини  $\Pi_1$  перпендикулярна до горизонталі.

Так само, як і пряма, площина може займати окремі положення стосовно площин проекцій, а саме – бути паралельною площинам  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  та перпендикулярною до них. На рис. 1.11 показано шість таких положень площин, заданих трикутним відсіком. Площина  $\Gamma$ , паралельна  $\Pi_1$  називається **горизонтальною**, площина  $\Lambda$ , паралельна  $\Pi_2$  – **фронтальною**, а площина  $ABC$ , паралельна  $\Pi_3$  – **профільною**. При цьому відсіки зображуються на паралельних їм площинах в натуральну величину. Відсіки площин  $\Phi$ ,  $\Theta$  та  $\Omega$ , перпендикулярні до  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ , зображуються на цих площинах проекцій виродженими проекціями, тобто прямими.

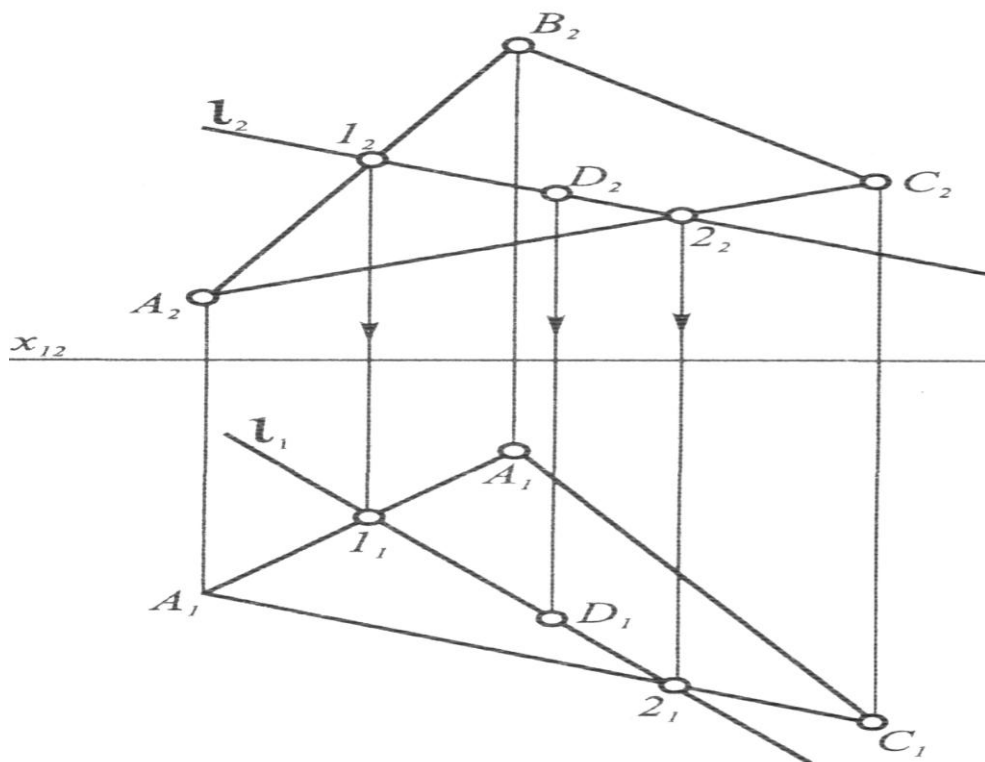


Рис. 1.9. Метод визначення точки на площині.

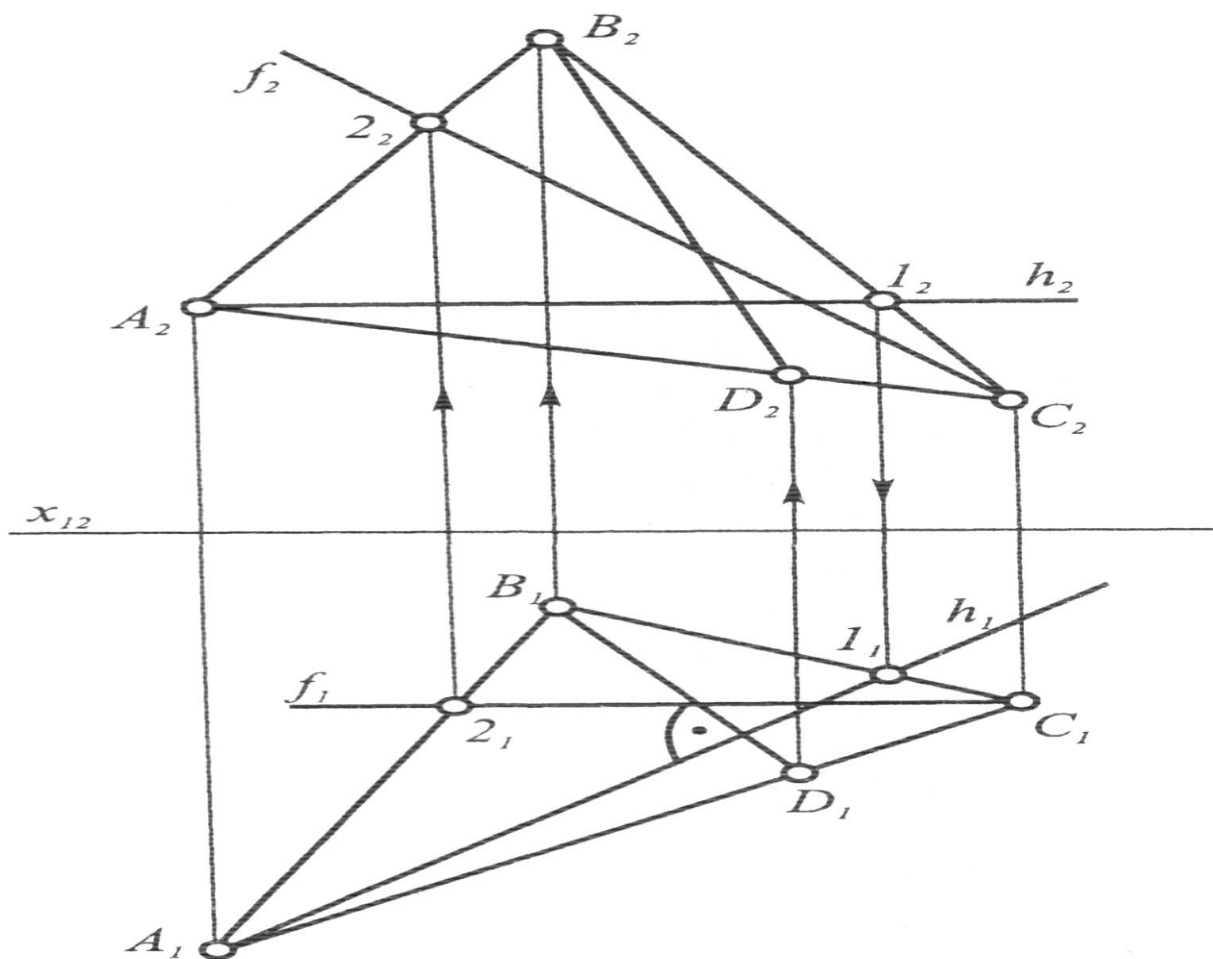


Рис. 1.10. Задання головних ліній площини (горизонталь, фронталь і лінію найбільшого ухилу) заданої трикутним відсіком  $ABC$



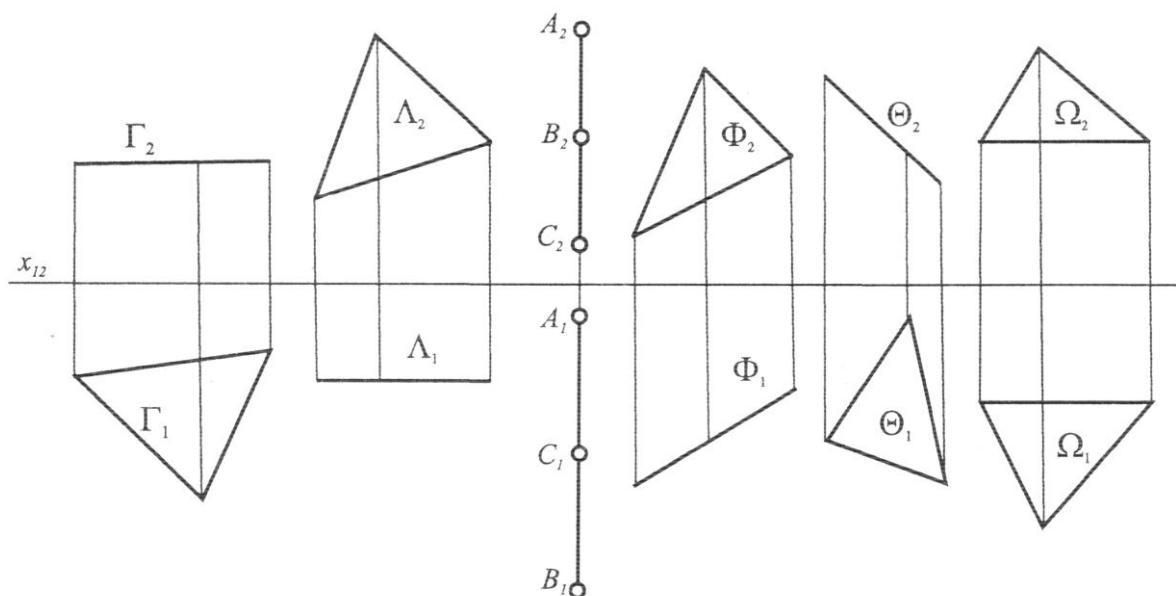


Рис. 1.11. Основні положення площин заданих трикутним відсіком стосовно площин проєкції  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ .

#### Запитання для самоперевірки

1. Які види проєціювання використовуються в нарисній геометрії? Які складові цього процесу?
2. Що таке чверті простору, або квадранти?
3. Скільки проєкцій визначають положення геометричної фігури в просторі?
4. Що таке позиційні властивості геометричних фігур?
5. Наведіть приклади метричних властивостей геометричних фігур.
6. Що таке найпростіший геометричний образ?
7. Як визначити натуральну величину відрізка прямої?
8. Як задати точку в площині?
9. Як зображаються точки, що належать бісекторній площині K?

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ №1

1. Побудувати проекції точки  $A$  за заданими координатами (табл. 1.1).
2. Побудувати проекції відрізка  $AB$  за заданими координатами (табл. 1.1).
3. Побудувати проекції площини  $ABC$  за заданими координатами (табл. 1.1).
4. Знайти натуральну величину відрізка  $AB$  заданими координатами (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Значення параметрів

| Варіант | № завдання |            |            |            |            |            |         |         |
|---------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------|---------|
|         | 1          | 2          |            | 3          |            |            | 4       |         |
|         | A          | A          | B          | A          | B          | C          | A       | B       |
| 1       | (3,2,4)    | (3,0,4)    | (0,2,5)    | (4,2,-4)   | (6,3,-4)   | (3,7,4)    | (3,2,5) | (1,2,4) |
| 2       | (3,-2,4)   | (2,2,2)    | (3,0,4)    | (1,2,4)    | (3,2,4)    | (2,2,4)    | (6,3,4) | (0,2,5) |
| 3       | (5,2,4)    | (-1,2,-4)  | (2,2,2)    | (0,2,5)    | (3,-2,4)   | (3,3,3)    | (3,2,4) | (3,0,4) |
| 4       | (-3,-2,5)  | (3,2,4)    | (3,-2,4)   | (3,0,4)    | (5,2,4)    | (6,2,4)    | (4,2,4) | (2,2,2) |
| 5       | (6,3,-4)   | (3,-2,4)   | (5,2,4)    | (2,2,2)    | (-3,-2,5)  | (3,3,3)    | (3,6,4) | (1,2,4) |
| 6       | (-3,-2,-4) | (5,2,4)    | (3,2,4)    | (-1,2,-4)  | (4,2,-4)   | (4,-4,4)   | (3,6,4) | (3,7,4) |
| 7       | (4,2,4)    | (-3,-2,5)  | (3,-2,4)   | (3,7,4)    | (1,2,4)    | (3,-4,4)   | (4,2,4) | (2,2,4) |
| 8       | (3,6,4)    | (6,3,-4)   | (5,2,4)    | (2,2,4)    | (0,2,5)    | (-2,2,-4)  | (1,2,4) | (3,3,3) |
| 9       | (3,-6,4)   | (-3,-2,-4) | (-3,-2,5)  | (3,3,3)    | (3,0,4)    | (-3,-3,-4) | (0,2,5) | (6,2,4) |
| 10      | (4,2,-4)   | (4,2,4)    | (6,3,-4)   | (6,2,4)    | (2,2,2)    | (6,3,-4)   | (3,0,4) | (3,3,3) |
| 11      | (1,2,4)    | (3,6,4)    | (-3,-2,-4) | (3,0,4)    | (-1,2,-4)  | (-3,-2,-4) | (2,2,2) | (4,4,4) |
| 12      | (0,2,5)    | (3,-6,4)   | (4,2,4)    | (2,2,2)    | (3,7,4)    | (4,2,4)    | (1,2,4) | (3,4,4) |
| 13      | (3,0,4)    | (4,2,-4)   | (3,6,4)    | (-1,2,-4)  | (2,2,4)    | (4,2,-4)   | (3,7,4) | (2,2,4) |
| 14      | (2,2,2)    | (1,2,4)    | (3,-6,4)   | (3,7,4)    | (3,3,3)    | (1,2,4)    | (2,2,4) | (3,3,4) |
| 15      | (-1,2,-4)  | (0,2,5)    | (4,2,-4)   | (2,2,4)    | (6,2,4)    | (0,2,5)    | (3,3,3) | (5,2,4) |
| 16      | (3,7,4)    | (3,0,4)    | (1,2,4)    | (5,2,4)    | (3,0,4)    | (3,0,4)    | (6,2,4) | (4,2,4) |
| 17      | (2,2,4)    | (2,2,2)    | (0,2,5)    | (-3,-2,5)  | (2,2,2)    | (2,2,2)    | (3,3,3) | (3,6,4) |
| 18      | (3,3,3)    | (-1,2,-4)  | (3,0,4)    | (6,3,-4)   | (-1,2,-4)  | (-1,2,-4)  | (4,4,4) | (3,6,4) |
| 19      | (6,2,4)    | (3,7,4)    | (2,2,2)    | (-3,-2,-4) | (3,7,4)    | (3,7,4)    | (3,4,4) | (2,2,2) |
| 20      | (3,3,3)    | (2,2,4)    | (-1,2,-4)  | (4,2,4)    | (2,2,4)    | (2,2,4)    | (2,2,4) | (1,2,4) |
| 21      | (4,-4,4)   | (3,3,3)    | (3,7,4)    | (3,6,4)    | (4,-4,4)   | (3,3,3)    | (3,3,4) | (3,7,4) |
| 22      | (3,-4,4)   | (6,2,4)    | (2,2,4)    | (3,-6,4)   | (3,-4,4)   | (6,2,4)    | (5,2,4) | (2,2,4) |
| 23      | (-2,2,-4)  | (3,3,3)    | (3,3,3)    | (4,2,-4)   | (-2,2,-4)  | (3,-4,4)   | (4,2,4) | (3,3,3) |
| 24      | (-3,-3,-4) | (2,2,4)    | (6,2,4)    | (2,2,4)    | (-3,-3,-4) | (-2,2,-4)  | (3,6,4) | (6,2,4) |
| 25      | (-5,2,4)   | (3,3,3)    | (3,3,3)    | (3,3,3)    | (-5,2,4)   | (-3,-3,-4) | (3,6,4) | (3,0,4) |

## Тема: Позиційні та метричні властивості проєкцій пар геометричних образів

**Мета роботи** – систематизація і закріплення знань щодо розв'язування позиційних задач на перетин прямої з площиною, на взаємну належність та перетин геометричних фігур.

### Завдання для виконання роботи

1. Розв'язувати першу основну позиційну задачу на перетин прямої з площиною.
2. Розв'язувати позиційні задачі на взаємну належність та перетин геометричних фігур.

### Порядок опрацювання завдань

**Місце проведення занять:** кафедра механізації (ауд.140а).

**Місце та час отримання консультацій:** кафедра механізації (згідно з графіком).

**Обладнання та матеріали:** готувальня середніх розмірів, лінійка, косинці із кутами  $45^\circ$  та  $30^\circ$  і  $60^\circ$ , олівці "Конструктор" марки М, 2М, ТМ, Т (іноземного виробництва відповідно В, 2В, НВ, Н), кнопки, гумки.

**Форми підсумкового контролю:** захист практичних робіт.

### 2.1. Дві основні групи задач нарисної геометрії

Задачі нарисної геометрії діляться на дві групи: **позиційні** та **метричні**. До позиційних належать задачі на:

- взаємне розташування геометричних образів;
- взаємну належність геометричних образів;
- перетин геометричних образів, а саме: двох прямих, прямої з площиною, двох площин тощо.

До метричних задач належать задачі на визначення між геометричними образами відстаней, кутів, а також площ плоских фігур. При всій різноманітності метричних задач в їх основі лежать дві задачі:

- 1) визначення відстані між двома точками;
- 2) побудова перпендикуляра до площини.

### 2.2. Взаємне положення та відстань між двома геометричними образами

Розглянемо попарно геометричні образи для з'ясування їх позиційних та деяких метричних властивостей.

**Точка і пряма.** Точка може належати прямій або не належати їй. У першому випадку обидві її проєкції повинні належати відповідним проєкціям прямої (рис. 2.1а). На рис. 2.1б тільки фронтальна проєкція точки належить фронтальній проєкції прямої  $n$ , тому точка В не належить прямій  $n$ .

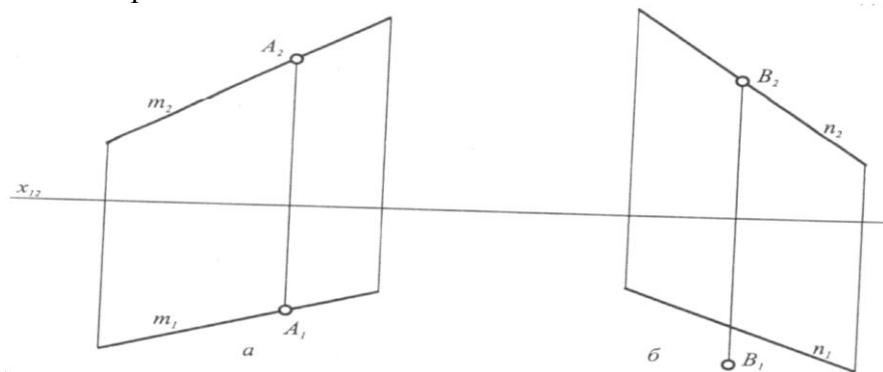


Рис. 2.1. Визначення належності точки прямій.

Відстань від точки до прямої окремого положення проєкціюється в натуральну величину, якщо пряма і точка лежать в одній площині, паралельній  $\Pi_1$  чи  $\Pi_2$ , або якщо пряма проєкціююча. Відстань від точки до прямої загального положення проєкціюється в натуральну величину, якщо пряма є лінією найбільшого ухилу площини, заданої цією точкою та прямою (рис. 2.2).

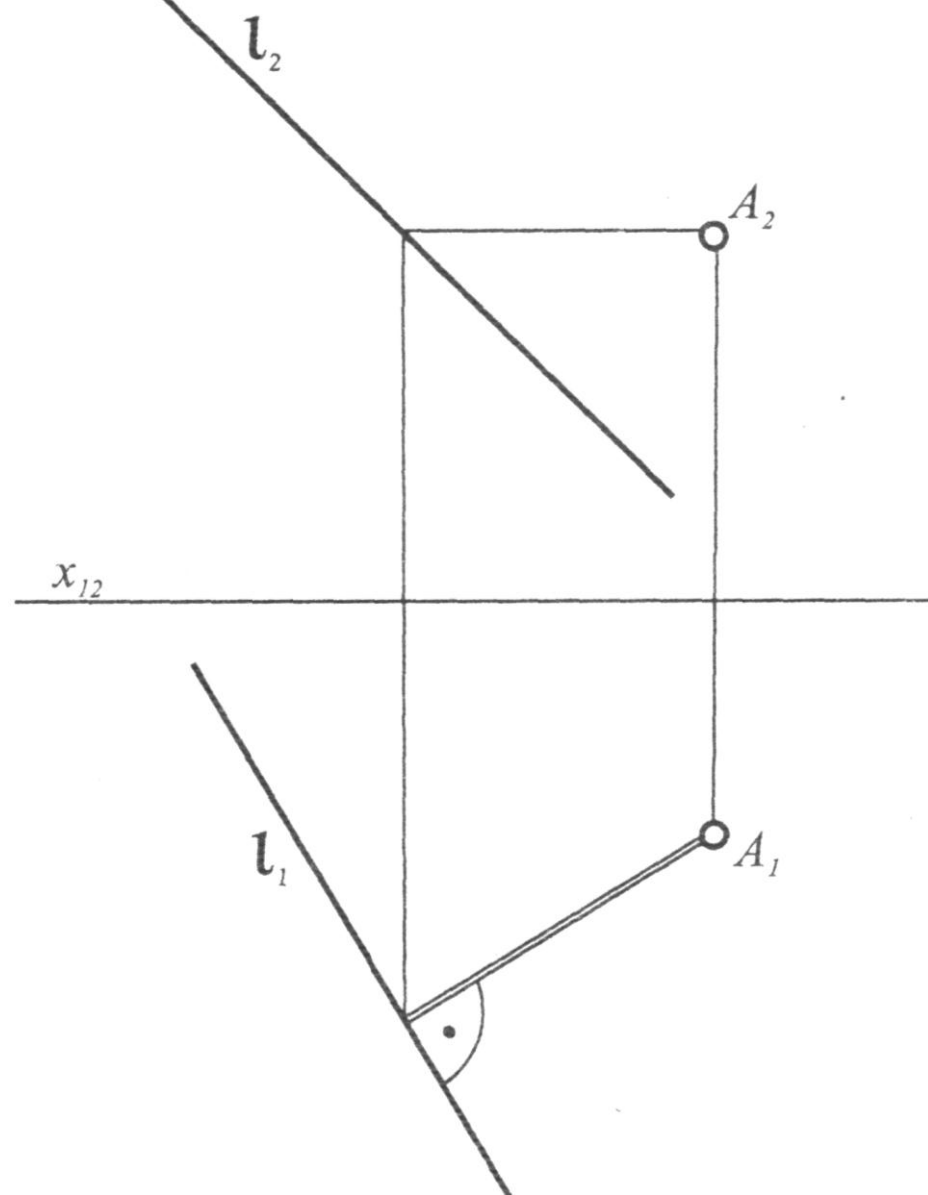


Рис. 2.2. Спосіб визначення відстані від точки до прямої.

**Дві прямі.** Існують три взаємні положення двох прямих: прямі перетинаються, прямі паралельні або мимобіжні. В першому випадку точки перетину відповідних проєкцій прямих лежать на одній вертикальній лінії зв'язку (рис. 2.3а). Якщо прямі паралельні, то паралельні і їх однойменні проєкції (рис. 2.3б). Прямі мимобіжні, якщо точки перетину їх однойменних проєкцій не лежать на одній вертикальній лінії зв'язку. Точки 1, 2 та 3, 4 називаються **конкуруючими**: 1, 2 лежать на спільній глибинній прямій, а 3, 4 – на спільній вертикальній (рис. 2.3в). Через дві мимобіжні прямі можна провести єдину пару паралельних площин, що мають назву **площин паралелізму**.

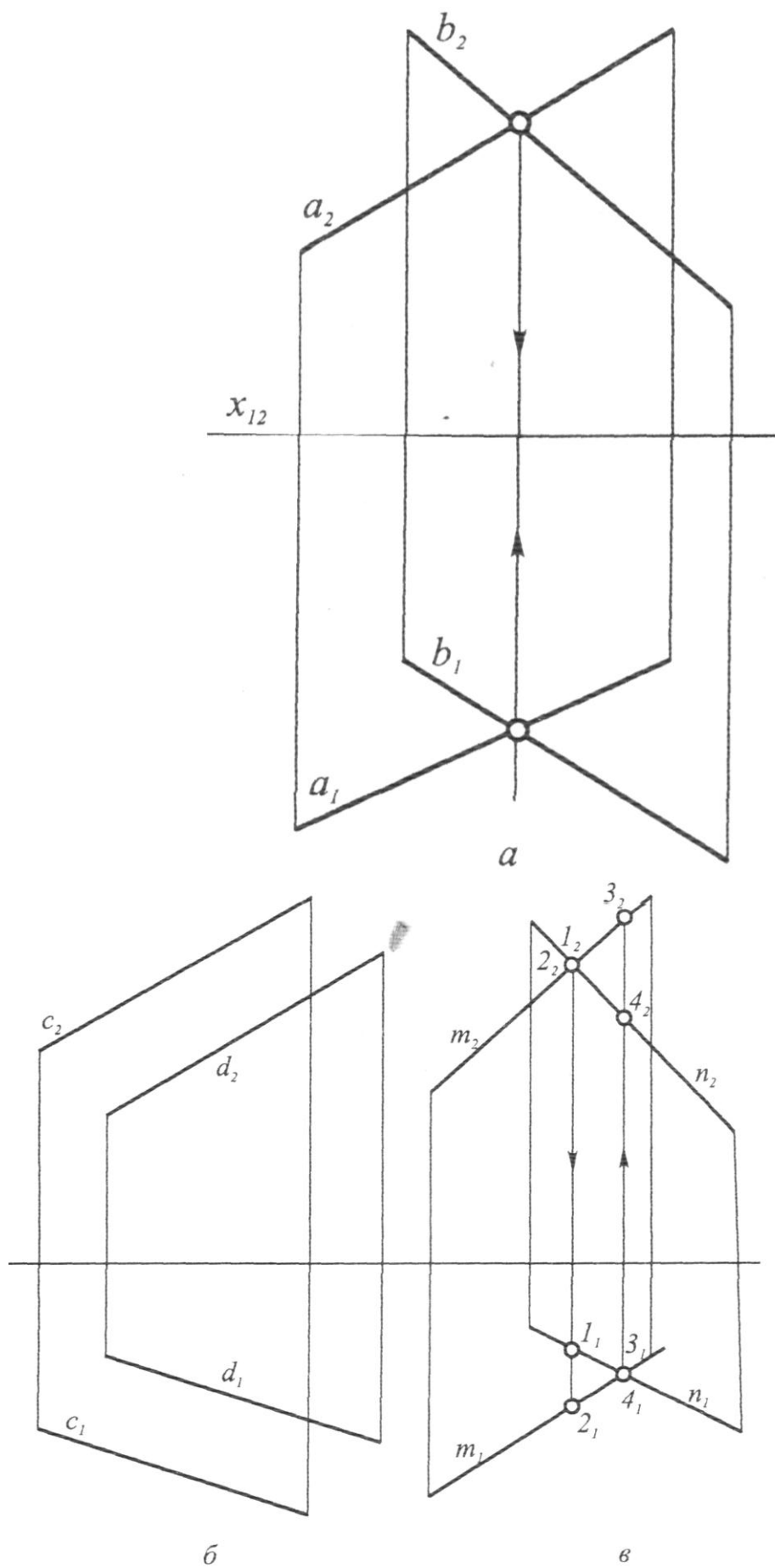


Рис. 2.3. Взаємні положення двох прямих

Відстань між паралельними прямими окремого положення проєкціюється в натуральну величину, коли прямі належать одній площині, паралельній  $\Pi_1$ , чи  $\Pi_2$ , або коли вони горизонтально чи фронтально проєкціюючі. Відстань між паралельними прямими загального положення проєкціюється в натуральну величину, якщо прямі є лініями найбільшого ухилу площини (рис. 2.4). Відстань між двома мимобіжними прямими проєкціюється в натуральну величину, якщо їхні площини паралелізму проєкціюючі, зокрема, якщо одна з прямих проєкціююча.

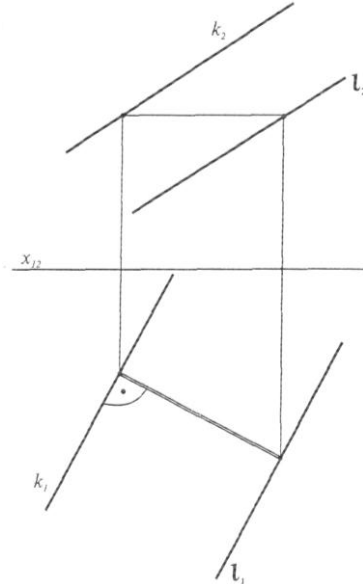


Рис. 2.4. Визначення відстані між площинами.

**Пряма та площина.** Пряма може лежати в площині, перетинатися з нею або бути паралельною площині. Пряма лежить у площині, якщо дві її точки належать площині (рис. 2.5а).

Перетин прямої з площиною вважається *першою основною позиційною задачею* нарисної геометрії, бо до неї можна звести більшість позиційних задач з геометричними фігурами.

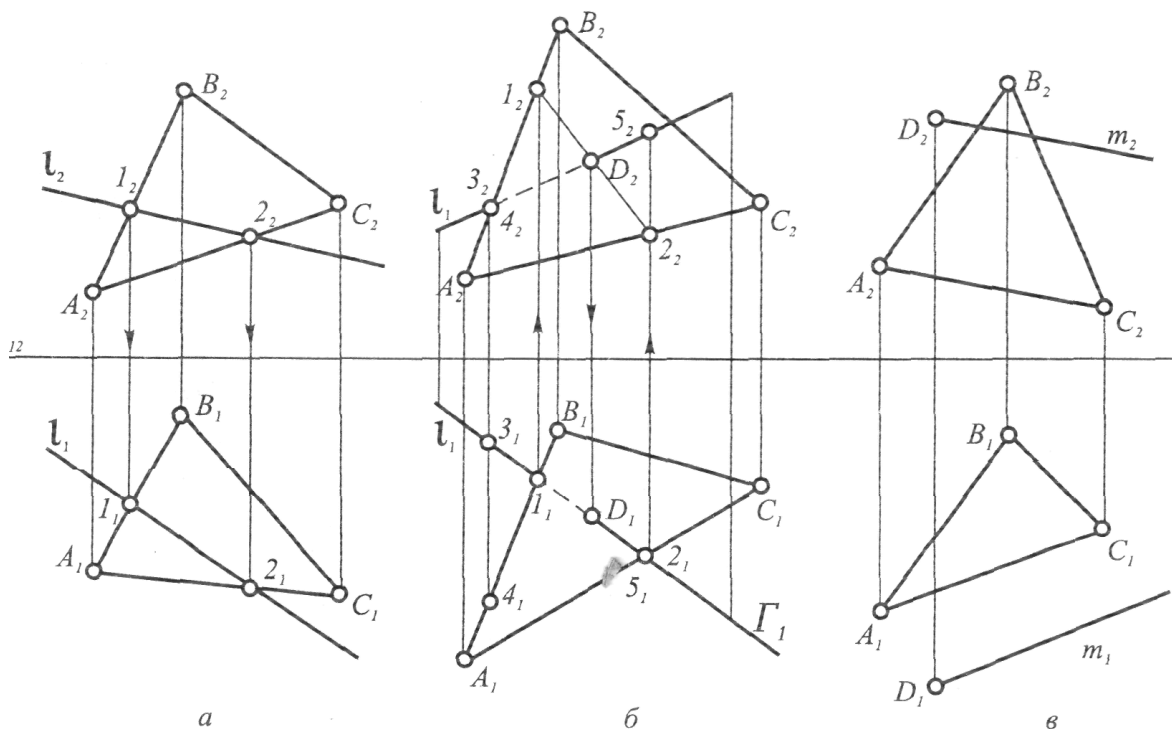


Рис. 2.5. Взаємне розміщення прямої і площини.

Алгоритм визначення точки перетину прямої з площиною складається з трьох операцій:

- 1) через пряму проводять проекціюючу площину;
- 2) знаходять лінію перетину заданої площини з проекціюючою;
- 3) визначають точку перетину двох прямих – заданої та лінії перетину. На рис. 2.5б

показана побудова точки перетину прямої  $l$  з площиною трикутника  $ABC$ . Через горизонтальну проекцію прямої проведено горизонтально-проекціюючу площину  $\Gamma$ , яка перетне площину трикутника по прямій 1-2. За вертикальною відповідністю знаходимо фронтальну проекцію лінії перетину двох площин –  $1_1, 2_2$ . Перетин цієї лінії з фронтальною проекцією прямої  $l$  визначить шукану точку  $D$ . Якщо вважати, що трикутник непрозорий, то треба визначити видимість відрізків прямої  $l$ . Це робиться за допомогою **конкуруючих точок** (див. рис. 2.3в). На  $\Pi_2$  зафіксуємо дві конкуруючі точки  $3_2, 4_2$ , на мимобіжних прямих  $AB$  та  $l$ . З горизонтальної проекції видно, що точка 4 ближче до глядача, ніж точка 3, значить на  $\Pi_2$  пряма  $A_2B_2$  перекриває пряму  $l$ , звідси відрізок  $3_2 D_2$  – невидимий. На полі  $\Pi_1$  дві мимобіжні прямі –  $AC$  та  $l$ , конкуруючі точки на них 2 та 5, з поля  $\Pi_2$  видно, що точка 5 вище точки 2, тобто пряма  $l$  на  $\Pi_1$  перекриває пряму  $AC$  і відрізок  $5_1 D_1$ , – видимий, а значить, відрізок  $D, 1$ , – невидимий. На рис. 2.5в показано пряму  $m$ , що проходить через точку  $D$  і паралельна трикутнику. При цьому відрізок прямої повинен бути паралельний якійсь прямій площини, в даному випадку він паралельний стороні трикутника  $AC$ .

Відстань від прямої до паралельної їй площини зображається в натуральну величину, якщо площина перпендикулярна  $\Pi_1$ , чи  $\Pi_2$ .

Кут між прямою і площиною зображається в натуральну величину на  $\Pi_1$  якщо площина горизонтально проекціююча, а пряма горизонтальна і на  $\Pi_2$ , якщо площина фронтально проекціююча, а пряма фронтальна.

**Точка і площина.** Точка може належати площині або не належати їй, це визначається за допомогою прямої, що лежить у площині. На рис. 2.6 на полі  $\Pi_2$  точки  $D$  та  $E$  лежать на одній прямій, що проходить через точку  $A$ . Знаходимо горизонтальну проекцію цієї прямої. Точка  $D$ , лежить на  $A_1, G_1$ , а точка  $E$  не лежить на ній. Звідси висновок, що точка  $D$  належить площині трикутника  $ABC$ , а точка  $E$  не належить їй.

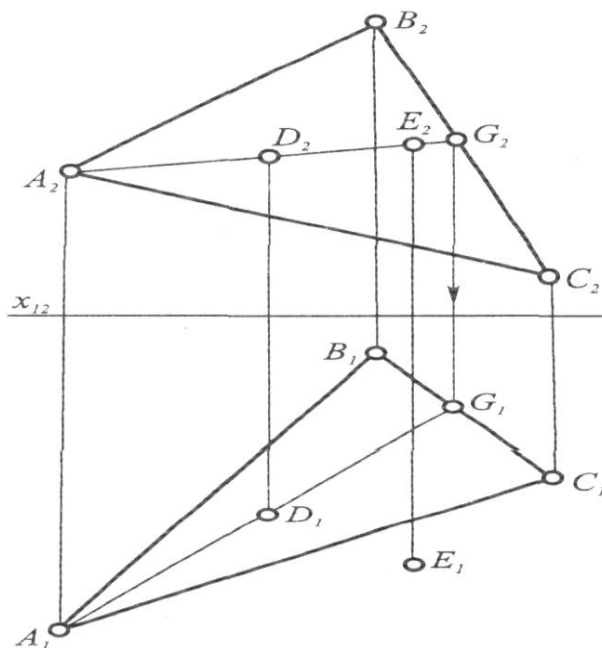


Рис. 2.6. Взаємне розміщення точки і площини.

**Дві площини.** Дві площини завжди між собою перетинаються, а коли лінія перетину є нескінченно віддаленою прямою, площини паралельні.

Для визначення лінії перетину площин – *другої основної позиційної задачі* – треба знайти дві її точки. Це можна зробити, повторивши двічі задачу на перетин прямої з площиною (рис. 2.5б). На рисунку 2.7 перетинаються дві площини, одна задана трикутником  $ABC$ , а друга – двома паралельними прямими  $m$  і  $n$ . Для визначення точки перетину прямої  $t$  з трикутником через неї проведено фронтально-проекціюючу площину  $\Lambda$ , знайдено лінію перетину 1-2, перетин якої з горизонтальною проекцією  $m$ , визначить точку  $D$ , що належить лінії перетину. Друга точка цієї лінії – точка  $E$  – знайдена так само за допомогою фронтально-проекціюючої площини  $\Gamma$ .

Відстань між двома паралельними площинами зображається в натуральну величину на  $\Pi_1$ , якщо площини горизонтально проекціючі та на  $\Pi_2$ , якщо вони фронтально проекціючі.

Кут між двома площинами (двогранний кут) зображається без спотворення на  $\Pi_1$ , коли площини горизонтально проекціючі, та на  $\Pi_2$ , якщо вони фронтально проекціючі.

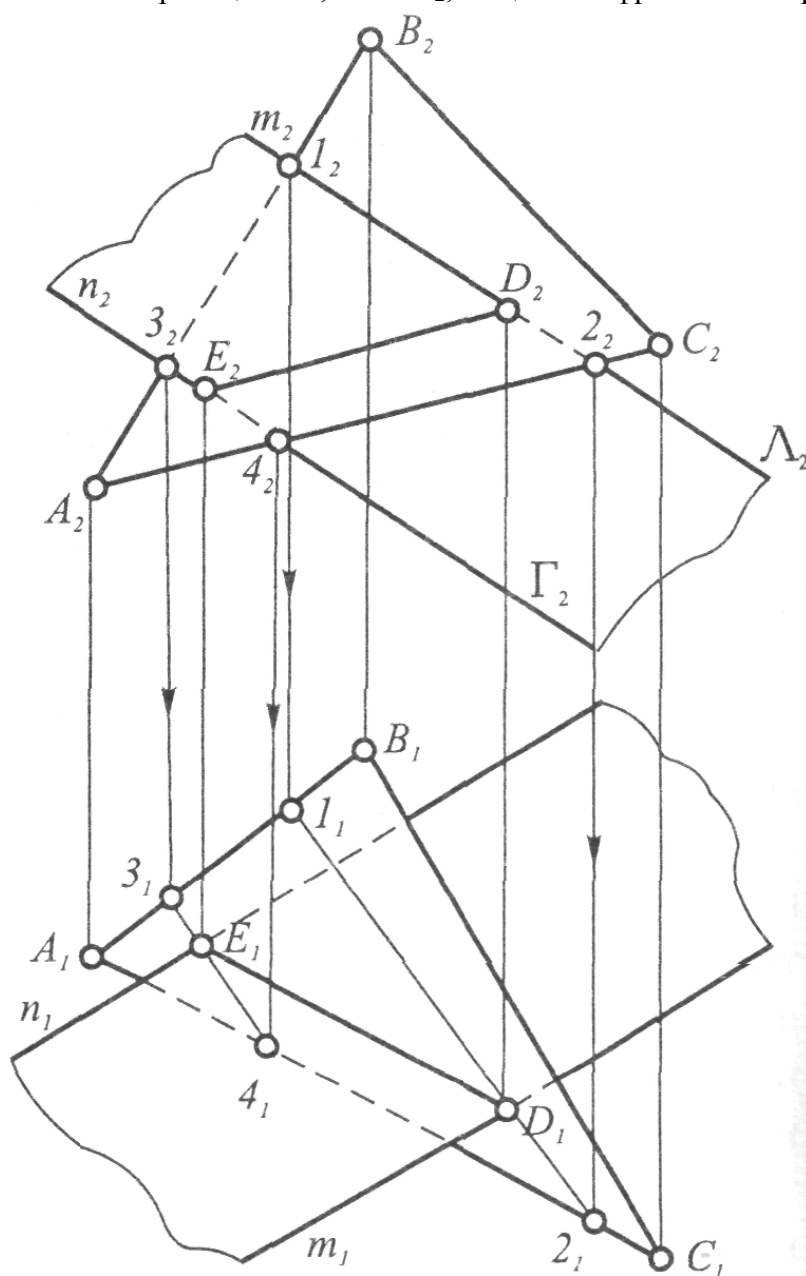


Рис. 2.7. Перетин двох площин



### 2.3. Побудова проекцій відстаней та кутів між геометричними образами

На рис. 2.8б показано проєкціювання прямого кута між двома прямими. Зображені дві взаємно перпендикулярні вертикальні площини  $\Pi_4$  та  $\Pi_5$ . У площині  $\Pi_4$  розташована горизонтальна пряма  $m$ . Вона перпендикулярна до площини  $\Pi_5$ , а значить, перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини. В цій площині задано дві прямі  $n_5$ , що перетинається з  $m_4$  та  $k_5$  – мимобіжна з  $m_4$ . Прямий кут в обох випадках проєкціюється без спотворення. На підставі цього можна зробити висновок: **прямий кут між двома прямими, що перетинаються або мимобіжні, проєкціюється без спотворення на площину проєкцій, якщо одна з його сторін паралельна цій площині**. Для непрямого кута перетину чи мимобіжності необхідно, щоб обидві прямі були паралельні відповідній площині проєкцій. Сторони прямого кута, що перетинаються, визначають площину, в якій одна зі сторін кута  $AB$  є горизонталлю чи фронталлю, а друга  $DC$  – лінією найбільшого ухилу (рис. 2.8в).

Вище було вказано, що в основі розв'язання більшості метричних задач лежать дві задачі: визначення натуральної величини відрізка прямої (див. рис. 1.6) і проведення перпендикуляра з точки до площини. Як відомо, пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих цієї площини. Зокрема, за ці прямі можна взяти горизонталь та фронталь площини. На рис. 2.8а показано проведення перпендикуляра з точки  $A$  до площини, заданої трикутним відрізком  $BCD$ , одна сторона якого  $BD$  – горизонталь, а друга  $CD$  – фронталь. Проекції перпендикуляра утворюють прямий кут з горизонтальною проєкцією горизонталі та з фронтальною проєкцією фронталі.

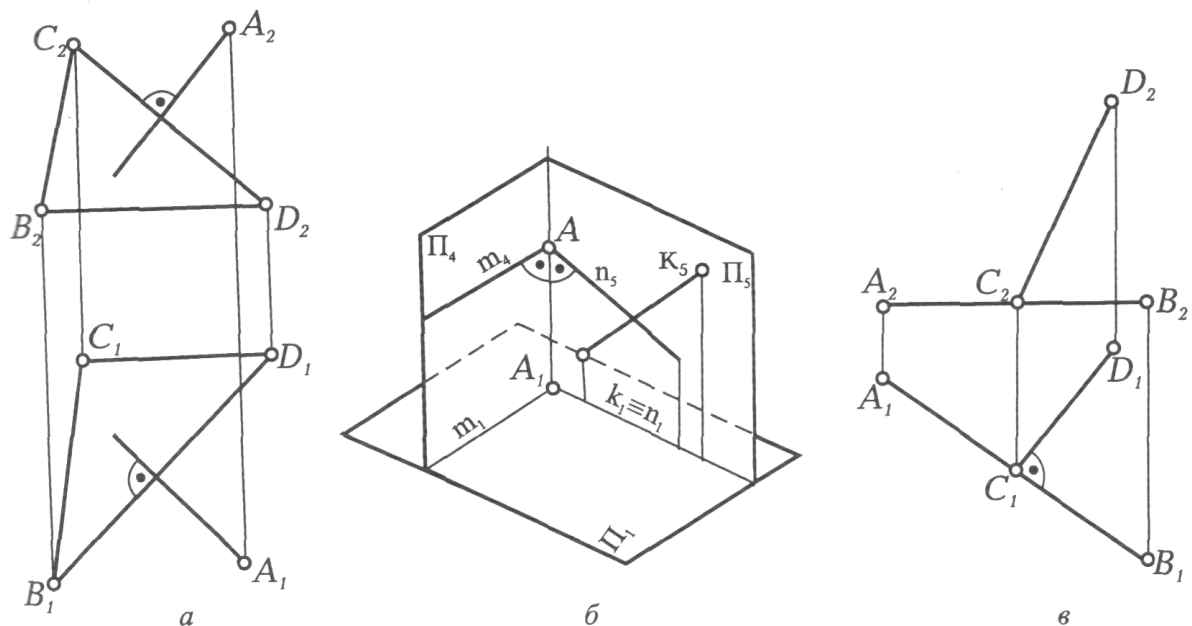


Рис. 2.8. Побудова проєкцій відстаней та кутів між прямою і площиною.

**Точка і пряма.** Для визначення проєкції відстані між точкою та прямою, яка не є лінією найбільшого ухилу, через точку проводиться площина, перпендикулярна до прямої, і знаходиться точка зустрічі цієї прямої з площиною. Відрізок прямої від точки до точки зустрічі і є шуканою відстанню. На рис. 2.9а задано точку  $A$  та пряму загального положення  $n$ , через точку  $A$  проведена площина, задана горизонталлю  $h$  та фронталлю  $f$ , знайдена точка  $B$  перетину прямої з цією площиною за допомогою фронтально-проєкціуючої площини  $\Gamma$ , що проходить через проєкцію  $n_2$ . Точка  $B$  – шукана точка перетину, а пряма  $AB$  є проєкцією відстані між точкою та прямою.

**Дві паралельні прямі.** Щоб визначити відстань між двома паралельними прямими загального положення, досить довільно взяти на одній прямій точку і таким чином задачу звести до попередньої (рис. 2.9б).

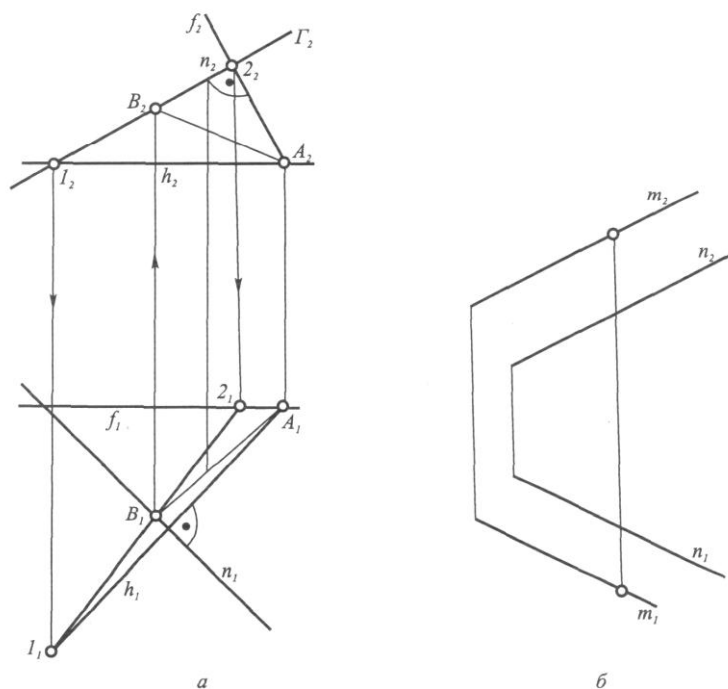


Рис. 2.9. Визначення відстані між точкою і прямою та двома паралельними прямими.

**Точка і площина.** Як відомо, відстань від точки до площини вимірюється перпендикуляром, опущеним з цієї точки до площини. На рис. 2.10 з точки  $D$  проведено перпендикуляр до трикутного відсіку, у якого сторона  $AC$  – горизонталь,  $BC$  – фронталь і знайдено точку  $E$  його перетину з площиною. Натуральну величину відстані  $DE$  можна знайти способом прямокутного трикутника.

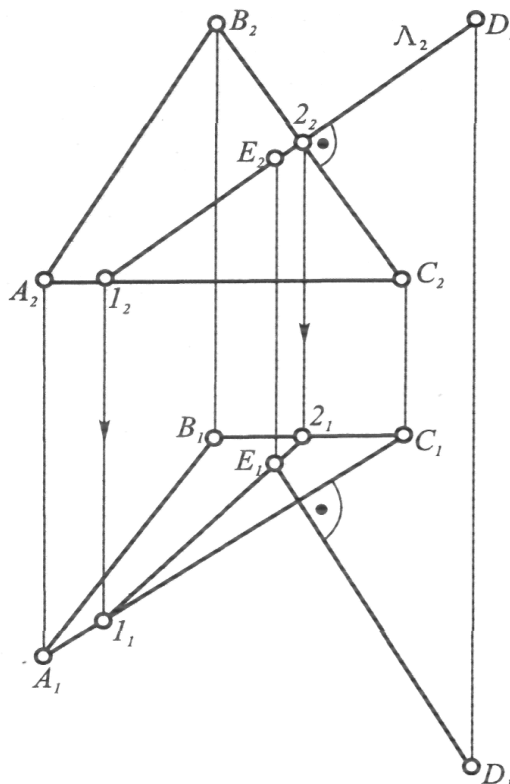


Рис. 2.10. Визначення відстані від точки до площини.

**Пряма та площина.** Для визначення кута між прямою та площиною розглянемо рис. 2.11а, де зображено площину  $\Pi_1$  та пряму  $AB$ . Як відомо, кут  $\alpha$ , між прямою та площиною визначається як кут між прямою та її проекцією на цю площину –  $AB_1$ . Оскільки трикутник  $ABA_1$  прямокутний, сума кутів  $\alpha$ , та  $\beta$  дорівнює  $90^\circ$ . Завдяки цьому простіше визначати кут  $\beta$  між прямою та перпендикуляром до площини, а шуканий кут  $\alpha$  доповнюватиме цей кут до прямого кута. На рис. 2.11б показано проекції кута  $\beta$  при точці  $A$ , між прямою  $l$  та перпендикуляром до площини, заданої горизонталлю та фронталлю.

Натуральна величина кута  $\beta$  визначається одним із способів перетворення комплексного рисунка.

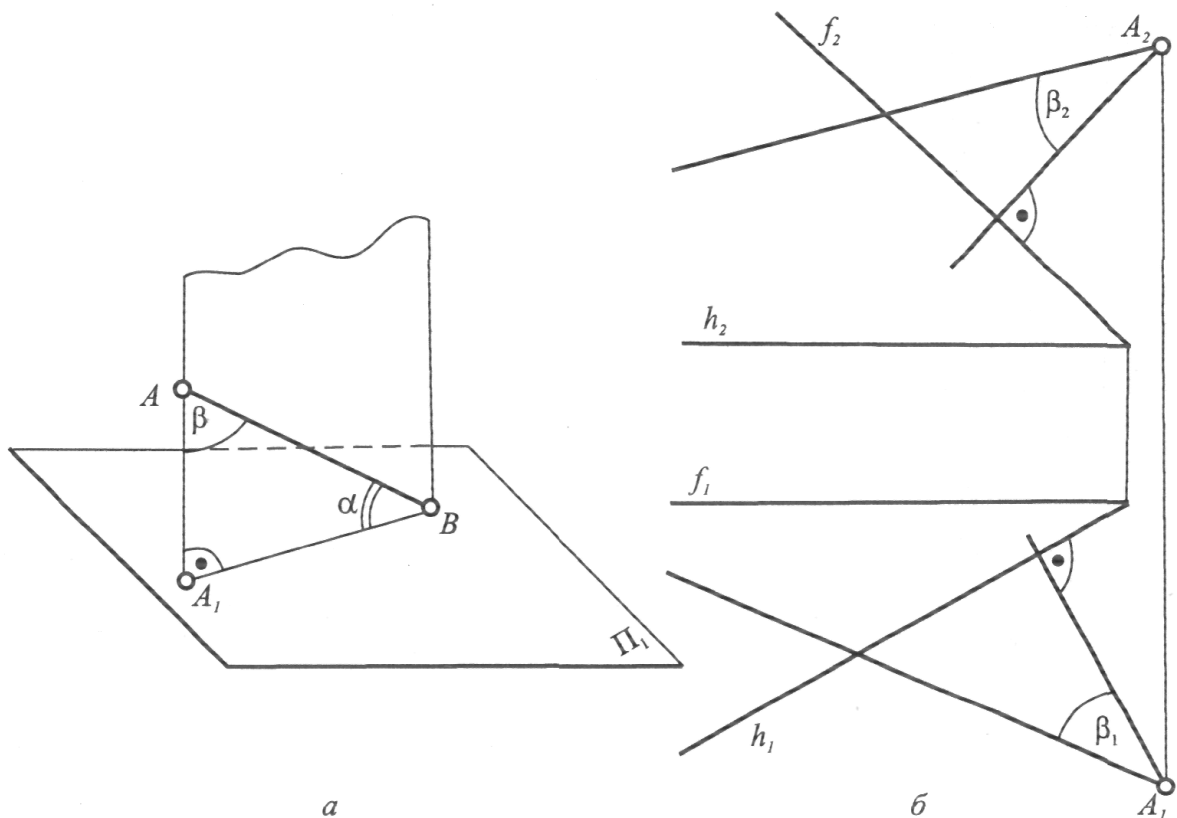


Рис. 2.11. Визначення кута між прямою та площиною

**Дві площини.** Як відомо, двогранний кут між двома площинами дорівнює куту між двома перпендикулярами до площин. На рис. 2.12 зображено дві площини, одна задана трикутником  $ABC$ , а друга – горизонталлю та фронталлю. З довільної точки  $E$  опускаємо перпендикуляри, перпендикулярно горизонтальним проекціям горизонталей та фронтальним проекціям фронталей. Кут між перпендикулярами і визначить проекції шуканого кута. Щоб знайти його натуральну величину, слід скористатися одним із способів перетворення комплексного рисунка.

Щоб визначити відстань між двома паралельними площинами загального положення, досить взяти точку на одній з площин і знайти відстань від цієї точки до другої площини (див. рис. 2.10).

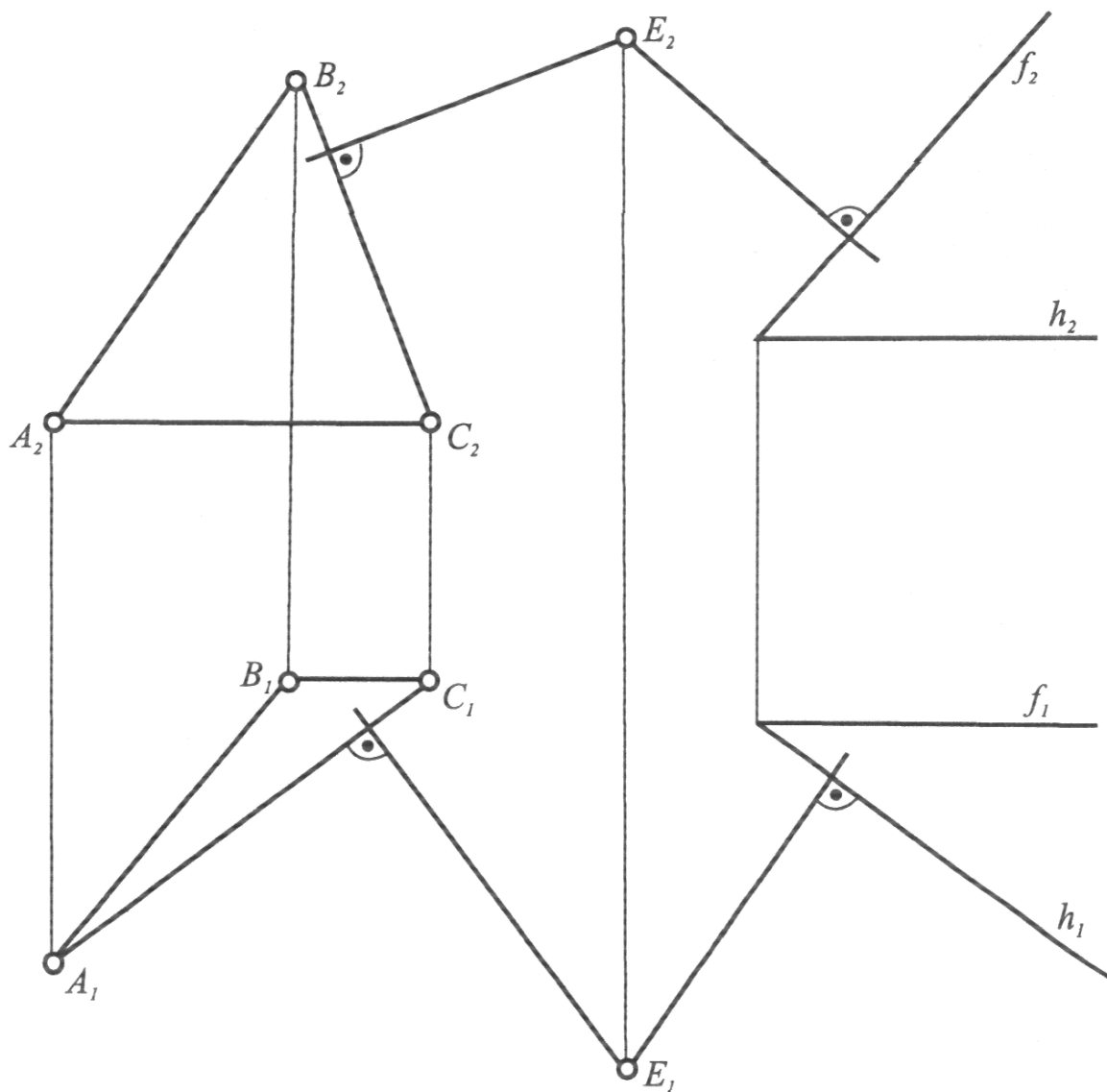


Рис. 2.12. Визначення кута між двома площинами.

#### Запитання для самоперевірки

1. Чим відрізняються позиційні задачі від метричних?
2. Які дві задачі лежать в основі розв'язання більшості метричних задач?
3. В якому випадку відстань між паралельними прямими загального положення зображається в натуральну величину?

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ №2

1. Визначити чи належить точка А площині  $BCD$  за заданими координатами (табл. 2.1).
2. Побудувати точку перетину прямої  $AB$  з площиною  $CDE$  за заданими координатами (табл. 2.1).
3. Побудувати перетин площин  $ABC$  та  $DEK$  за заданими координатами (табл. 2.1).

Таблиця 2.1 – Значення параметрів

| Варі-<br>ант | № завдання |         |         |         |          |         |          |         |         |
|--------------|------------|---------|---------|---------|----------|---------|----------|---------|---------|
|              | 1          |         |         |         | 2        |         |          |         |         |
|              | А          | В       | С       | Д       | А        | В       | С        | Д       | Е       |
| 1            | (3,2,4)    | (3,0,4) | (0,2,5) | (1,2,4) | (4,2,4)  | (6,3,4) | (3,7,4)  | (3,2,5) | (1,2,4) |
| 2            | (3,2,4)    | (2,2,2) | (3,0,4) | (0,2,5) | (1,2,4)  | (3,2,4) | (2,2,4)  | (6,3,4) | (0,2,5) |
| 3            | (5,2,4)    | (1,2,4) | (2,2,2) | (3,0,4) | (0,2,5)  | (3,2,4) | (3,3,3)  | (3,2,4) | (3,0,4) |
| 4            | (3,2,5)    | (3,2,4) | (3,2,4) | (2,2,2) | (3,0,4)  | (5,2,4) | (6,2,4)  | (4,2,4) | (2,2,2) |
| 5            | (6,3,-4)   | (3,2,4) | (5,2,4) | (1,2,4) | (2,2,2)  | (3,2,5) | (3,3,3)  | (3,6,4) | (1,2,4) |
| 6            | (3,2,4)    | (5,2,4) | (3,2,4) | (3,7,4) | (1,2,4)  | (4,2,4) | (4,4,4)  | (3,6,4) | (3,7,4) |
| 7            | (4,2,4)    | (3,2,5) | (3,2,4) | (2,2,4) | (3,7,4)  | (1,2,4) | (3,4,4)  | (4,2,4) | (2,2,4) |
| 8            | (3,6,4)    | (6,3,4) | (5,2,4) | (3,3,3) | (2,2,4)  | (0,2,5) | (2,2,4)  | (1,2,4) | (3,3,3) |
| 9            | (3,6,4)    | (3,2,4) | (3,2,5) | (6,2,4) | (3,3,3)  | (3,0,4) | (3,3,4)  | (0,2,5) | (6,2,4) |
| 10           | (4,2,4)    | (4,2,4) | (6,3,4) | (3,3,3) | (6,2,4)  | (2,2,2) | (6,3,4)  | (3,0,4) | (3,3,3) |
| 11           | (1,2,4)    | (3,6,4) | (3,2,4) | (4,4,4) | (3,0,4)  | (1,2,4) | (3,2,4)  | (2,2,2) | (4,4,4) |
| 12           | (0,2,5)    | (3,6,4) | (4,2,4) | (3,4,4) | (2,2,2)  | (3,7,4) | (4,2,4)  | (1,2,4) | (3,4,4) |
| 13           | (3,0,4)    | (4,2,4) | (3,6,4) | (2,2,4) | (1,2,4)  | (2,2,4) | (4,2,4)  | (3,7,4) | (2,2,4) |
| 14           | (2,2,2)    | (1,2,4) | (3,6,4) | (3,3,4) | (3,7,4)  | (3,3,3) | (1,2,4)  | (2,2,4) | (3,3,4) |
| 15           | (1,2,4)    | (0,2,5) | (4,2,4) | (5,2,4) | (2,2,4)  | (6,2,4) | (0,2,5)  | (3,3,3) | (5,2,4) |
| 16           | (3,7,4)    | (3,0,4) | (1,2,4) | (4,2,4) | (5,2,4)  | (3,0,4) | (3,0,4)  | (6,2,4) | (4,2,4) |
| 17           | (2,2,4)    | (2,2,2) | (0,2,5) | (3,6,4) | (3,2,5)  | (2,2,2) | (2,2,2)  | (3,3,3) | (3,6,4) |
| 18           | (3,3,3)    | (1,2,4) | (3,0,4) | (3,6,4) | (6,3,-4) | (1,2,4) | (1,2,-4) | (4,4,4) | (3,6,4) |
| 19           | (6,2,4)    | (3,7,4) | (2,2,2) | (2,2,2) | (3,2,4)  | (3,7,4) | (3,7,4)  | (3,4,4) | (2,2,2) |
| 20           | (3,3,3)    | (2,2,4) | (1,2,4) | (1,2,4) | (4,2,4)  | (2,2,4) | (2,2,4)  | (2,2,4) | (1,2,4) |
| 21           | (4,4,4)    | (3,3,3) | (3,7,4) | (3,7,4) | (3,6,4)  | (4,4,4) | (3,3,3)  | (3,3,4) | (3,7,4) |
| 22           | (3,4,4)    | (6,2,4) | (2,2,4) | (2,2,4) | (3,6,4)  | (3,4,4) | (6,2,4)  | (5,2,4) | (2,2,4) |
| 23           | (2,2,4)    | (3,3,3) | (3,3,3) | (3,3,3) | (4,2,4)  | (2,2,4) | (3,4,4)  | (4,2,4) | (3,3,3) |
| 24           | (3,3,4)    | (2,2,4) | (6,2,4) | (6,2,4) | (2,2,4)  | (3,3,4) | (2,2,4)  | (3,6,4) | (6,2,4) |
| 25           | (5,2,4)    | (3,3,3) | (3,3,3) | (3,0,4) | (3,3,3)  | (5,2,4) | (3,3,4)  | (3,6,4) | (3,0,4) |

| Варіант | № завдання |         |         |         |          |         |
|---------|------------|---------|---------|---------|----------|---------|
|         | 3          |         |         |         |          |         |
|         | А          | В       | С       | Д       | Е        | К       |
| 1       | (3,2,4)    | (3,0,4) | (0,2,5) | (1,2,4) | (4,2,4)  | (6,3,4) |
| 2       | (3,2,4)    | (2,2,2) | (3,0,4) | (0,2,5) | (1,2,4)  | (3,2,4) |
| 3       | (5,2,4)    | (1,2,4) | (2,2,2) | (3,0,4) | (0,2,5)  | (3,2,4) |
| 4       | (3,2,5)    | (3,2,4) | (3,2,4) | (2,2,2) | (3,0,4)  | (5,2,4) |
| 5       | (6,3,-4)   | (3,2,4) | (5,2,4) | (1,2,4) | (2,2,2)  | (3,2,5) |
| 6       | (3,2,4)    | (5,2,4) | (3,2,4) | (3,7,4) | (1,2,4)  | (4,2,4) |
| 7       | (4,2,4)    | (3,2,5) | (3,2,4) | (2,2,4) | (3,7,4)  | (1,2,4) |
| 8       | (3,6,4)    | (6,3,4) | (5,2,4) | (3,3,3) | (2,2,4)  | (0,2,5) |
| 9       | (3,6,4)    | (3,2,4) | (3,2,5) | (6,2,4) | (3,3,3)  | (3,0,4) |
| 10      | (4,2,4)    | (4,2,4) | (6,3,4) | (3,3,3) | (6,2,4)  | (2,2,2) |
| 11      | (1,2,4)    | (3,6,4) | (3,2,4) | (4,4,4) | (3,0,4)  | (1,2,4) |
| 12      | (0,2,5)    | (3,6,4) | (4,2,4) | (3,4,4) | (2,2,2)  | (3,7,4) |
| 13      | (3,0,4)    | (4,2,4) | (3,6,4) | (2,2,4) | (1,2,4)  | (2,2,4) |
| 14      | (2,2,2)    | (1,2,4) | (3,6,4) | (3,3,4) | (3,7,4)  | (3,3,3) |
| 15      | (1,2,4)    | (0,2,5) | (4,2,4) | (5,2,4) | (2,2,4)  | (6,2,4) |
| 16      | (3,7,4)    | (3,0,4) | (1,2,4) | (4,2,4) | (5,2,4)  | (3,0,4) |
| 17      | (2,2,4)    | (2,2,2) | (0,2,5) | (3,6,4) | (3,2,5)  | (2,2,2) |
| 18      | (3,3,3)    | (1,2,4) | (3,0,4) | (3,6,4) | (6,3,-4) | (1,2,4) |
| 19      | (6,2,4)    | (3,7,4) | (2,2,2) | (2,2,2) | (3,2,4)  | (3,7,4) |
| 20      | (3,3,3)    | (2,2,4) | (1,2,4) | (1,2,4) | (4,2,4)  | (2,2,4) |
| 21      | (4,4,4)    | (3,3,3) | (3,7,4) | (3,7,4) | (3,6,4)  | (4,4,4) |
| 22      | (3,4,4)    | (6,2,4) | (2,2,4) | (2,2,4) | (3,6,4)  | (3,4,4) |
| 23      | (2,2,4)    | (3,3,3) | (3,3,3) | (3,3,3) | (4,2,4)  | (2,2,4) |
| 24      | (3,3,4)    | (2,2,4) | (6,2,4) | (6,2,4) | (2,2,4)  | (3,3,4) |
| 25      | (5,2,4)    | (3,3,3) | (3,3,3) | (3,0,4) | (3,3,3)  | (5,2,4) |

## Тема: Багатогранники

**Мета роботи** – систематизація і закріплення знань щодо знаходження точки перетину багатогранників із прямою, лінії перетину їх з площиною, а також будувати лінії взаємного перетину багатогранників та розгортки багатогранників.

### Завдання для виконання роботи

1. Вивчити основні способи проєкціювання багатогранників.
2. Отримати навички знаходити точки перетину багатогранників із прямою, лінії перетину їх з площиною, а також будувати лінії взаємного перетину багатогранників та розгортки багатогранників.

### Порядок опрацювання завдань

**Місце проведення занять:** кафедра механізації (ауд.140 а).

**Місце та час отримання консультації:** кафедра механізації (згідно з графіком).

**Обладнання та матеріали:** готовальня середніх розмірів, лінійка, косинці із кутами  $45^\circ$  та  $30^\circ$  і  $60^\circ$ , олівці "Конструктор" марки М, 2М, ТМ, Т (іноземного виробництва відповідно В, 2В, НВ, Н), кнопки, гумки.

**Форми підсумкового контролю:** захист практичних робіт.

### 3.1. Правильні багатогранники – тіла Платона

Багатогранною поверхнею, або багатогранником, називають поверхню, складену з кінцевого числа плоских багатокутників, що не лежать в одній площині і прилягають один до одного. Ці багатокутники називають гранями поверхні, а їхні сторони – ребрами. Багатогранні поверхні бувають замкненими і незамкненими. Найбільш поширені багатогранники – призми і піраміди. Число граней  $G$ , вершин  $B$  та ребер  $P$  будь-якого опуклого замкненого багатогранника визначається теоремою Декарта-Ейлера ( $G+B-P=2$ ). Серед значної кількості багатогранників в окрему групу виділяють правильні опуклі багатогранники, або тіла Платона. Їх всього п'ять, у них усі ребра, грані, кути (плоскі, двогранні та просторові) рівні між собою.

**Тетраедр** – чотиригранник, гранями якого є чотири рівносторонніх трикутники. Побудову його доцільно починати з горизонтальної проєкції (рис. 3.1а).

**Октаедр** – восьмигранник, гранями якого є вісім рівносторонніх трикутників. В окремому положенні на двох проєкціях октаедр зображається квадратом з діагоналями (рис. 3.1б).

**Ікосаедр** (двадцятигранник) утворений з 20 рівносторонніх трикутників (рис. 3.2а). Побудову цього багатогранника рекомендується також починати з горизонтальної проєкції, де зображаються дві співвісні правильні п'ятикутні піраміди, основи яких повернуті одна відносно іншої. На полі  $П_1$  обрис ікосаедра є правильним десятикутником. На полі  $П_2$  проводять спільну вертикальну вісь, з точки  $D_2$  радіусом, що дорівнює стороні п'ятикутника, роблять засічку на осі. Так знаходять вершину верхньої піраміди. З точки  $C_2$  цим самим радіусом виконують засічку на вертикальній лінії зв'язку, що проходить через  $B_1$  дістаючи точку  $B_2$ . Через  $B_2$  пройде основа нижньої піраміди, її вершина визначиться за допомогою засічки тим же радіусом з точки  $A_2$ .

**Гексаедр**, або куб, – шестигранник, гранями якого є шість квадратів (рис. 3.2б).

**Додекаедр** (дванадцятигранник) утворений з 12 правильних п'ятикутників (рис. 3.2в). Побудову також зручно починати з горизонтальної проєкції. Основою додекаедра є правильний п'ятикутник, одна сторона якого фронтально-проєкціююча. З вершин нижньої основи проводяться бісектриси всіх п'яти кутів. Нижня основа повертається навколо

фронтально-проекціюючого ребра. Для визначення точки  $C_2$  визначають спочатку її горизонтальну проекцію  $C_1$ , як перетин фронтальної траєкторії обертання точки  $A_1$ , з бісектрисою, проведеною через точку  $F_1$ . З точки  $C_1$  проводять вертикальну лінію зв'язку до перетину з дугою радіуса  $F_2A_2$ , з центром у точці  $F_2$ . Точка  $C_2$  разом з точкою  $F_2$  визначає фронтально-проекціюючу грань додекаедра. На полі  $\Pi_1$  точки зовнішнього контура додекаедра, що визначають правильний десятикутник, знаходять за допомогою кола, описаного з центра нижньої основи. Верхню основу додекаедра знаходять за допомогою точки  $G_2$ , яка визначається засічкою з точки  $D_2$  радіусом, що дорівнює стороні п'ятикутника, до перетину з вертикальною лінією відповідності, що проходить через  $G_1$ . Навколо всіх правильних багатогранників можна описати сферу.

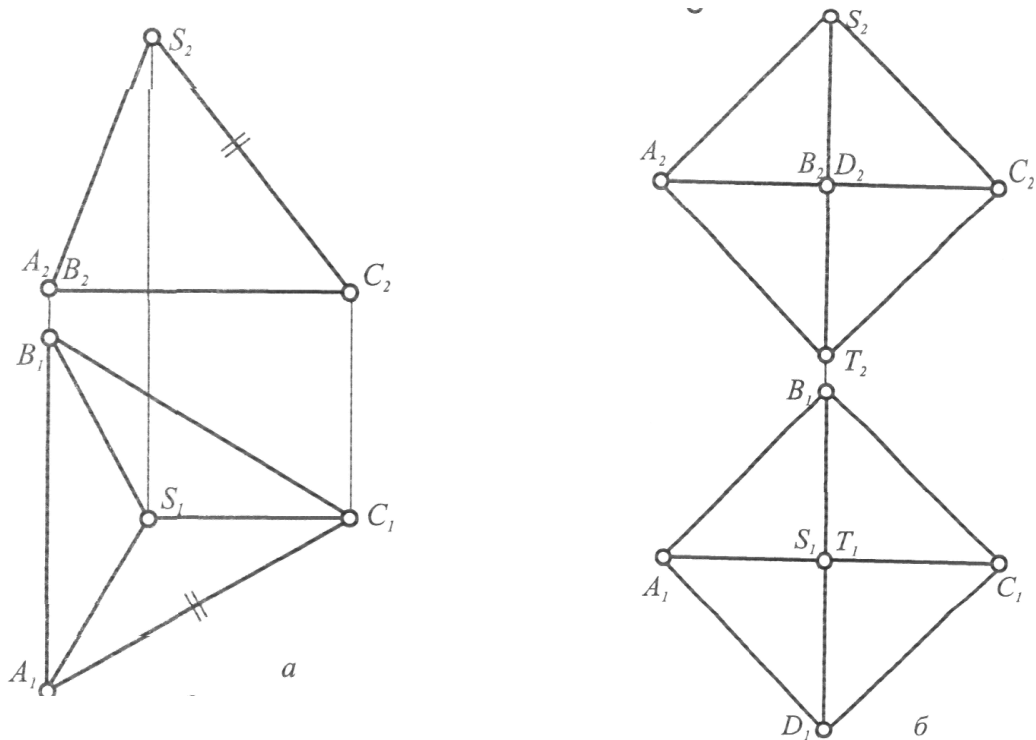


Рис. 3.1. Проекціювання тетраедра та октаедра.

### 3.2. Піраміди, призми

Серед багатогранників найбільше поширення мають піраміди та призми.

**Пірамідою** називають багатогранник, у якого всі грані, крім однієї, мають спільну вершину, яка є вершиною піраміди (рис. 3.3а). Оскільки всі грані піраміди – трикутники, піраміда визначається заданням її основи та вершини.

**Призма** – це багатогранник, обмежений призматичною поверхнею та двома паралельними площинами, в яких лежать основи призми, грані призматичної поверхні називаються гранями призми, а її ребра – ребрами призми (рис. 3.3б). Основами призми є рівні багатокутники, а бічні ребра дорівнюють одне одному. Коли основи призми не паралельні між собою, вона зветься зрізаною. Якщо ребра призми перпендикулярні до її основи, призму називають прямою, коли ця умова не витримується, – похилою.

Призми та піраміди розрізняють за числом вершин основи. У випадку, коли основою піраміди чи призми є правильний багатокутник, а висота збігається з віссю, піраміду та призму називають правильною.



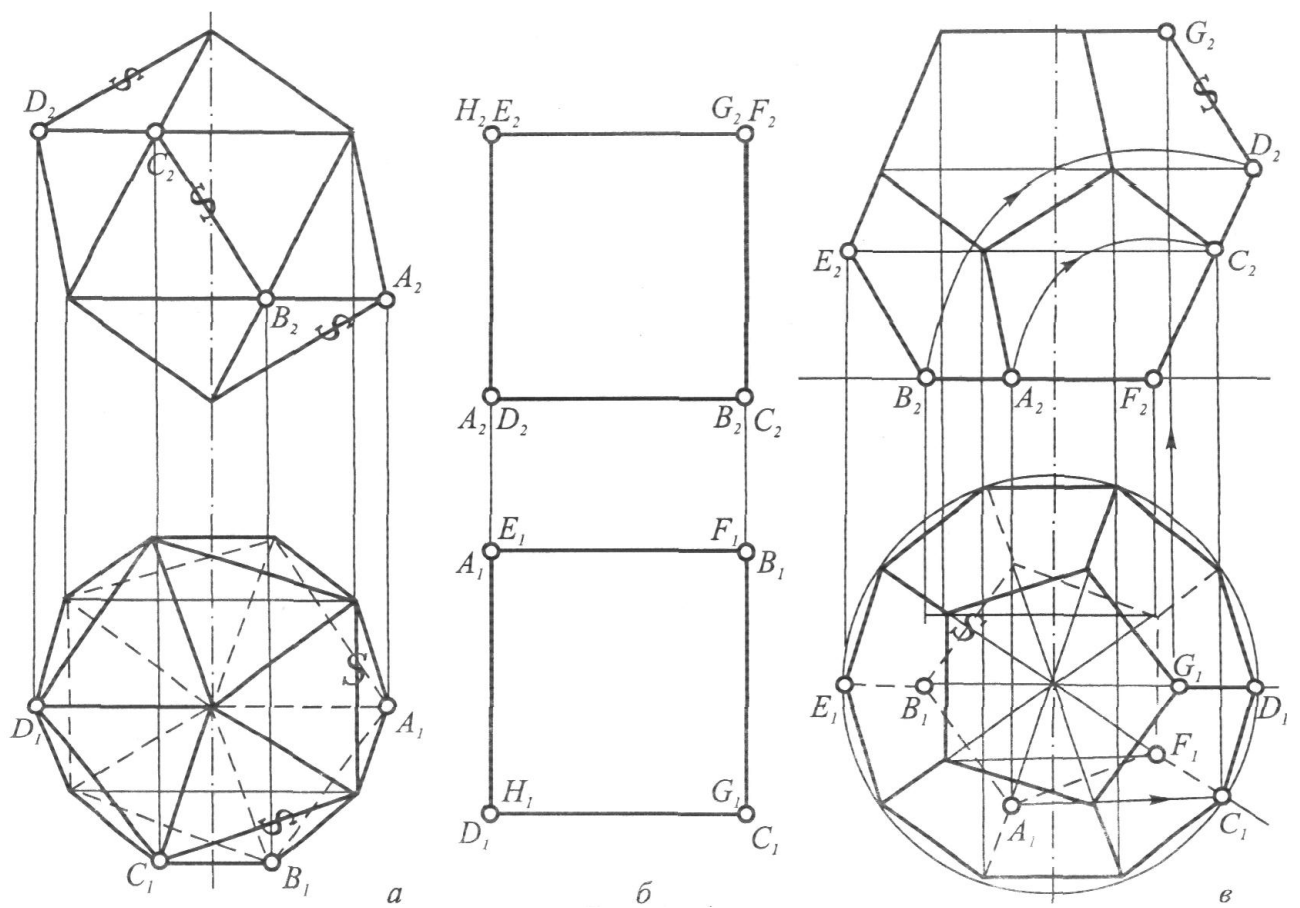


Рис. 3.2. Проекціювання ікосаедра, гексаедра, додекаедра.

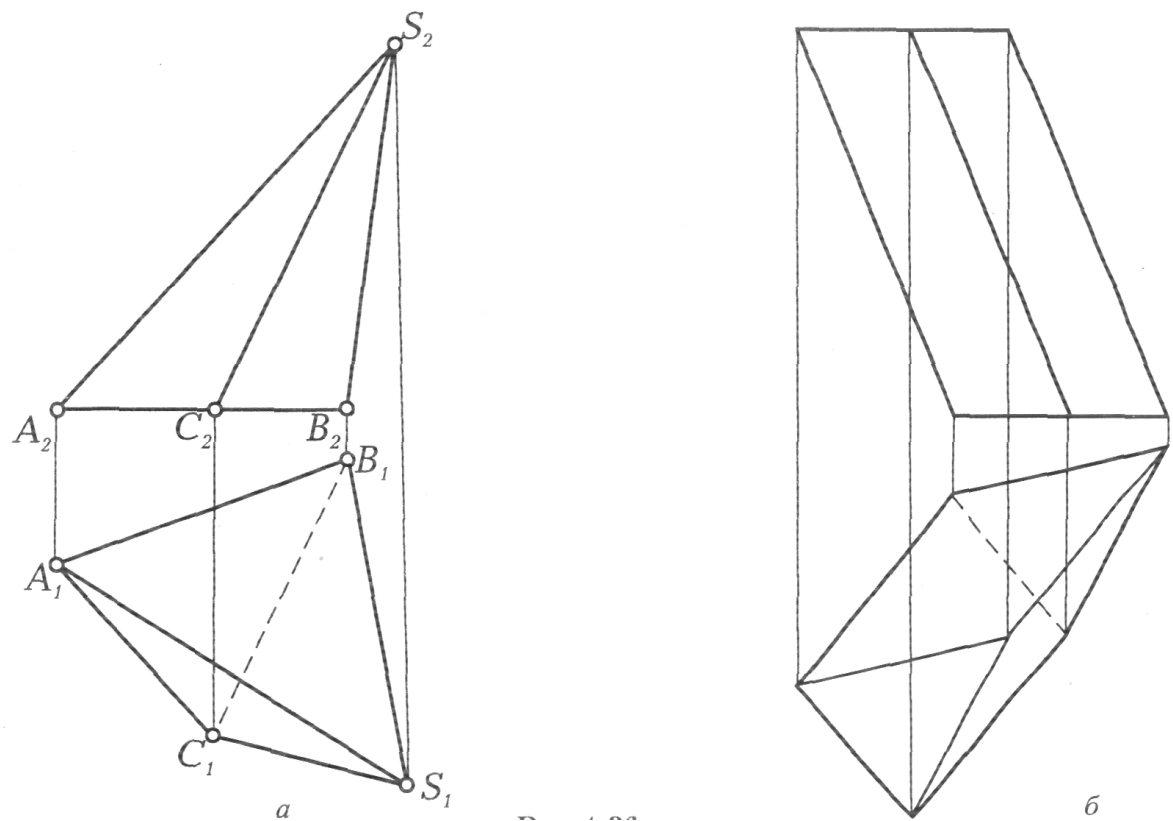
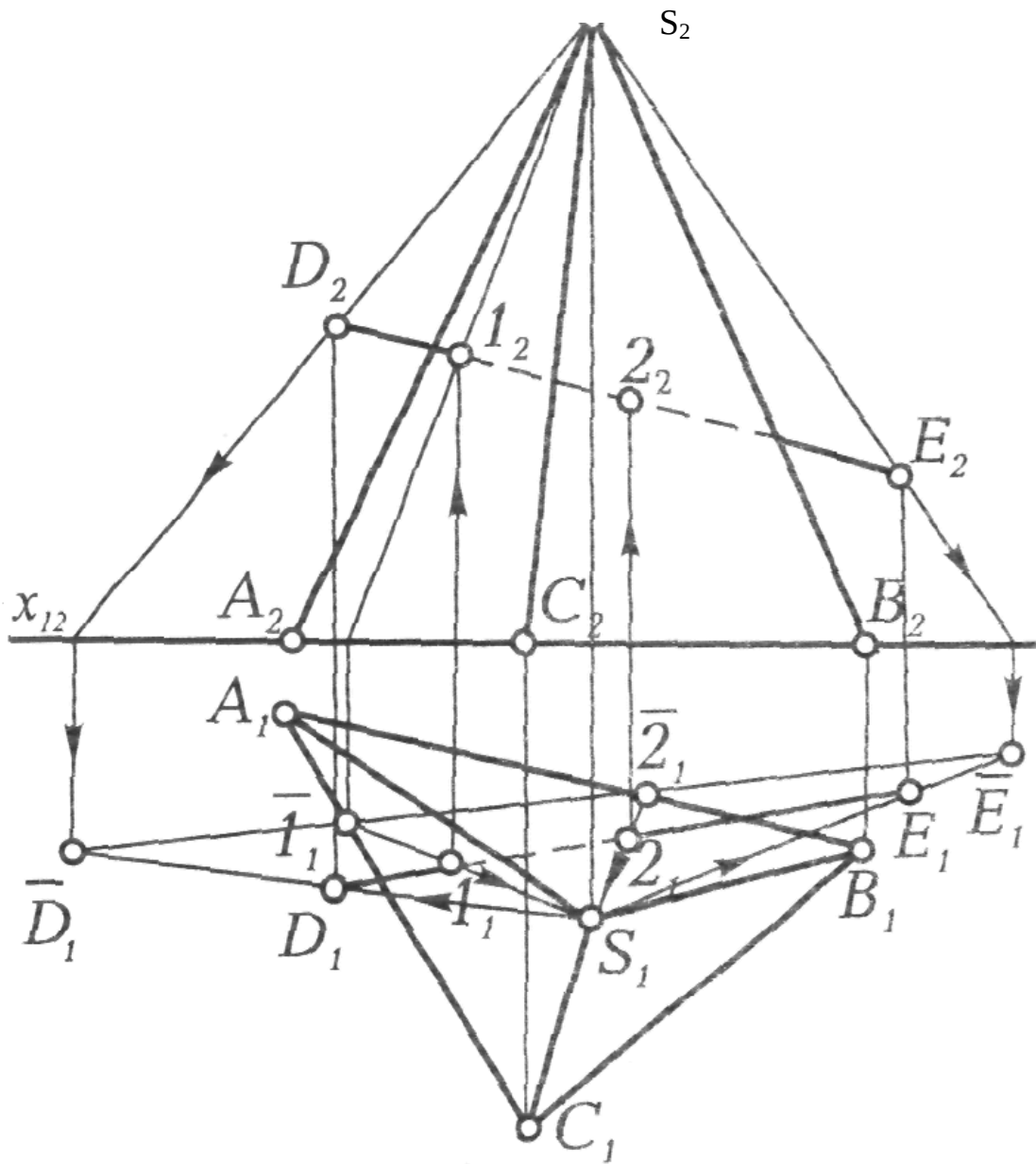


Рис.3.3. Проекціювання піраміди та призми.

### 3.3. Перетин багатогранників з прямою та площиною

На рис. 3.4а тригранна піраміда  $SABC$  перетинається з прямою загального положення  $DE$ . Для визначення точок зустрічі прямої з гранями піраміди застосовано метод центрального допоміжного проєкціювання з вершини піраміди  $S$  на площину її основи. При цьому піраміда спроекціюється своєю основою, а відрізок  $DE$  прямої – відрізком  $\bar{D}_1\bar{E}_1$ . В перетині його з основою піраміди визначаються дві точки перетину  $\bar{1}_1$  та  $\bar{2}_1$ . Зворотним проєкціюванням цих точок у вершину піраміди визначаються шукані точки зустрічі прямої з гранями піраміди  $1_2$  та  $2_2$ .

Рис. 3.4б ілюструє побудову точок зустрічі відрізка  $DE$  прямої з гранями тригранної похилої призми  $ABC$ . У цьому випадку використане паралельне косокутне допоміжне проєкціювання в напрямі бічних ребер призми на площину її основи. При такому проєкціюванні призма спроекціюється своєю основою  $A_1B_1C_1$ , а відрізок прямої – відрізком  $\bar{D}_1\bar{E}_1$ . Перетин відрізка з основою призми визначить допоміжні проєкції шуканих точок  $\bar{1}_1$  та  $\bar{2}_1$ . Проекціюючи їх у зворотному напрямі, знаходимо шукані точки  $1_2$  та  $2_2$ .



a

n

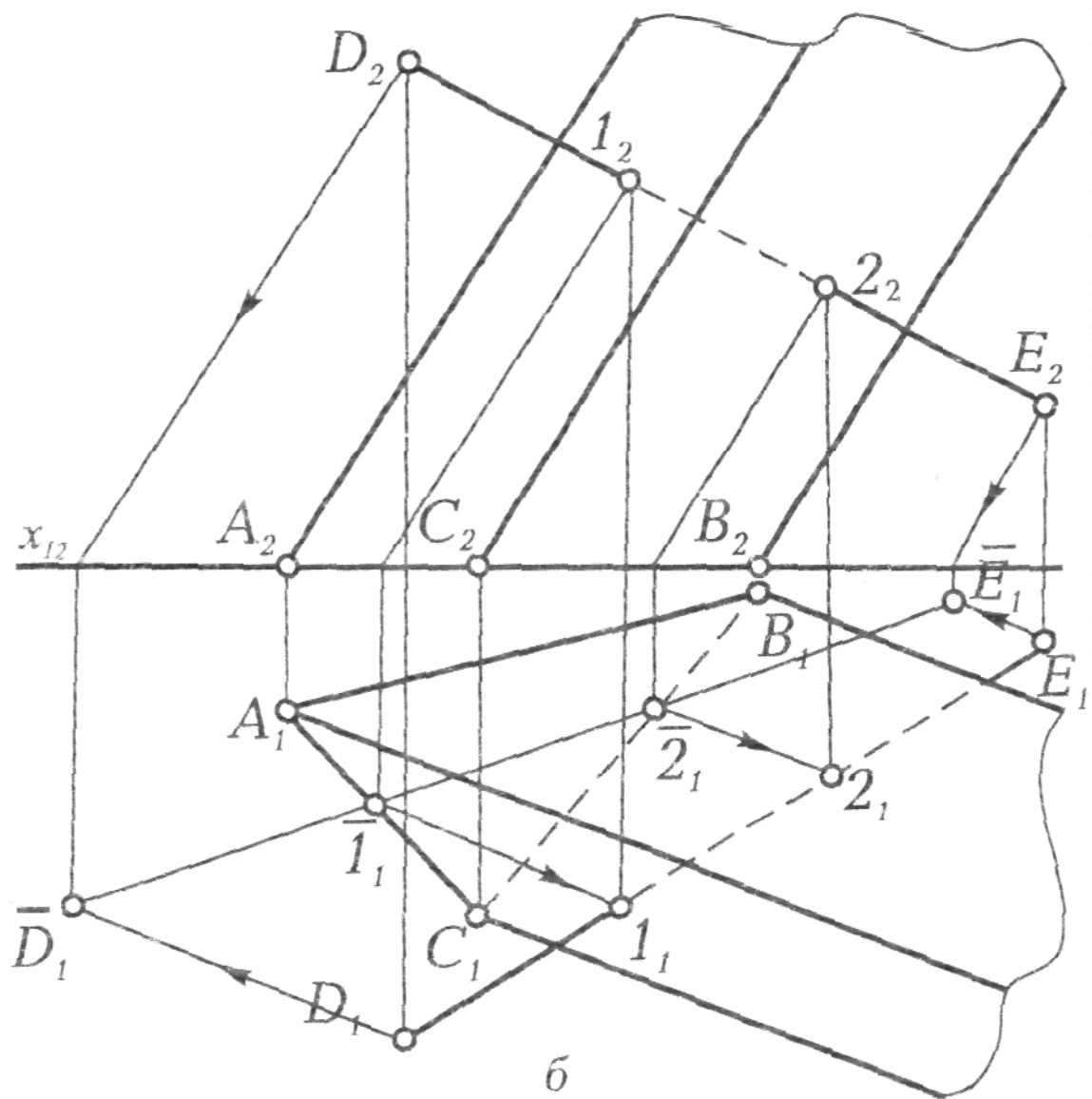
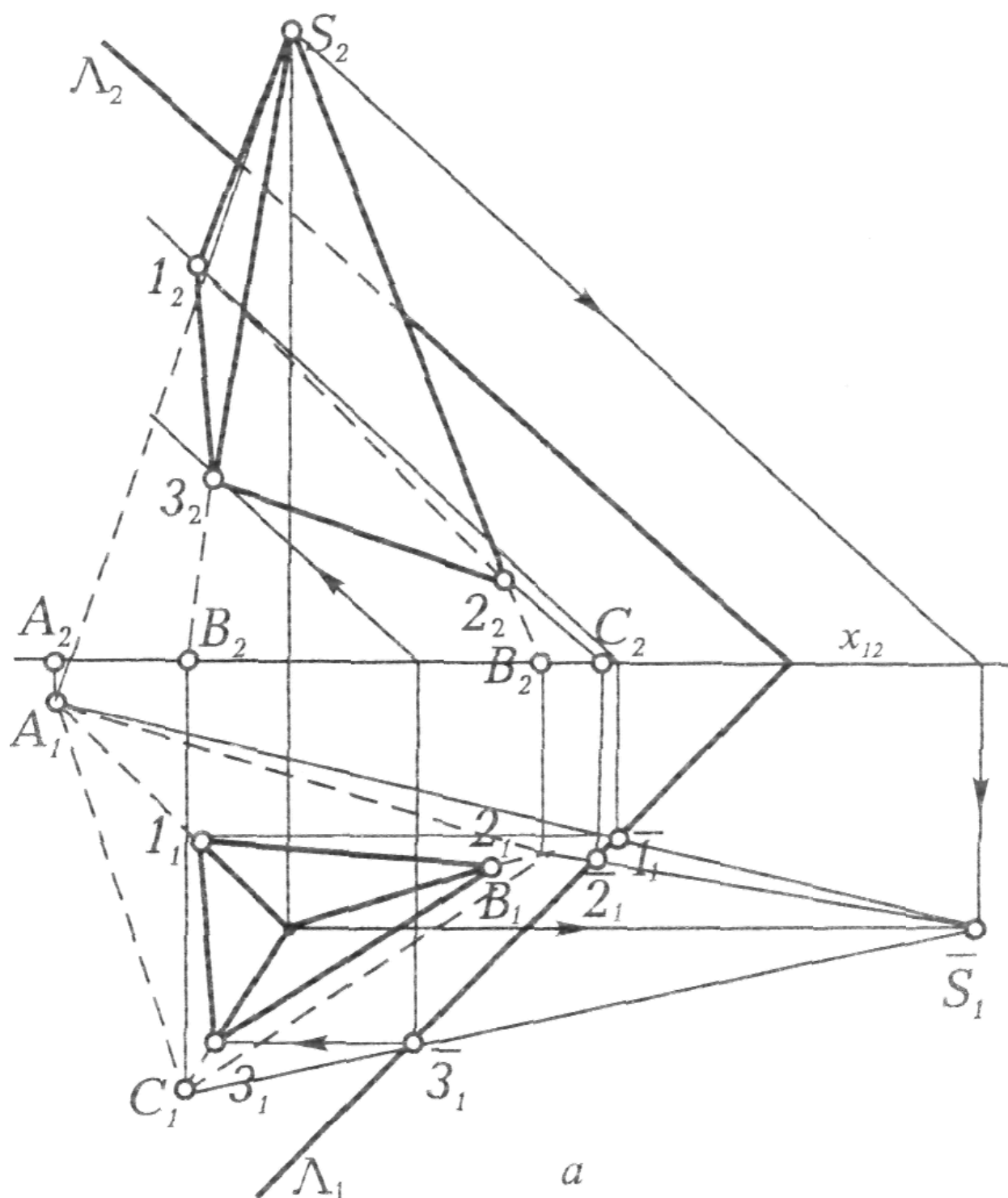


Рис. 3.4. Побудова точок перетину прямої з пірамідою та призмою.

На рис. 3.5а,б показано перетин піраміди та призми з площинами загального положення. На рис. 3.5а трикутна піраміда перетинається з площиною  $\Lambda$ , заданою слідами. Використано метод косокутного допоміжного проєкціювання піраміди та площини на площину проєкцій  $\Pi_1$  у напрямі фронтального сліду площини. При такому проєкціюванні площина спроектується своїм горизонтальним слідом  $\Lambda_1$ , основа піраміди залишиться на місці, а її вершина спроектується в точку  $\bar{S}_1$ . З'єднавши  $\bar{S}_1$  з вершини основи піраміди, одержимо косокутні допоміжні проєкції ребер піраміди, які в перетині з горизонтальним слідом площини визначають допоміжні проєкції шуканих точок  $\bar{1}_1, \bar{2}_1, \bar{3}_1$ . Повертаючи їх у зворотному напрямі, знайдемо точки 1,2,3 – вершини трикутника перетину піраміди площиною. Перетин похилої тригранної призми з площиною  $\Omega$  заданою слідами, показаний на рис. 3.5б. Тут застосований інший спосіб, а саме – знайдені точки зустрічі кожного з ребер призми з площиною (див. рис. 2.5б). Для цього через кожне ребро проведені допоміжні фронтально-проєкціюючі площини  $\Lambda_2, \Phi_2, \Gamma_2$ , які перетнуть площину, задану слідами, по паралельних прямих. Зокрема, площина  $\Lambda$  перетне січну площину по прямій  $DE$ . Перетин її горизонтальної проєкції  $D_1E_1$  з горизонтальною проєкцією ребра призми, що проходить через  $A$ , визначить точку 1. Оскільки всі три лінії перетину будуть

паралельні, на горизонтальній проекції досить визначити по одній точці –  $G_1$  та  $K_1$ . В результаті отримаємо трикутник перетину 1-2-3.





При взаємному перетині багатогранників можливі два випадки: **врізання** та **наскрізне проникнення**. В першому випадку має місце один просторовий замкнений багатокутник, а в другому – дві замкнені лінії – лінія входу та лінія виходу. Розглянемо три приклади взаємного перетину багатогранників.

33

лежатимуть у горизонтально-проекціюючих гранях, тобто за горизонтальними проекціями ліній перетину треба побудувати фронтальні. Трикутник входу 1-2-3 визначається за допомогою вертикальних прямих відповідності.

П'ятикутник виходу визначається трьома точками на ребрах похилої призми та двома точками на вертикальному ребрі, що проходить через  $B$ . Для визначення точок на цьому ребрі продовжена грань  $CB$  до перетину з ребром  $m$  у точці 9, яка разом з точками 4 та 5 задасть на полі  $\Pi_2$  трикутник. У перетині цього трикутника з ребром, що проходить через  $B$ , знайдуться точки 6 та 7. З'єднуються визначені точки, беручи до уваги те, що грані  $AB$  належать дві прямі – 8-7 та 8-6, а грані  $CB$  – три прямі: 7-4, 4-5 та 5-6. При визначенні видимості береться до уваги те, що **видимою буде лінія, яка утворилася в результаті перетину двох видимих граней**. Таким чином, на фронтальній проекції видимими будуть чотири лінії: 1-3, 3-2, 4-7, 4-5.

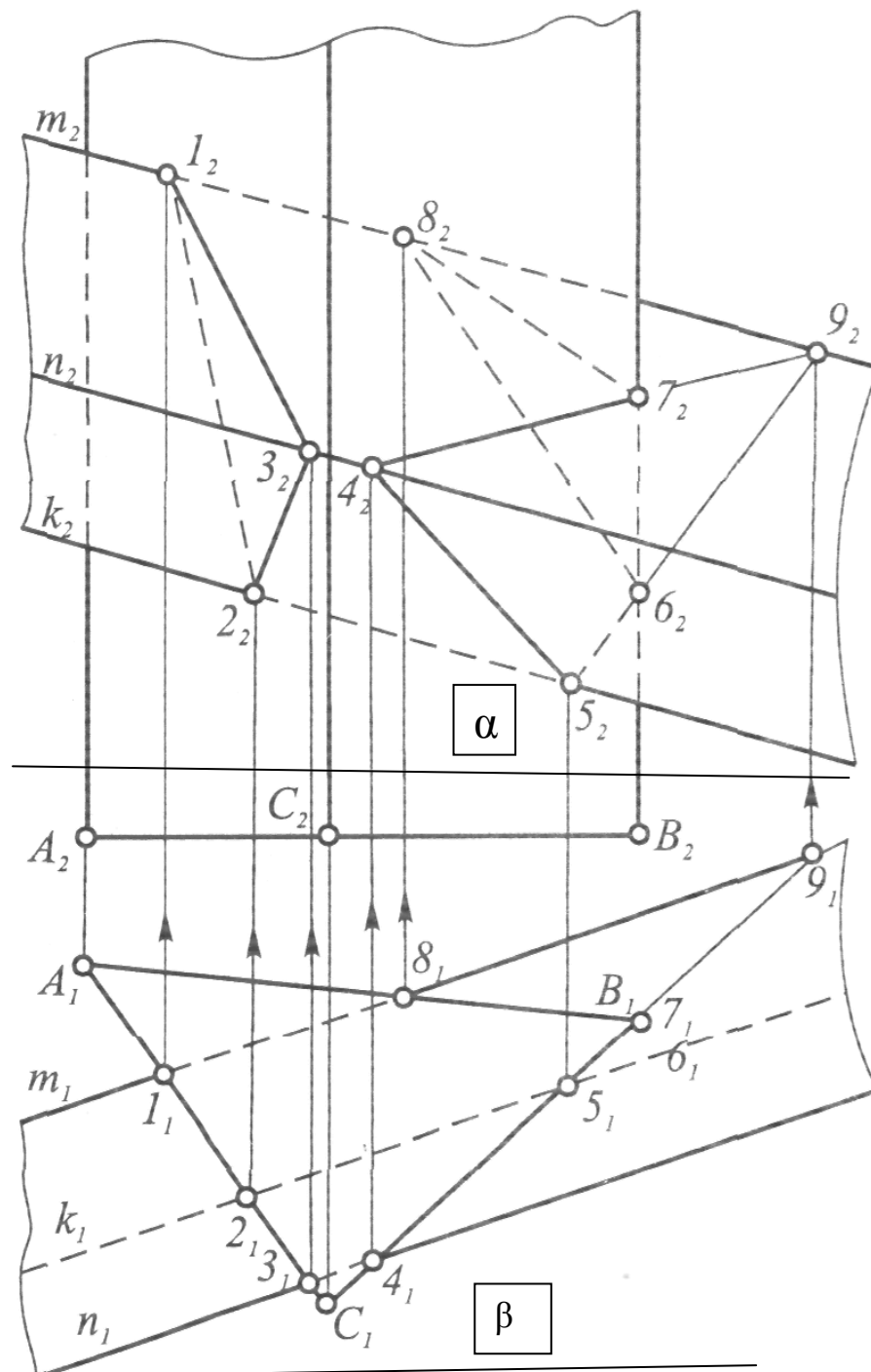


Рис. 3.6. Побудова ліній перетину двох призм.

Рисунок 3.7 ілюструє побудову лінії взаємного перетину чотирискатного даху та шпилья у вигляді шестикутної піраміди, що мають спільну вісь в даному випадку матиме місце одна просторова ламана з десятьма вершинами. Точки ламаної знаходяться на основі алгоритму побудови перетину прямої з площиною. Так, точка 1 визначиться, якщо через ребро чотирикутної піраміди провести допоміжну вертикальну січну площину  $\Phi$ , яка перетне чотиригранну піраміду по цьому ребру, а шестигранну – по прямій  $AS$ . В перетині ребра чотиригранної піраміди з прямою  $A_2S_2$  знайдеться точка  $1_2$ , за вертикальною відповідністю визначиться її горизонтальна проекція. Оскільки композиція з двох пірамід має дві площини симетрії, то за точкою 1 визначаться ще три точки, які на полі  $\Pi_1$  будуть вершинами квадрата.

Аналогічно визначається точка 2, для цього через ребро шестигранної піраміди проводиться вертикальна площина  $\Theta$ , яка перетне передню грань чотиригранної піраміди по прямій  $BT$ . У перетині на полі  $\Pi_2$ , цієї прямої з ребром піраміди визначиться фронтальна проекція точки 2, а за нею – і горизонтальна. Беручи до уваги дві площини симетрії, визначаються ще три точки на ребрах шестигранної піраміди. З'єднавши знайдені точки, одержимо просторовий десятикутник, після чого визначаємо видимість ребер обох пірамід.

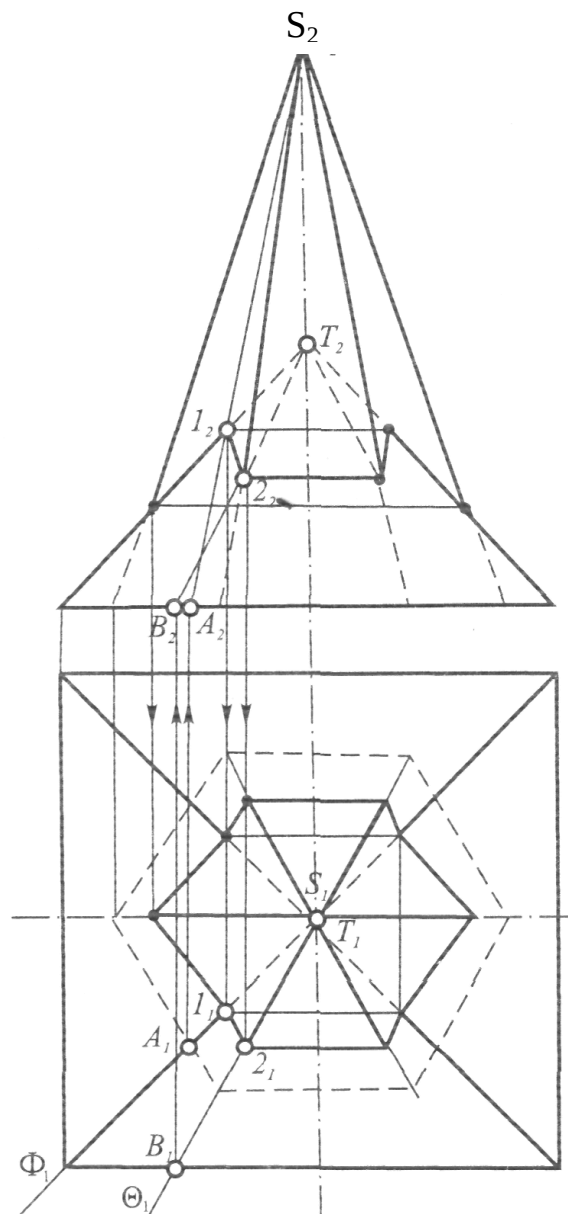


Рис. 3.7. Побудову лінії взаємного перетину чотирискатного даху та шпилья у вигляді шестикутної піраміди

При взаємному перетині багатогранників інколи доцільно скористатися одним зі способів перетворення проєкцій. На рис. 3.8 тригранна піраміда перетинається з тригранною призмою, ребра якої розташовані горизонтально, значить на полі  $\Pi_1$  зображаються в натуральну величину. В цьому випадку доцільно скористатися заміною площини проєкцій, вибравши нову площину проєкцій  $\Pi_4$  перпендикулярно до ребер призми. Після побудови проєкцій призми та піраміди на полі  $\Pi_4$  видно, що в даному випадку має місце наскрізне проникнення піраміди в призму, при якому є дві ламані: плоска 1-2-3 та просторова 9-7-5-6-8-9.

Знаходження цих точок зрозуміло з рисунка, точки переносяться на відповідні ребра та грані. Для знаходження точок 7 та 8 на ребрі призми  $l_4$  грань  $n_4l_4$  продовжено до основи піраміди. Дві точки перетину цієї площини з основою з'єднуються з точкою 9, визначаючи точки 7 та 8. Верхній трикутник на  $\Pi_1$  весь видимий, бо належить видимій грані, а п'ятикутник невидимий, бо він належить двом невидимим на полі  $\Pi_1$  граням. За горизонтальними проєкціями двох ліній перетину знаходяться їх фронтальні проєкції.

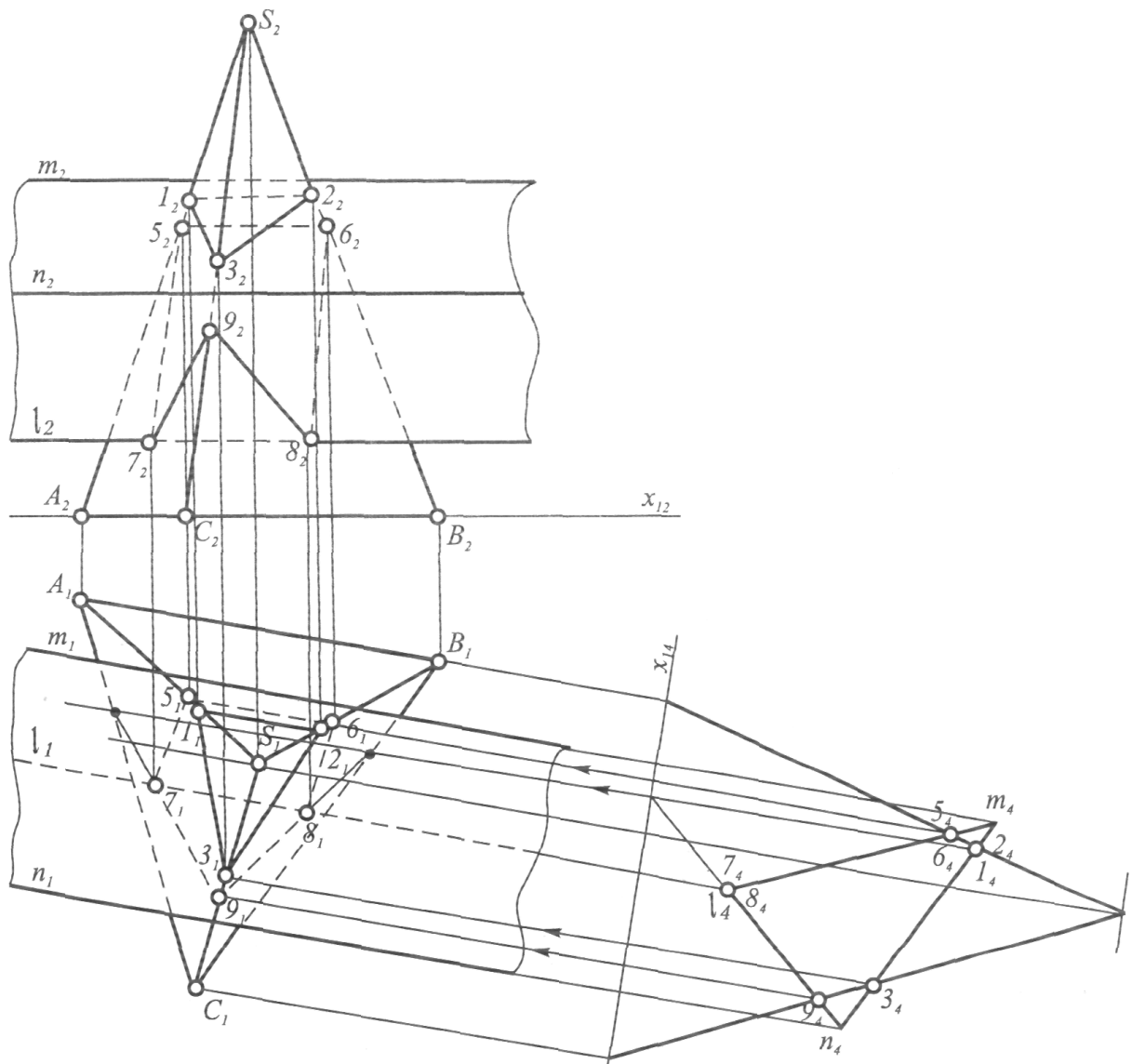


Рис. 3.8. Побудова ліній перетину тригранної піраміди з тригранною призмою.



### 3.5. Розгортки багатогранників

Щоб виготовити гранні форми з листового матеріалу, треба мати їхні розгортки. Це робиться послідовним суміщенням граней з площиною. Рис. 3.9 ілюструє побудову розгортки тригранної піраміди, розташованої на горизонтальній площині. Поверхня піраміди розрізана по ребрах, і кожна грань повернута навколо своєї основи до суміщення з полем  $\Pi_1$ . Спочатку повернута грань  $CSB$ , для цього способом прямокутного трикутника визначено натуральну величину висоти грані. Далі дугою радіуса  $B_1\bar{S}_1$  з центра  $B_1$  зроблено засічку на траєкторії обертання точки  $S$  у вертикальній площині, перпендикулярній стороні  $AB$ , а з центра  $C$ , радіусом, рівним стороні  $C_1\bar{S}_1$ , зроблено засічку на траєкторії обертання точки  $S$  навколо сторони основи  $AC$ .

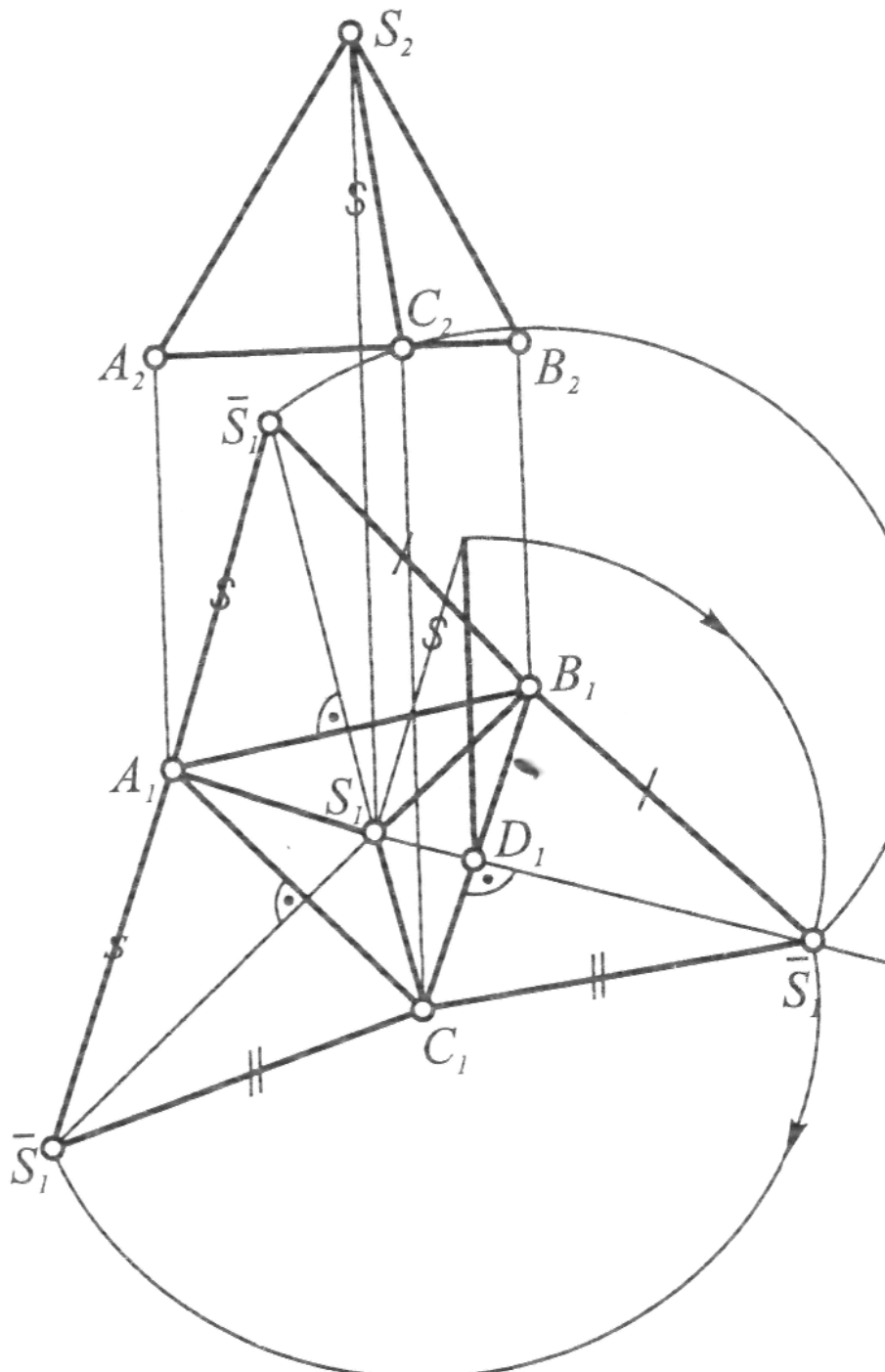


Рис. 3.9. Побудова розгортки тригранної піраміди.

Розгортку бічної поверхні тригранної призми побудовано на рис. 3.10. Похила призма розташована так, що її бічні ребра паралельні  $\Pi_2$ . Якщо призма займає загальне положення, спочатку слід привести її в положення, паралельне полю  $\Pi_2$ .

Плоскопаралельним переміщенням призма ставиться у вертикальне положення, при якому на полі  $\Pi_1$  визначиться її поперечний переріз. Призма перетинається площиною  $\Lambda_2$ , перпендикулярною до її ребер. На горизонтальній прямій, що збігається з площиною  $\bar{\Lambda}_2$ , послідовно відкладаються натуральні розміри сторін поперечного перерізу, через їх кінці проводяться вертикальні прямі, на які горизонтальними прямими переносяться кінці ребер.

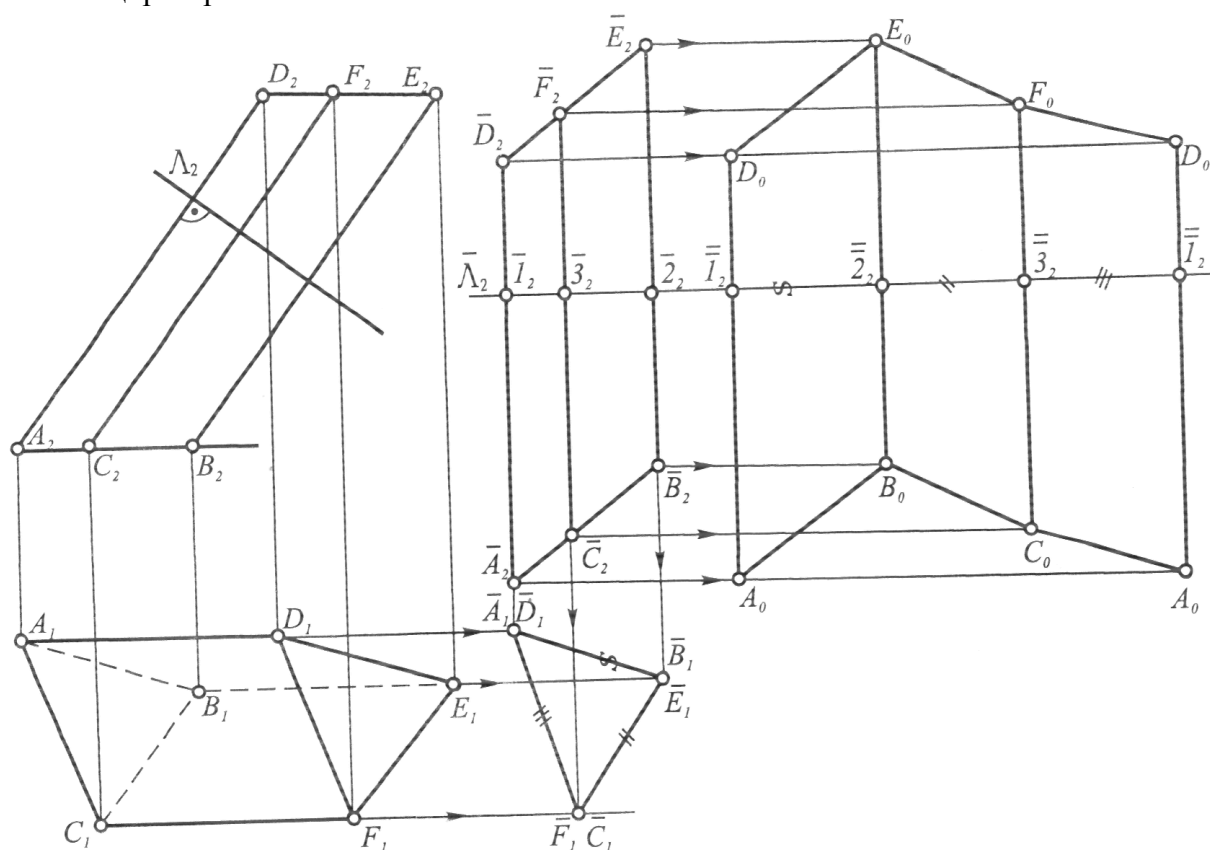


Рис. 3.10. Побудова розгортки бічної поверхні тригранної призми.

#### Запитання для самоперевірки

1. Який отримаємо багатогранник, якщо сполучимо ребрами центри граней куба?
2. В яких випадках доцільно користуватися паралельним, а в яких центральним допоміжним проєкціюванням?
3. Які плоскі фігури можуть утворитися при перетині тетраедра площиною?
4. Коли ділянка лінії перетину двох багатогранників буде видимою?
5. Назвіть два види взаємного перетину двох багатогранників.

### ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ №3

1. Побудувати точки перетину прямої  $DE$  з тригранною пірамідою  $SABC$  (рис 3.4) за заданими координатами (табл. 3.1).
2. Побудувати лінію перетину двох тригранних призм  $ABC$  вертикального розміщення та  $DEK$  (рис.3.6) розміщену під кутом  $\alpha^\circ$  та  $\beta^\circ$  (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Значення параметрів

| Варі-<br>ант | № завдання |         |                |               |
|--------------|------------|---------|----------------|---------------|
|              | 1          |         | 2              |               |
|              | Д          | Е       | $\alpha^\circ$ | $\beta^\circ$ |
| 1            | (3,2,4)    | (3,0,4) | 30             | 45            |
| 2            | (3,2,4)    | (2,2,2) | 45             | 60            |
| 3            | (5,2,4)    | (1,2,4) | 50             | 49            |
| 4            | (3,2,5)    | (3,2,4) | 45             | 37            |
| 5            | (6,3,-4)   | (3,2,4) | 60             | 33            |
| 6            | (3,2,4)    | (5,2,4) | 49             | 36            |
| 7            | (4,2,4)    | (3,2,5) | 37             | 48            |
| 8            | (3,6,4)    | (6,3,4) | 33             | 54            |
| 9            | (3,6,4)    | (3,2,4) | 36             | 65            |
| 10           | (4,2,4)    | (4,2,4) | 48             | 67            |
| 11           | (1,2,4)    | (3,6,4) | 54             | 73            |
| 12           | (0,2,5)    | (3,6,4) | 65             | 75            |
| 13           | (3,0,4)    | (4,2,4) | 67             | 55            |
| 14           | (2,2,2)    | (1,2,4) | 73             | 47            |
| 15           | (1,2,4)    | (0,2,5) | 75             | 43            |
| 16           | (3,7,4)    | (3,0,4) | 55             | 42            |
| 17           | (2,2,4)    | (2,2,2) | 47             | 41            |
| 18           | (3,3,3)    | (1,2,4) | 43             | 75            |
| 19           | (6,2,4)    | (3,7,4) | 42             | 55            |
| 20           | (3,3,3)    | (2,2,4) | 41             | 47            |
| 21           | (4,4,4)    | (3,3,3) | 46             | 43            |
| 22           | (3,4,4)    | (6,2,4) | 49             | 42            |
| 23           | (2,2,4)    | (3,3,3) | 31             | 41            |
| 24           | (3,3,4)    | (2,2,4) | 38             | 46            |
| 25           | (5,2,4)    | (3,3,3) | 32             | 49            |

## Тема: Перетин кривих поверхонь з лінією, площиною, між собою та з багатогранниками

**Мета роботи** – систематизація і закріплення знань щодо знаходження точки зустрічі прямих з кривими поверхнями, лінії їх перетину з площинами, лінії взаємного перетину поверхонь та лінії перетину кривих поверхонь із багатогранниками.

### Завдання для виконання роботи

1. Знайти точки зустрічі прямих з кривими поверхнями, лінії їх перетину з площинами та лінії взаємного перетину поверхонь.
2. Знаходити лінії перетину кривих поверхонь із багатогранниками.

### Порядок опрацювання завдань

**Місце проведення занять:** кафедра механізації (ауд.140а).

**Місце та час отримання консультацій:** кафедра механізації (згідно з графіком).

**Обладнання та матеріали:** готувальня середніх розмірів, лінійка, косинці із кутами  $45^\circ$  та  $30^\circ$  і  $60^\circ$ , олівці "Конструктор" марки М, 2М, ТМ, Т (іноземного виробництва відповідно В, 2В, НВ, Н), кнопки, гумки.

**Форми підсумкового контролю:** захист практичних робіт.

### 4.1. Перетин кривої поверхні з прямою загального положення

На рис. 4.1 показано перетин конуса обертання з прямою загального положення. Для побудови точок входу та виходу використано центральне допоміжне проєкціювання з вершини конуса на його основу. При цьому конус спроекціюється своєю основою, а пряма 1-2 – відрізком  $\bar{1}_1\bar{2}_1$ . Перетин цього відрізка з основою конуса визначить допоміжні проєкції шуканих точок  $A_1$  і  $B_1$ , які повертаємо у зворотному напрямі на пряму 1-2.

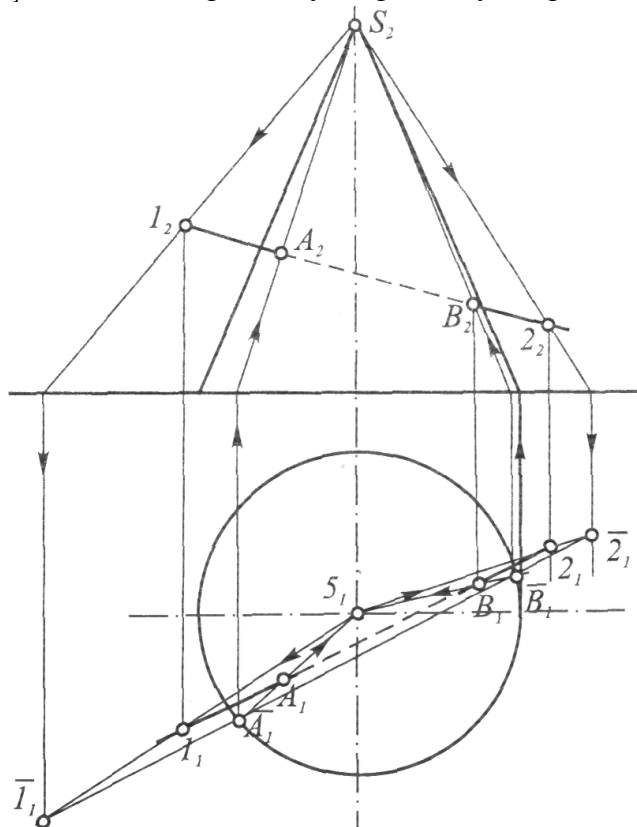


Рис. 4.1. Побудова точок перетину конуса з прямою загального положення.

На рис. 4.2 похилий еліптичний циліндр з основою у вигляді кола перетинається з прямою, циліндр паралельним допоміжним проєкціюванням спроекціюється на горизонтальну площину основи паралельно твірним циліндра, при цьому бічна поверхня циліндра спроекціюється колом основи, а відрізок 1-2 – відрізком  $\bar{1}\bar{2}_1$ . Перетин останнього з колом основи визначить допоміжні проєкції шуканих точок  $A_1$  і  $B_1$ , які повертаються у зворотному напрямі на пряму 1-2.

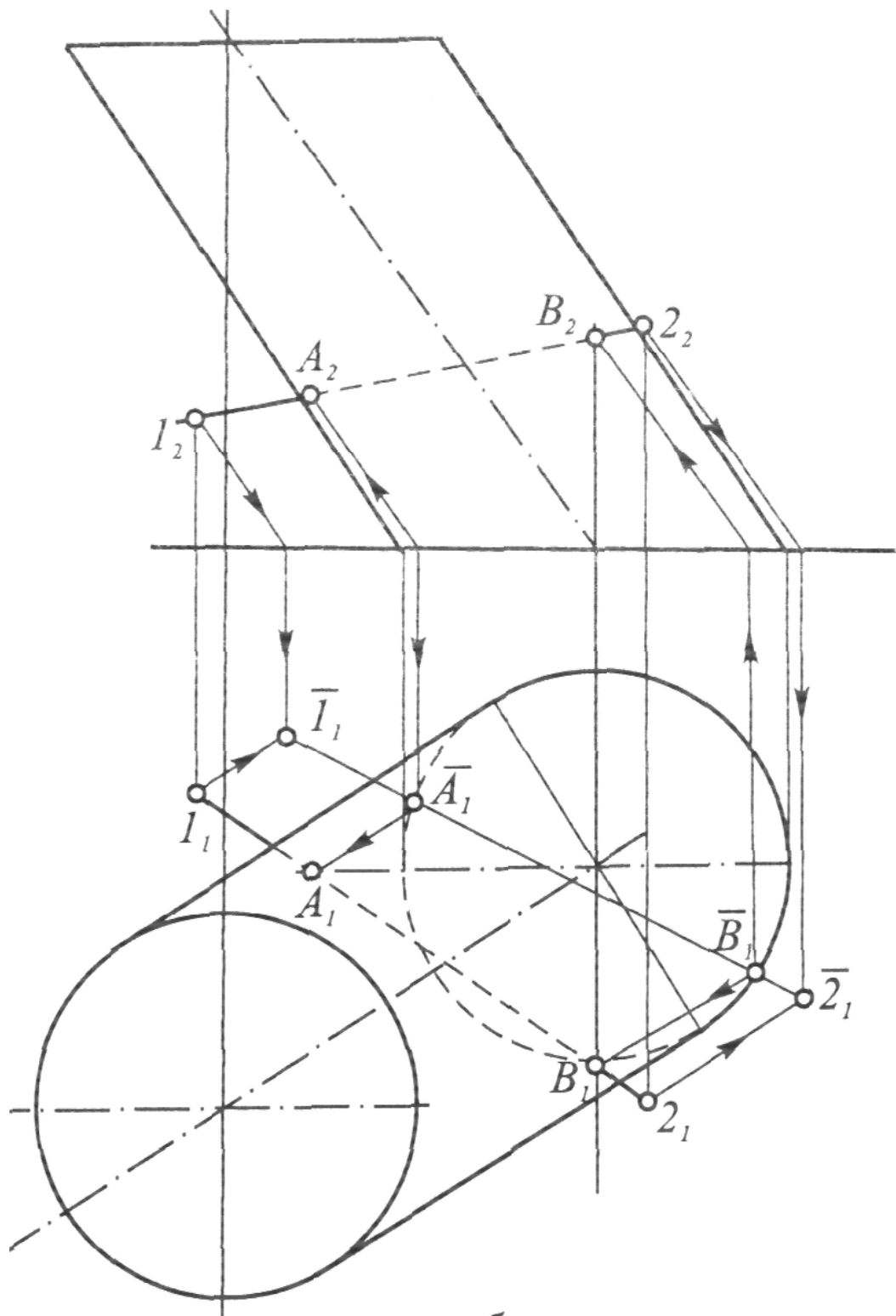


Рис. 4.2. Побудова точок перетину похилого циліндра з прямою загального положення.

Перетин поверхні сфери з прямою загального положення показано на рис. 4.3. Для визначення точок перетину використана заміна площини проєкцій, нова площина проєкцій  $\Pi_1$  проведена паралельно горизонтальній проєкції прямої. Через пряму проведено допоміжну горизонтально-проєкціюючу площину, яка перетне сферу по колу радіуса  $R$ . На полі проєкцій  $\Pi_1$  побудовано це коло, яке в перетині з проєкцією прямої дасть проєкції шуканих точок  $1_1$  і  $2_1$ . Повертаючи їх у зворотному напрямі, знаходимо спочатку горизонтальні, а потім фронтальні проєкції шуканих точок  $1$  та  $2$ .

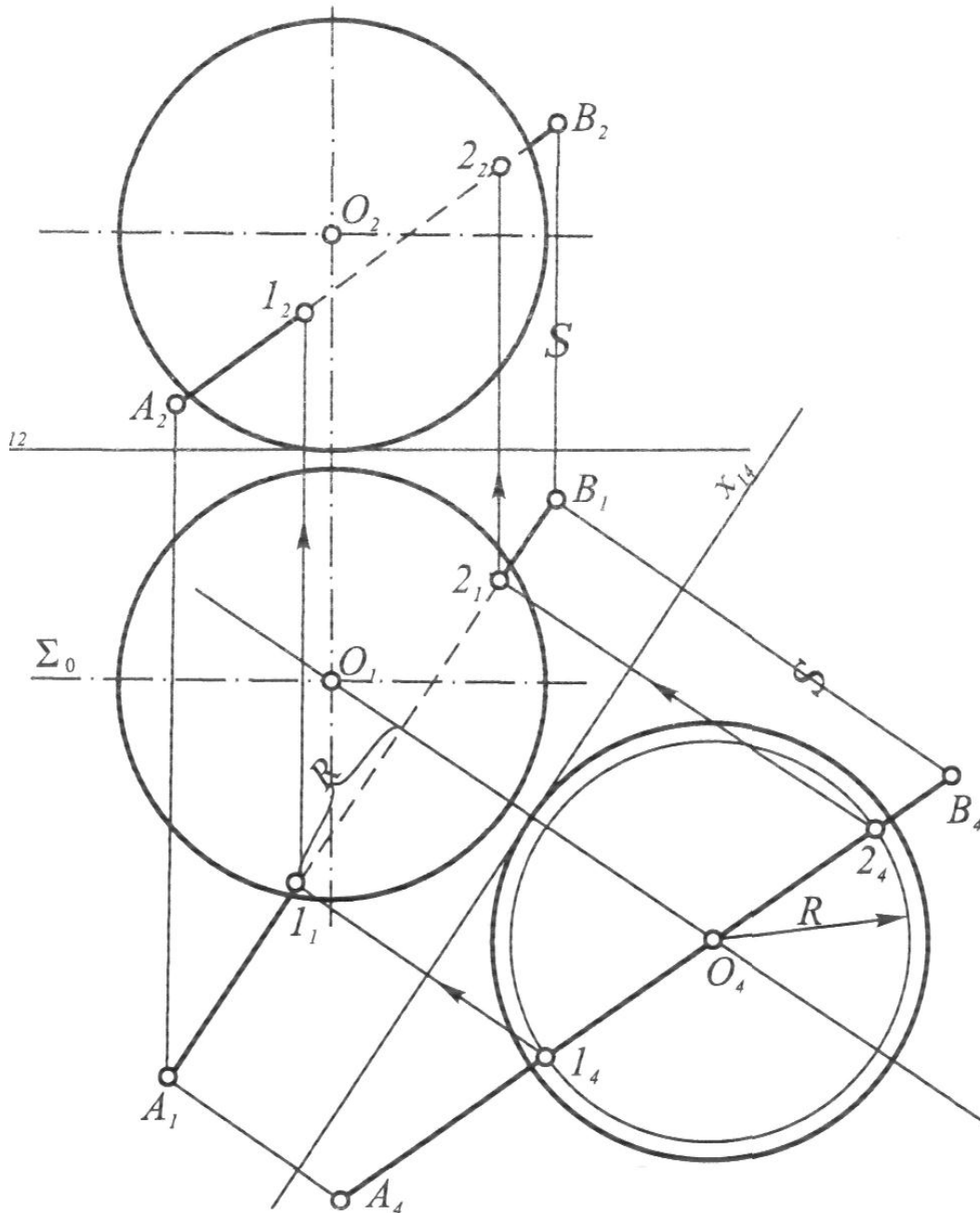


Рис. 4.3. Побудова точок перетину сфери з прямою загального положення.

#### 4.2. Перетин кривої поверхні з площиною, конічні перерізи

На рис. 4.4 показано перетин прямого циліндра обертання площиною  $\Gamma$ , заданою слідами. При такому положенні циліндра і січної площини остання перетне циліндр по еліпсу, який на полі  $\Pi_1$ , збігатиметься з горизонтальною проєкцією циліндра. Визначемо найвищу та найнижчу точки еліпса, вони лежатимуть на великій осі еліпса, яка збігати-

меться з лінією найбільшого ухилу площини, що проходить через центр еліпса. Іншими словами, на полі  $\Pi_1$ , через центр горизонтальної проекції циліндра проведено лінію найбільшого ухилу перпендикулярно до горизонтального сліду площини. В перетині цієї лінії з поверхнею циліндра знайдено найнижчу точку 1 та найвищу – 2, які знаходимо на полі  $\Pi_1$ , а потім на полі  $\Pi_2$ , визначивши спочатку фронтальну проекцію лінії найбільшого ухилу. Мала вісь еліпса буде перпендикулярною на полі  $\Pi_1$  до великої осі, тобто лежатиме на горизонталі площини. В перетині її з поверхнею циліндра знайдено точки 3 та 4, переносимо їх на фронтальну проекцію малої осі. Щоб визначити крайню ліву та крайню праву точки еліпса, через вісь циліндра проводиться допоміжна фронтальна січна площина  $\Lambda$ , яка перетне площину по фронталі, а циліндр – по контурних твірних. Їх взаємний перетин визначить точки 5 та 6. Точки 7 та 8, будучи симетричними відносно великої осі точкам 5 та 6, визначаються на горизонталях відкладанням тих же відрізків.

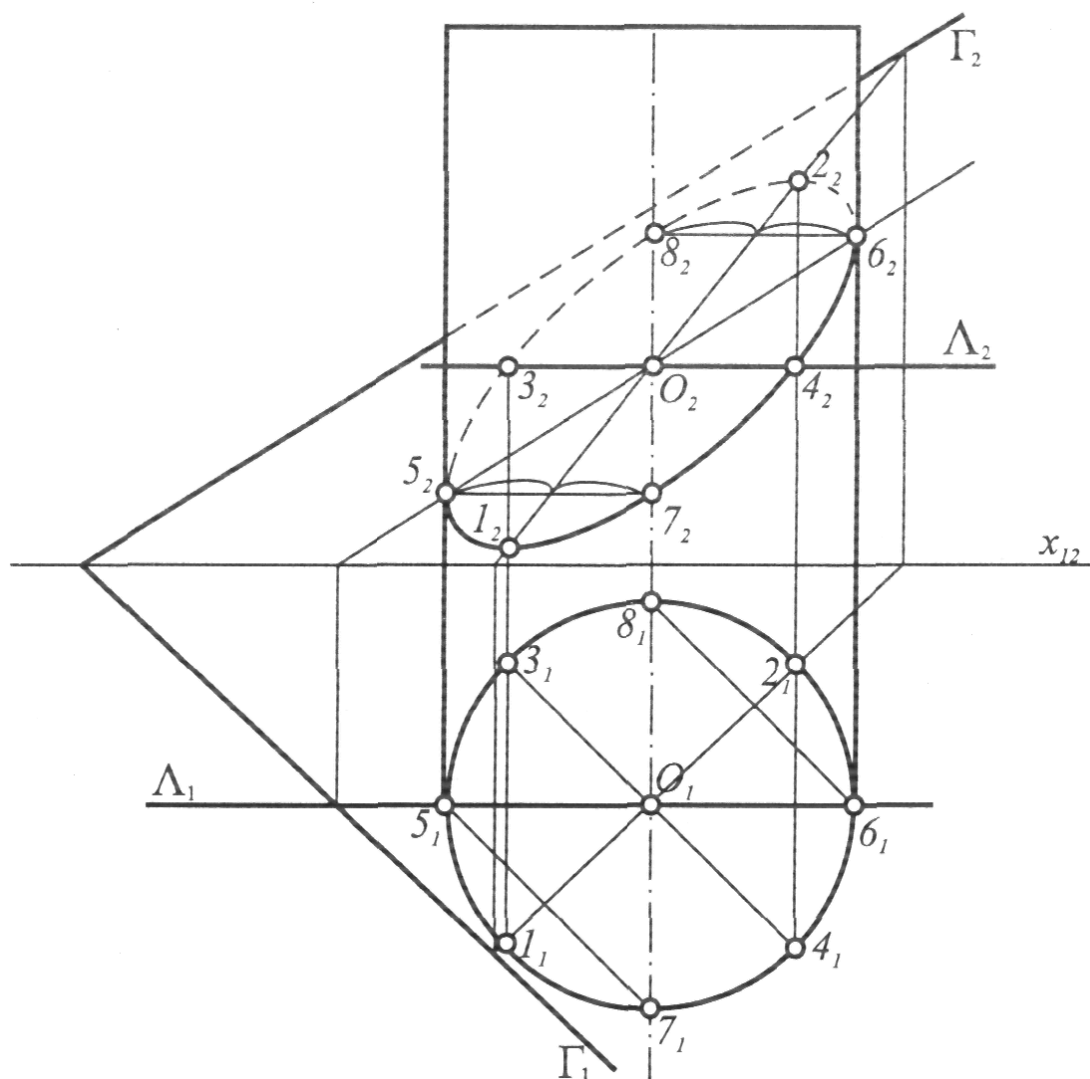


Рис. 4.4. Побудова точок перетину циліндра з площиною загального положення.

Рис. 4.5. ілюструє перетин сфери з площиною загального положення  $\Phi$ , заданою слідами. Як відомо, сфера перетинається з площиною по колу, проекції якого зображатимуться в площині загального положення еліпсами. Для визначення характерних точок перерізу доцільно замінити одну з площин проекцій, щоб поставити січну площину у проєкціююче положення. Нову вісь  $x$ , вибрано перпендикулярно горизонтальному сліду. На фронтальному сліді взято довільну точку  $A$  і знайдено її нову проєкцію  $A_4$ , яка разом з

точкою  $B_4$  визначить положення січної площини. Зразу визначаються найвища  $1_1$  та найнижча  $2_1$  точки перерізу, які, як і в попередньому прикладі, лежатимуть на лінії найбільшого ухилу площини. Далі будеться друга вісь проекції кола, яка проходитиме через середину першої, на цій осі лежатимуть точки 3 та 4, які знайдуться на колі, яке проводиться через середину осі 1-2 паралельно площині  $\Pi_1$ . Щоб визначити точки 5 та 6 на горизонтальному обрисі сфери на полі  $\Pi_1$ , через центр сфери на полі  $\Pi_4$  – точку  $O$ , – проводиться січна площина, паралельна площині  $\Pi_1$ . Точки 7 та 8 визначаються, враховуючи симетрію відносно осей еліпса.

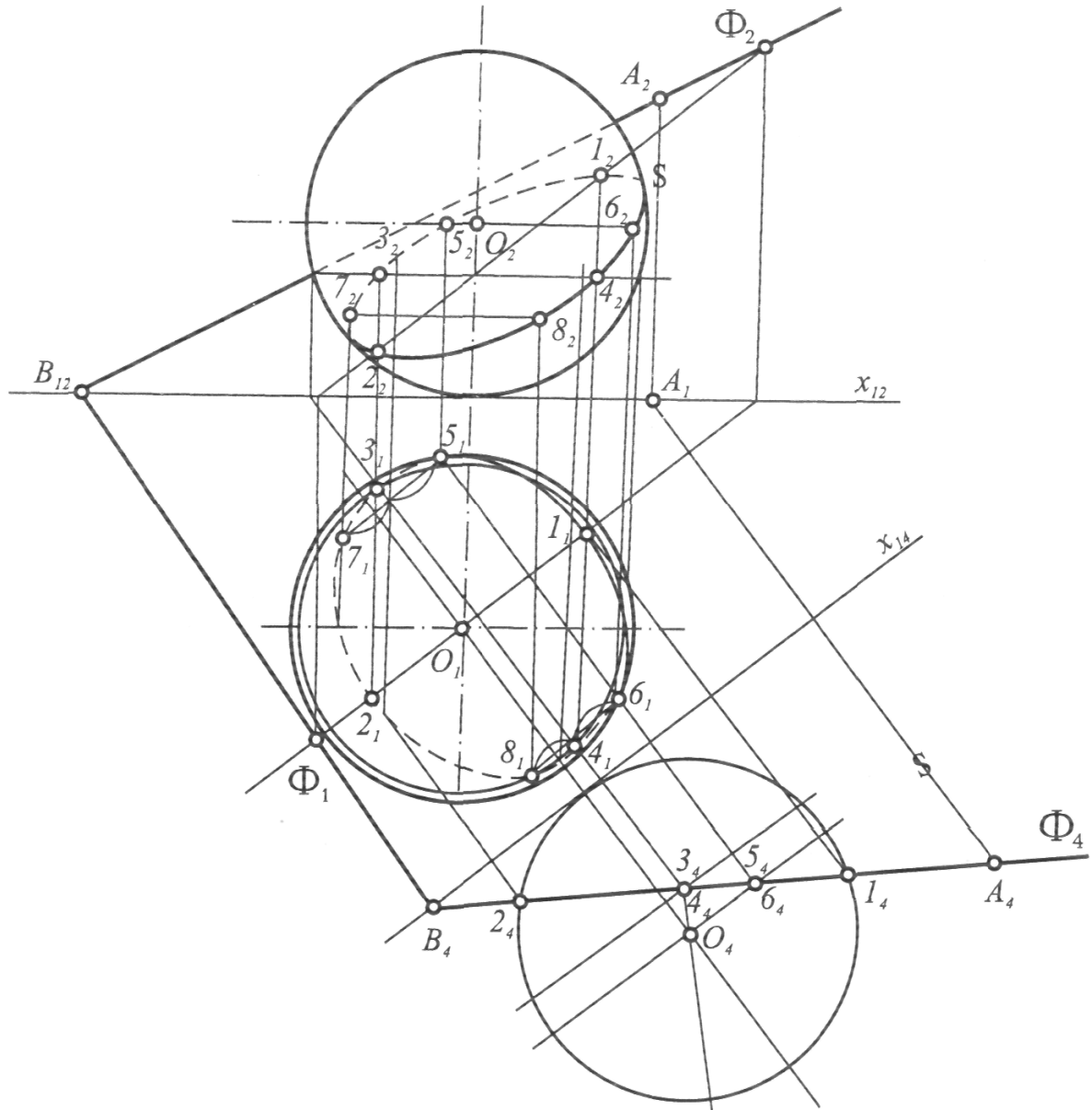


Рис. 4.5. Побудова точок перетину сфери з площиною загального положення.

На рис. 4.6 показано переріз прямого кругового конуса площиною загального положення  $\Gamma$ , заданою слідами. Для розв'язання задачі використане косокутне допоміжне проєкціювання на поле  $\Pi_1$  у напрямі фронтального сліду площини. При цьому площина спроекціюється своїм горизонтальним слідом, а конус – новою фігурою, утвореною дотичними з точки  $\bar{S}_1$  до кола основи. Основа конуса на  $\Pi_1$  поділена на 8 рівних частин, через які проведені твірні конуса. Основи твірних з'єднуються з допоміжною проєкцією вершини конуса. В перетині косокутних проєкцій цих твірних із косокутною проєкцією площини визначаються допоміжні проєкції точок перерізу, які повертаються у зворотному напрямі



на поля  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ . При даному положенні січної площини, яка перетинає всі твірні і не перпендикулярна до осі конуса, результатом плоского перерізу конуса буде еліпс. Але це не єдино можливий вид плоского перерізу конуса. Як вже зазначалося вище, при перетині конуса площиною можна отримати всі криві 2-го порядку, які ще називаються **конічними перерізами**. Крім еліпса, в результаті перетину конуса обертання площиною, перпендикулярною до осі, можна отримати коло. Якщо січна площина паралельна одній твірній конуса, матимемо параболу, а якщо двом – то гіперболу.

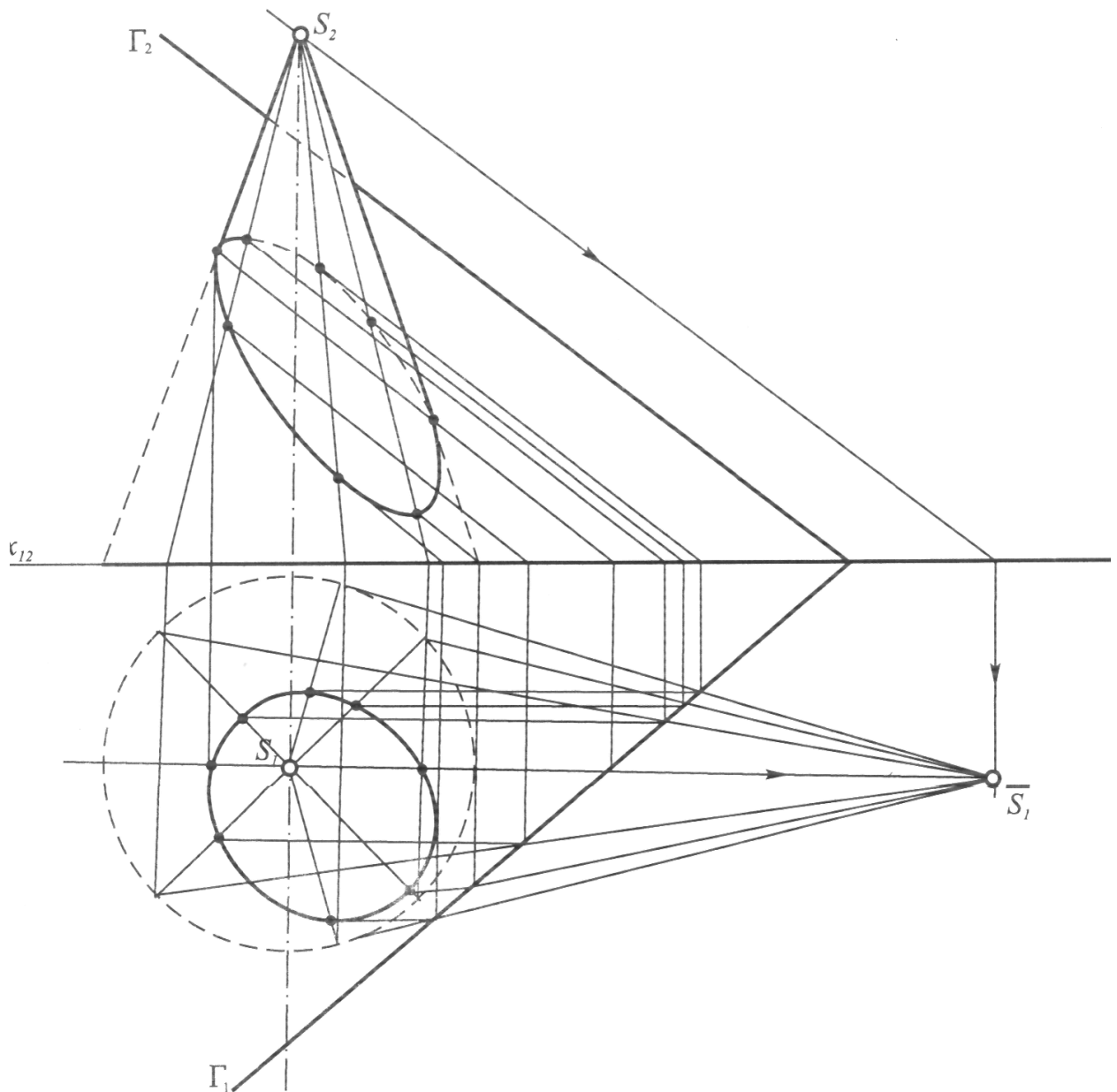


Рис. 4.6. Побудова точок перетину конуса з площиною загального положення.

На рис. 4.7 показано переріз прямого кругового конуса по параболі. Січна площина  $\Gamma$  паралельна правій контурній твірній конуса. Вища точка 1 параболі знайдеться на перетині січної площини  $\Gamma$  з лівою контурною твірною конуса, точки 2 та 3 в основі конуса – на перетині площини  $\Gamma$  з площиною основи. Щоб знайти довільні точки 4 та 5 в будь-якому горизонтальному перерізі площиною  $\Lambda$ , визначають радіус перерізу, яким на полі  $\Pi_1$  проводять коло, по ньому визначаються ці дві точки в перетині площин  $\Gamma$  та  $\Lambda$ . Щоб знайти натуральну величину фігури перерізу, його суміщують з горизонтальною площи-

ною проекцій обертанням навколо фронтально-проекціюючої прямої 2-3. Побудова зрозуміла з рисунка.

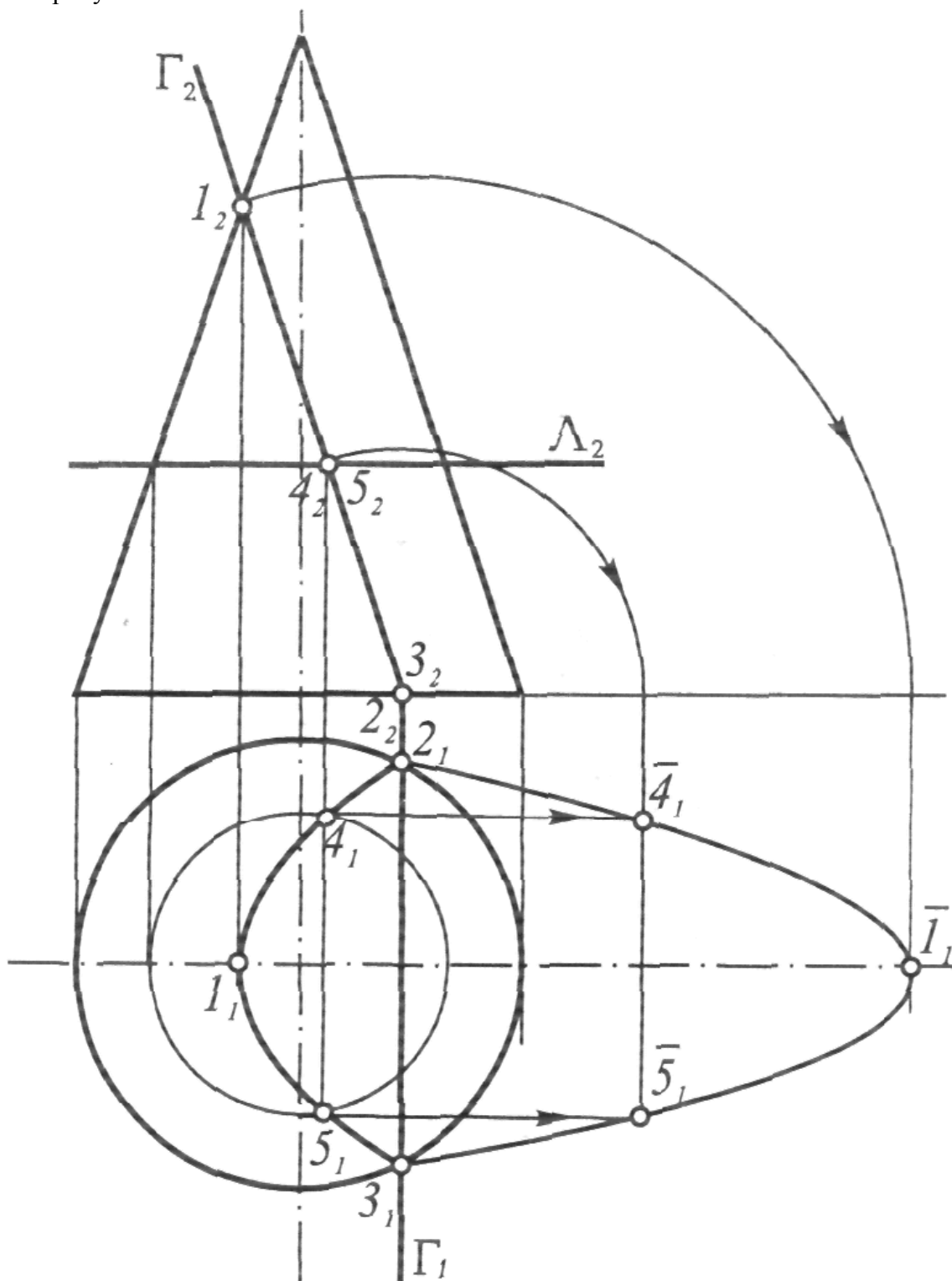


Рис. 4.7. Переріз прямого кругового конуса по параболі.

На рис. 4.8 показано переріз прямого кругового конуса по гіперболі фронтальною площиною  $\Phi$ , ця площина паралельна двом контурним твірним конуса на  $\Pi_2$ . Точки 1 та 2, що лежать в основі конуса, визначаються безпосередньо. Для знаходження вищої точки 3 на полі  $\Pi_1$  з центру проекції проводиться коло, дотичне до січної площини  $\Phi$ . За допомогою вертикальної лінії зв'язку це коло визначається на полі  $\Pi_2$ , і на ньому лежатиме вища точка. Дві проміжні точки 4 та 5 знайдуться за допомогою допоміжного перерізу

горизонтальною площиною  $\Lambda$ , яка перетне конус по колу певного радіуса, перетин його на полі  $\Pi_1$ , з січною площиною і визначить ці точки. На полі  $\Pi_2$  контурні твірні конуса відіграватимуть роль асимптот. Друга вітка цієї гіперболи утвориться, якщо продовжити конус вгору (тобто задати його другу полу).

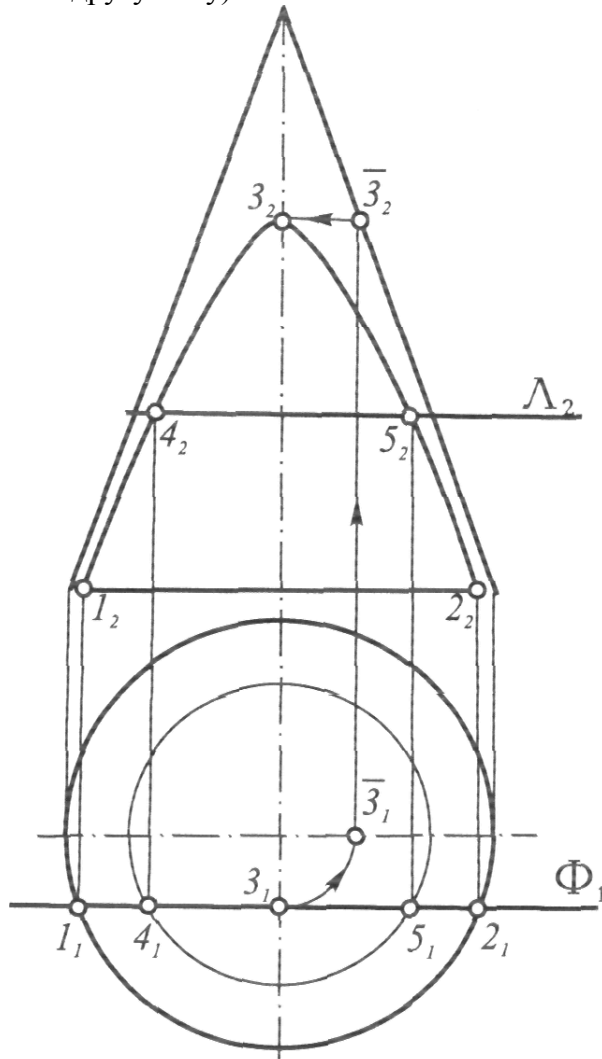


Рис. 4.8. Переріз прямого кругового конуса по гіперболі фронтальною площиною  $\Phi$

#### 4.3. Взаємний перетин кривих поверхонь

При конструюванні складних форм у машинобудуванні чи будівництві виникає потреба у визначенні ліній перетину (переходу) простих форм, які утворюють складні форми. Для визначення цієї лінії треба знайти проекції точок, спільних для поверхонь, що перетинаються. Це можна зробити двома способами: 1) **перетворенням проекцій, наприклад заміною площин проекцій**, або 2) **за допомогою допоміжних перерізів**.

При першому способі обидві поверхні, що перетинаються, перетворюються таким чином, щоб хоч одна з них зайняла проєкціююче положення, визначивши лінію взаємного перетину, повертають її на основні проєкції. При другому, більш універсальному способі, криві поверхні перетинаються третьою поверхнею або площиною, яку називають **посередником**. Дві лінії, які утворяться від перетину  $k$  та  $l$ , перетинаючись, визначають точки шуканої лінії взаємного перетину. Виконавши таку операцію кілька разів, визначають потрібну кількість точок шуканої лінії взаємного перетину. При побудові ліній взаємного перетину та визначенні видимості особливе значення мають характерні точки цієї лінії, до яких належать точки на контурних твірних, найвищі та найнижчі. Лінія взаємного перетину може бути плоскою або просторовою.

**Можливі чотири випадки взаємного перетину двох кривих поверхонь 2-го порядку:**

1. Частковий (**врізання**), в цьому випадку лінія взаємного перетину являє собою одну замкнену просторову криву (рис. 4.9.1).

2. Повний (**проникнення**), коли просторова лінія перетину має дві гілки або розпадається на дві плоскі криві (рис. 4.9.2).

3. **Односторонній внутрішній дотик**, коли поверхні, що перетинаються, мають в одній точці спільну дотичну площину. Крива взаємного перетину перетинається сама з собою в цій точці дотику (рис. 4.9.3).

4. **Взаємний перетин по двох плоских кривих**, коли має місце подвійний дотик, в цьому разі поверхні мають дві спільні дотичні площини (рис. 4.9.4).

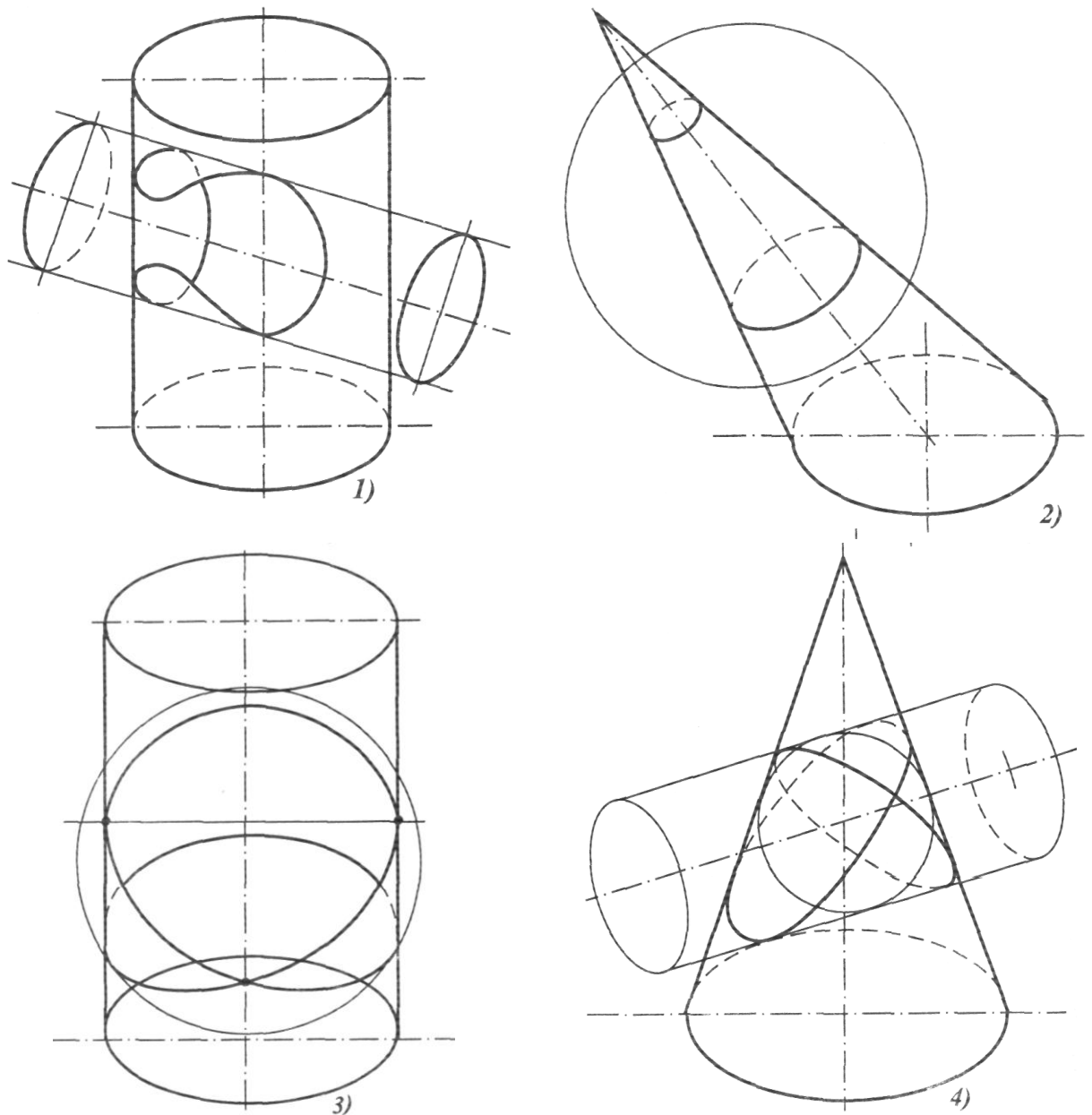


Рис. 4.9. Зображення чотирьох випадків взаємного перетину двох кривих поверхонь.

На рис. 4.10 показано взаємний перетин двох циліндрів обертання, коли один з них знаходиться у проєкціюючому положенні (вертикальному), а другий – профільно-проєкціюючому. В даному випадку має місце перший випадок взаємного перетину, або врізання. Просторова крива, яка на  $\Pi_1$  збігається з проєкцією вертикального циліндра, визна-

чається за окремими точками. Точки 1 та 2 належать задній твірній горизонтального циліндра. Точки 3, 5 та 4, 6 належать верхній та нижній твірним горизонтального циліндра, які на  $\Pi_1$  збігаються. Для визначення точок, які лежать на контурних та передній твірній вертикального циліндра, треба зв'язати проекції твірних горизонтального циліндра. Найпростіше це зробити, перетнувши горизонтальний циліндр фронтально-проекціюючою площиною, нахиленою до  $\Pi_1$  під кутом  $45^\circ$ . В результаті перетину утвориться еліпс, який на полі  $\Pi_1$  зобразиться колом. Тепер через передню твірну вертикального циліндра проводимо допоміжну фронтальну січну площину  $\Gamma$ , що перетне еліпс у двох точках, які знаходимо на фронтальній проекції еліпса, а за ними дві твірні, які перетинаючись з передньою твірною вертикального циліндра, дадуть точки 7 та 8. Для визначення точок на контурних твірних вертикального циліндра через них проведено фронтальну січну площину  $\Lambda$ , яка визначить дві твірні, фронтальні проекції яких на полі  $\Pi_2$ , перетинаючись з контурними твірними, дадуть чотири точки: 9, 10, 11, 12. За знайденими точками будувється просторова крива, після чого визначається її видимість. Видимою буде лише той відрізок кривої, який утворюється в результаті перетину двох видимих ділянок поверхонь.

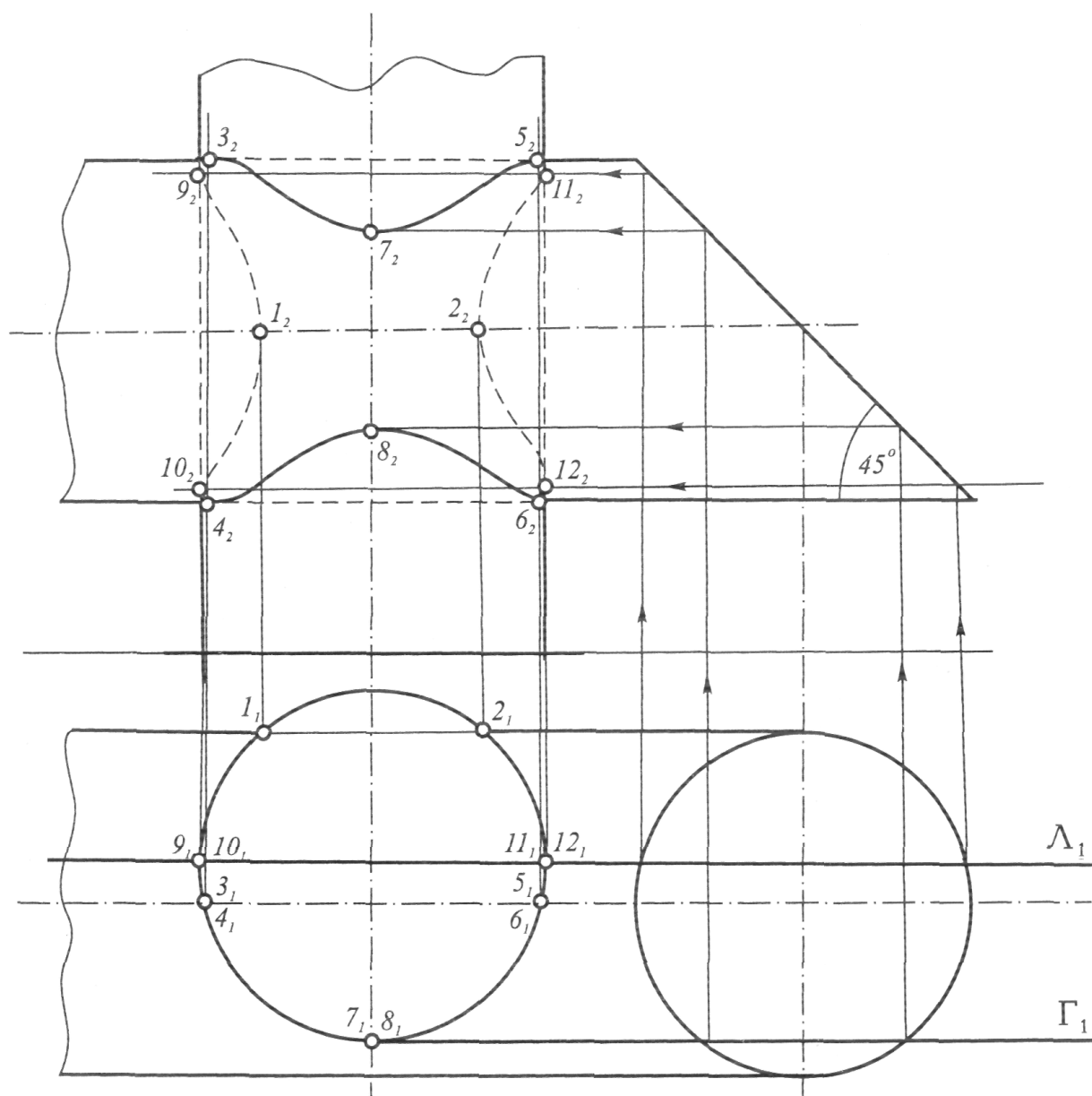


Рис. 4.10. Побудова лінії взаємного перетину двох циліндрів.

Другий випадок взаємного перетину має місце на рис. 4.11, на якому перетинаються конус обертання та фронтально-проекціюючий півциліндр. Для визначення просторової лінії взаємного перетину доцільно скористатися горизонтальними січними площинами  $\Phi$  та  $\Gamma$ , які перетинатимуть конус по колах відповідних радіусів, а циліндр – по двох твірних, крім верхньої дотичної площини  $\Lambda$ , яка визначить найвищі точки 1 та 2 кривої. Побудова зрозуміла з рисунка.

Третій випадок взаємного перетину, або односторонній внутрішній дотик, має місце на рис. 4.12, де перетинається вертикальний циліндр, дотичний до півкулі в точці 1. Для визначення точок лінії взаємного перетину доцільно скористатися фронтальними січними площинами  $\Gamma, \Lambda, \Phi, \Sigma$ , які перетинатимуть півсферу по півколах, а циліндр – по твірних. Взаємоперетин кривої відбуватиметься в точці дотику 1. Вся крива мала б місце, якби вертикальний циліндр перетинався не з півкулею, а з кулею, при цьому площина основи півкулі була б площиною симетрії.

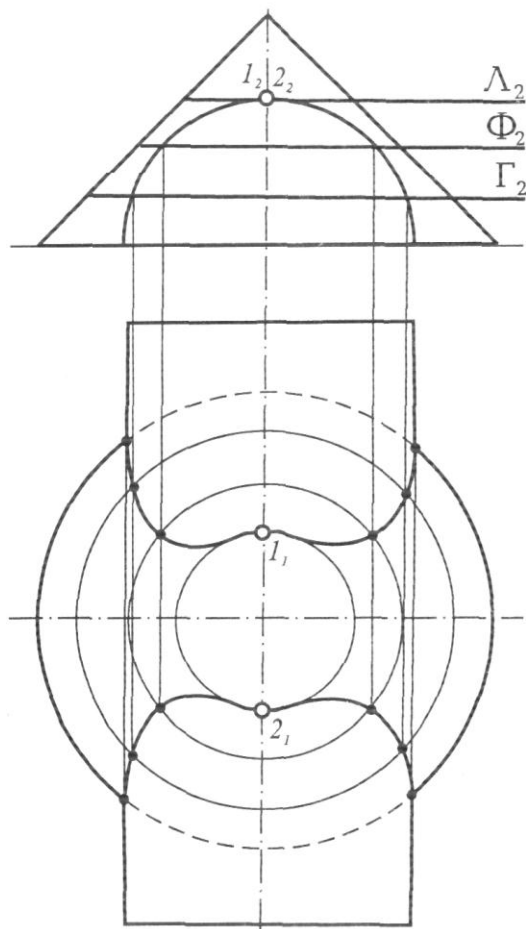


Рис. 4.11. Побудова лінії перетину конуса обертання та фронтально-проекціюючого півциліндра.

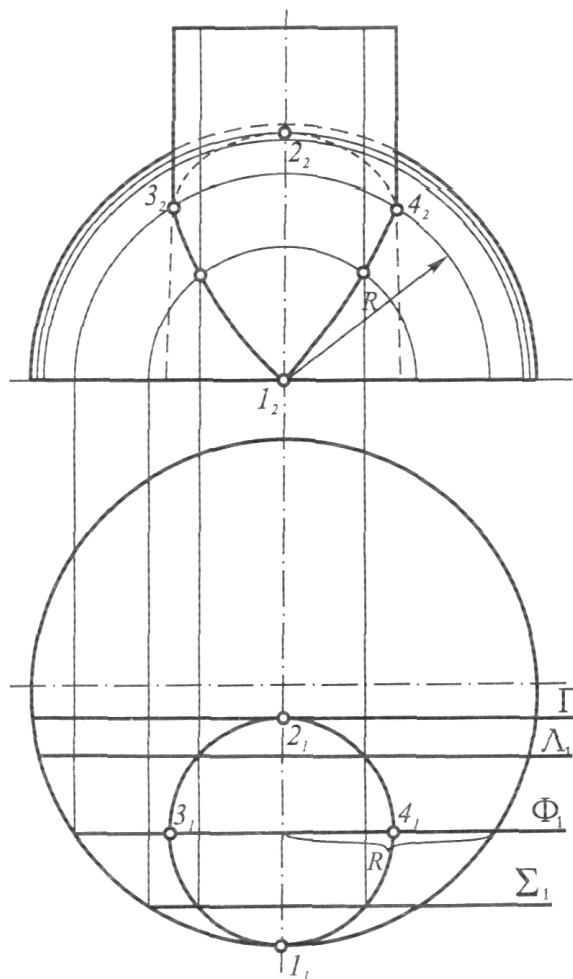


Рис. 4.12. Побудова лінії перетину вертикального циліндра, дотичний до півкулі в точці 1.

Четвертий випадок взаємного перетину має місце на рис. 4.13, де обидві поверхні другого порядку (циліндр і конус) описані навколо третьої поверхні другого порядку – сфери. В цьому випадку, за теоремою Г. Монжа, просторова крива розпадається на дві плоскі криві, – в даному випадку – на два еліпси. Побудова кривих зрозуміла з рисунка.

Просторова крива взаємного перетину двох поверхонь 2-го порядку розпадається на дві плоскі криві і в тому випадку, коли вони мають одну спільну основу у вигляді кривої 2-го порядку. На рис. 4.14 зображено еліптичний циліндр та конус, які мають спільну основу у вигляді кола, друга крива перетину також буде плоскою – еліпсом.

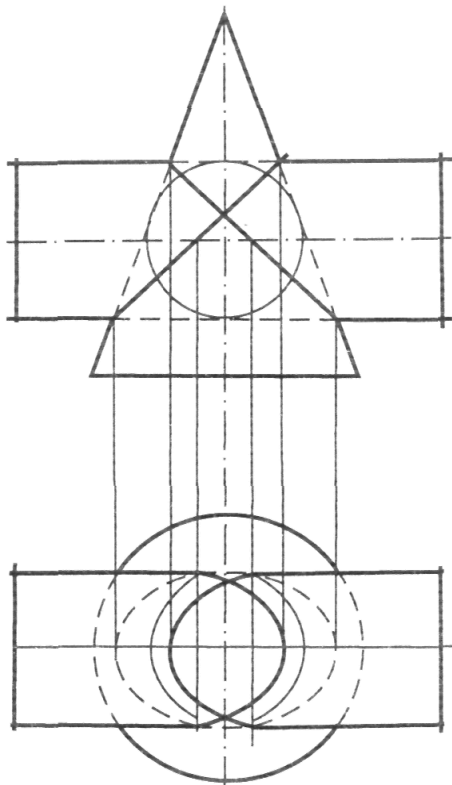


Рис. 4. 13. Побудова лінії перетину циліндра і конуса описані навколо третьої поверхні другого порядку – сфери.

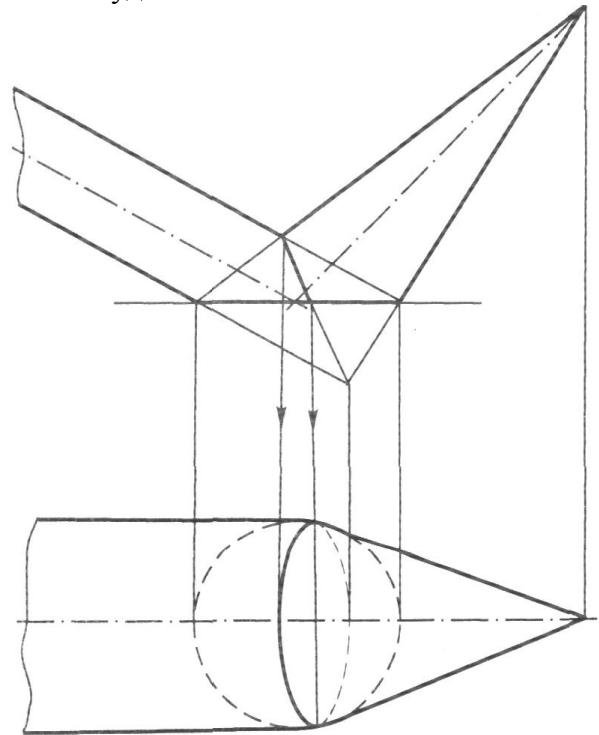


Рис. 4.14. Побудова лінії перетину циліндра та конуса, які мають спільну основу у вигляді кола.

Як допоміжну поверхню-посередник можна брати не тільки площини, ними можуть бути і криві поверхні, зокрема сферичні. Для цього необхідні певні умови: поверхні обертання мають бути розташовані так, щоб перетиналися їх осі, які, в свою чергу, повинні бути паралельні  $\Pi_1$  чи  $\Pi_2$ .

На рисунку 4.15 перетинаються два кругові циліндри – один профільно-проекціюючий, а другий розташований фронтально. Оскільки осі циліндрів перетинаються і паралельні полю  $\Pi_2$ , можна скористатися способом концентричних сфер. Крива взаємного перетину почнеться в крайній лівій точці 1 та закінчиться в крайній правій – 2. За центр концентричних сфер візьмемо точку 0, в якій перетинаються осі циліндрів. З точки 0, як з центру, проводимо кілька сфер, що перетинатимуть обидва циліндри між точками 1 та 2.

Кожна сфера перетне циліндр по колах, які зображатимуться своїми діаметрами у вигляді прямих. Перетин цих кіл і визначить дві точки лінії взаємного перетину, які належать одній фронтально-проекціюючій прямій. Так знайдено три точки – 3,4,5. За цими точками проводимо криву. Для визначення горизонтальної проекції кривої проекційно зв'язуємо обидві проекції тим же методом, який було використано на рис. 4.10, тобто перетинаємо поздовжній циліндр на полі  $\Pi_2$ , фронтально-проекціюючою площиною під кутом  $45^\circ$ .

Скористаємося допоміжною горизонтальною площиною  $\Gamma_2$ , що перетне поздовжній циліндр по двох твірних, які знайдемо на полі  $\Pi_1$ . На ці твірні за вертикальною відповідністю зносимо чотири точки 7, 8, 9, 10, які утворилися при перетині знайденої

кривої площиною  $\Gamma$ . Точки на контурних твірних 6 та 11 похилого циліндра на полі  $\Pi_1$  знайдуться на перетині кривої на полі  $\Pi_2$  з віссю похилого циліндра, з якою збігаються передня і задня твірні цього циліндра.

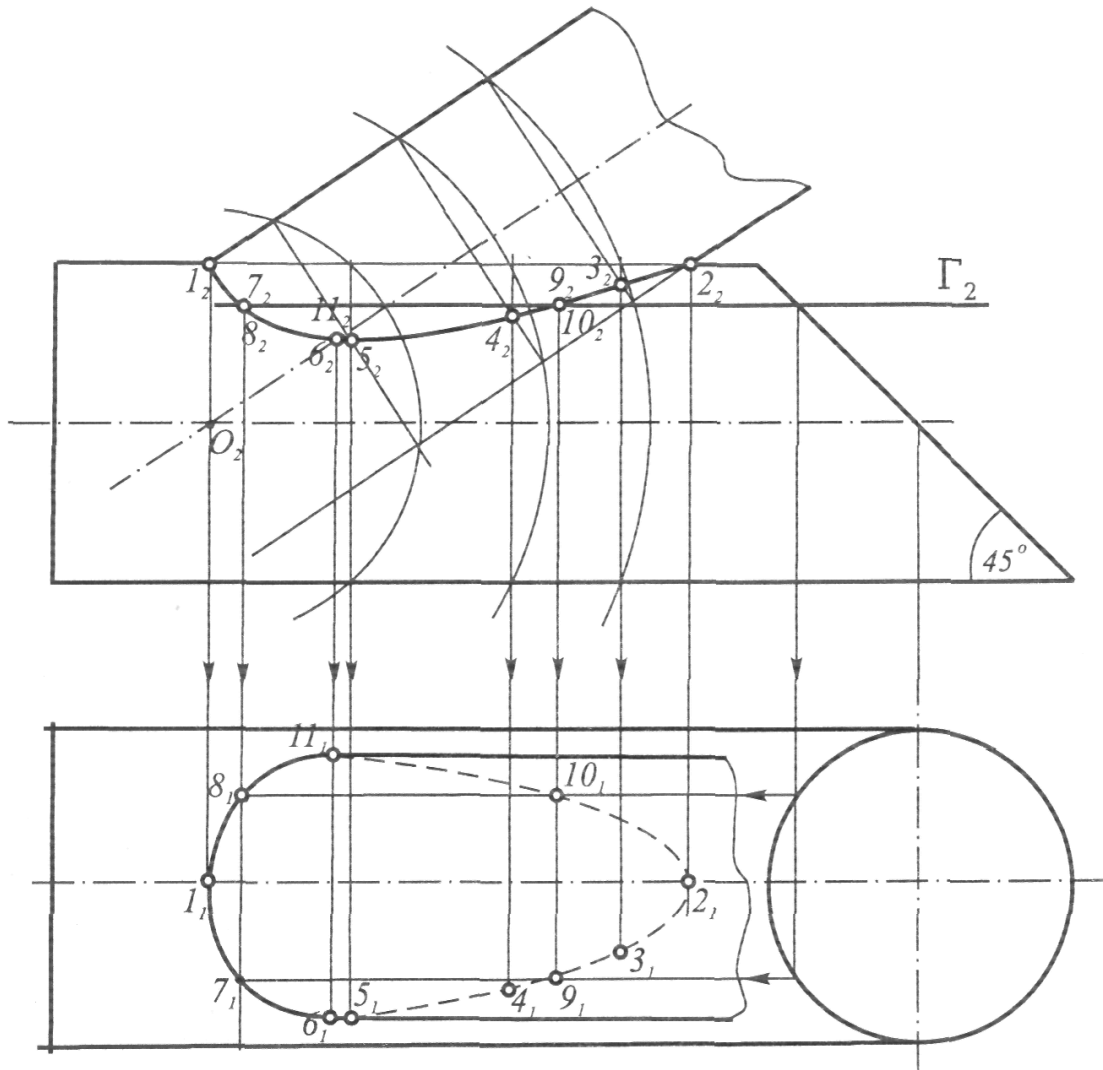


Рис. 4.15. Побудова лінії перетину двох циліндрів.

#### 4.4. Перетин кривих поверхонь із багатогранниками

Побудова ліній взаємного перетину суттєво спрощується, коли одна з поверхонь, які перетинаються, знаходиться в проєкціюючому положенні, в цьому випадку одна проєкція шуканої лінії збігається з проєкцією цієї поверхні і за нею треба знайти другу проєкцію. Для визначення точок, що належать лінії перетину, найчастіше використовують проєкціюючі допоміжні площини.

На рис. 4.16 півсфера перетинається з правильною чотиригранною призмою. На горизонтальній проєкції лінія взаємного перетину збігається з проєкцією призми, вона складатиметься з чотирьох однакових дуг кола. На рисунку через ліву передню грань призми проведено горизонтально-проєкціюючу площину  $\Gamma$ , яка перетне півсферу по півколу 1-3-2, що на полі  $\Pi_2$  зобразиться півеліпсом. Точки  $1_2$  та  $2_2$  визначаються за вертикальною відповідністю. Для знаходження найвищої точки 3 через середину лівої грані проведено горизонтально-проєкціюючу площину  $\Lambda$ , яка перетне півсферу по півколу, а ліву грань призми – по прямій. Повернувши цю площину разом з прямою та кривою на  $45^\circ$  до фронтального положення, знайдемо на полі  $\Pi_2$  повернуту проєкцію найвищої



точки –  $\bar{3}_2$ . Повертаємо назад цю точку до перетину з серединною прямою лівої грані. Точка 4 знайдеться на перетині лівого ребра призми з фронтальним меридіаном півсфери на полі  $\Pi_2$ . Інші три точки лежатимуть в цій же горизонтальній площині, оскільки поверхні, що перетинаються, мають дві площини симетрії.

Перетин фронтально-проекціюючого циліндра з правильною чотиригранною зрізаною пірамідою показано на рис. 4.17. Лінії взаємного перетину являтимуть собою дві просторові симетричні криві, складені з двох відрізків еліпсів. Для визначення точок цих еліпсів проведено серію горизонтальних січних площин (на рисунку – три площини  $\Gamma, \Lambda, \Phi$ ). Так, для визначення найвищих точок еліпсів проведено горизонтальну січну площину  $\Phi$  через верхню твірну циліндра, що перетне піраміду по відповідному квадрату, перетин якого з верхньою твірною визначить на ній дві точки. Для знаходження нижніх точок еліпсів так само проведено горизонтальну січну площину  $\Lambda$ . Для визначення точок, що лежать на контурних твірних циліндра, на полі  $\Pi_2$  через них проведено горизонтальну січну площину  $\Gamma$ . На рис. 4.17 за допомогою горизонтальних січних площин знайдено ще проміжні точки еліпсів

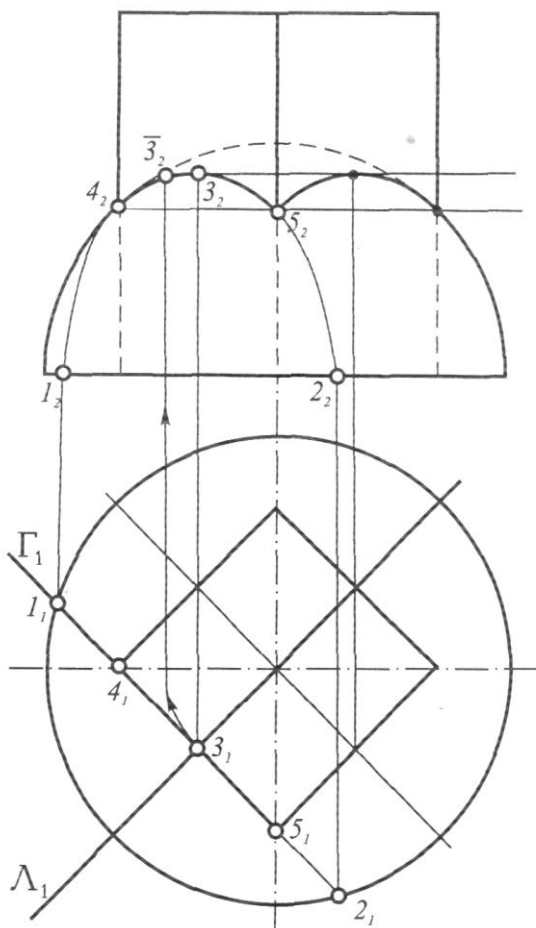


Рис. 4.16. Побудова лінії перетину сфери з чотиригранною призмою.

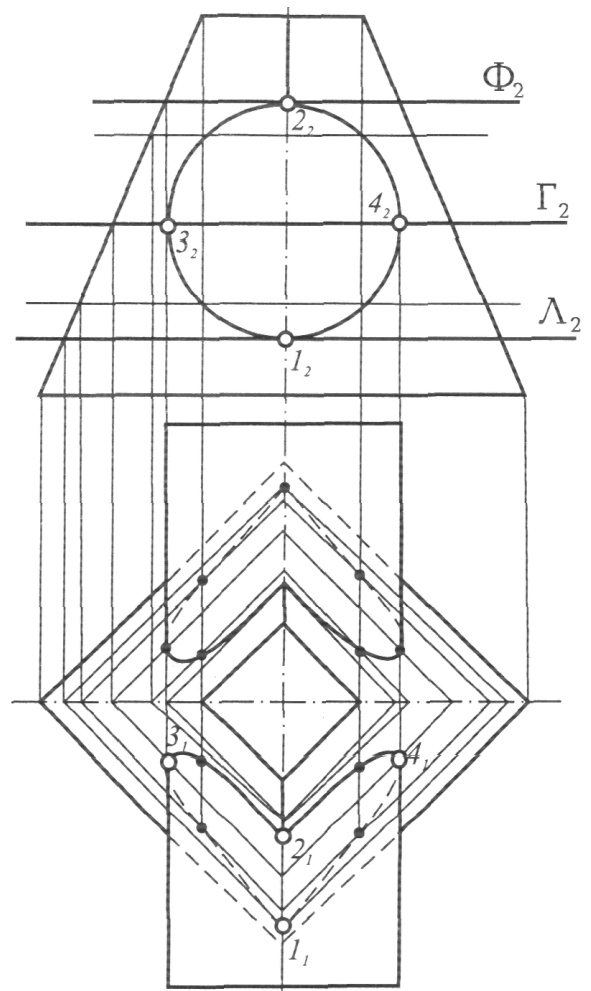


Рис. 4.17. Побудова лінії перетину фронтально-проекціюючого циліндра з правильною чотиригранною зрізаною пірамідою.

На рис. 4.18 показано побудову ліній взаємного перетину півсфери з фронтально-проекціуючою тригранною призмою. Верхня грань призми перетне півсферу по колу радіуса  $R$ , а похилі грані перетнуть її по півколах, які на полі  $\Pi_1$  зобразяться півеліпсами. Відрізки цих півеліпсів і складатимуть разом із дугою кола радіуса  $R$  лінію входу та лінію виходу.

Перетин прямого кругового конуса з чотиригранною фронтально-проекціуючою призмою показано на рис. 4.19. Дві лінії взаємного перетину складаються з двох дуг кіл радіусів  $R^1$  та  $R^2$  і відрізків гіперболи, по яких профільні грані призми перетнуть конус. Проведено дві горизонтальні січні площини  $\Sigma, \Omega$ , що визначили радіуси кіл. Для знаходження гіпербол, які лежать у профільних площинах, побудовано профільну проекцію поверхонь, що перетинаються. Через ліву профільну грань призми проведено профільну січну площину  $\Gamma$ , яка перетне поверхню конуса по гіперболі. Нижні точки гіперболи 1 та 2 лежатимуть на перетині профільної площини з колом основи, а найвища точка 3 визначиться на полі  $\Pi_2$ . Проміжні точки 4, 5, 6, 7 знайдуться на перетині площин  $\Sigma, \Omega$  з площиною  $\Gamma$ . Таким чином, дві симетричні лінії взаємного перетину складатимуться з двох дуг горизонтальних кіл та відрізків гіпербол, що лежать у профільних площинах.

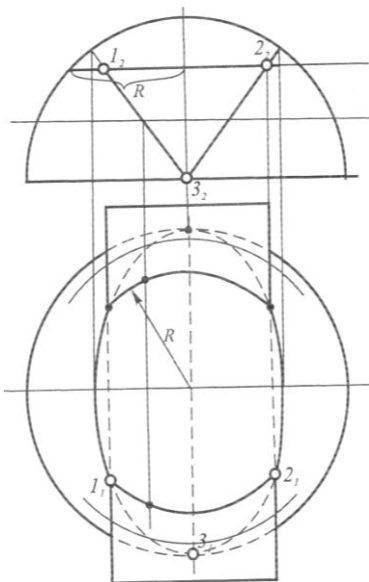


Рис. 4.18. Побудова лінії перетину півсфери з фронтально-проекціуючою тригранною призмою.

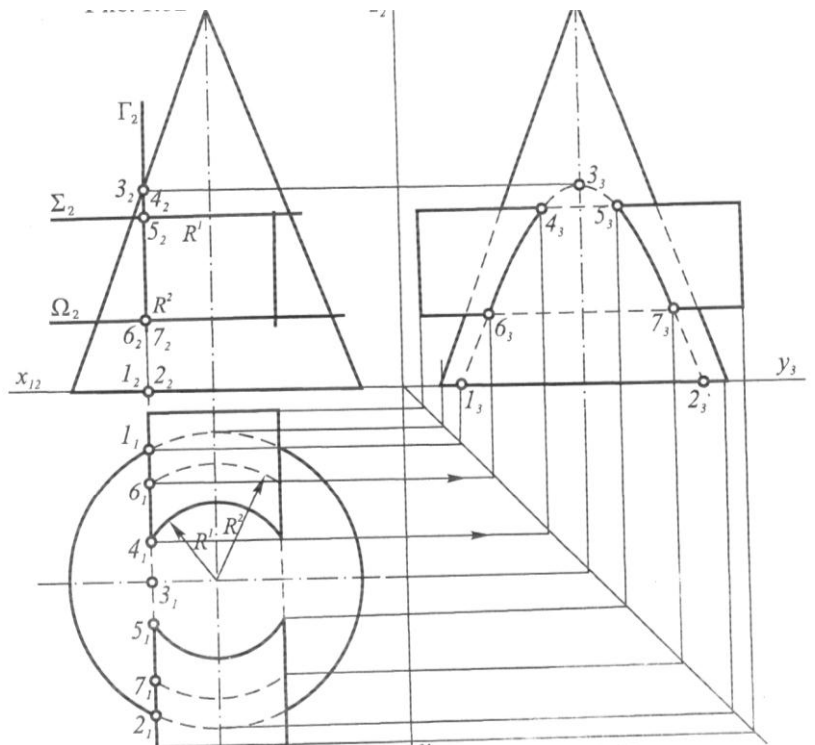


Рис. 4.19. Побудова лінії перетину прямого кругового конуса з чотиригранною фронтально-проекціуючою призмою.

#### Запитання та вправа для самоперевірки

1. В яких випадках при перетині кривих поверхонь із прямою лінією доцільно використовувати допоміжне проєкціювання, а в яких – спосіб допоміжних перерізів?
2. У чому полягає суть спрощення при побудові лінії взаємного перетину двох поверхонь, якщо одна з поверхонь проєкціуюча?
3. Який спосіб є найбільш доцільним при розв'язанні задачі на взаємний перетин прямого кругового конуса з вертикальною віссю та сфери?
4. Два еліптичних конуси мають спільне горизонтальне коло основи. Задати їх так, щоб другою кривою взаємного перетину була парабола.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ №4

1. Побудувати точки перетину прямої  $AB$  з конусом з вершиною  $S$  та діаметром основи 6 од. за заданими координатами (табл. 4.1).
2. Побудувати перетин циліндра діаметром 50 мм з центром основи  $O(30,30,0)$  площиною заданою слідами з точки  $O$  кути нахилу до осі  $X_1 = \alpha$ , до осі  $X_2 = \beta$  (табл. 4.1).
3. Побудувати лінію взаємного перетину двох циліндрів, діаметри яких  $D_1$  і  $D_2$  мм розміщених під кутом  $90^\circ$  (табл. 4.1).
4. Побудувати лінію взаємного перетину двох циліндрів, діаметри яких  $D_1$  і  $D_2$  мм розміщених під кутом  $\alpha$  (табл. 4.1).

**Таблиця 4.1 – Значення параметрів**

| Варі-<br>ант | № завдання |         |         |          |         |  |       |       |          |       |       |
|--------------|------------|---------|---------|----------|---------|--|-------|-------|----------|-------|-------|
|              | 1          |         |         | 2        |         |  | 3     |       | 4        |       |       |
|              | A          | B       | S       | $\alpha$ | $\beta$ |  | $D_1$ | $D_2$ | $\alpha$ | $D_1$ | $D_2$ |
| 1            | (3,2,4)    | (3,0,4) | (3,2,7) | 45       | 30      |  | 30    | 76    | 30       | 48    | 30    |
| 2            | (3,2,4)    | (2,2,2) | (4,2,6) | 60       | 45      |  | 35    | 73    | 45       | 53    | 35    |
| 3            | (5,2,4)    | (1,2,4) | (3,6,5) | 49       | 50      |  | 41    | 88    | 50       | 72    | 41    |
| 4            | (3,2,5)    | (3,2,4) | (3,6,6) | 37       | 45      |  | 48    | 37    | 45       | 76    | 48    |
| 5            | (6,3,-4)   | (3,2,4) | (4,2,7) | 33       | 60      |  | 53    | 52    | 60       | 73    | 53    |
| 6            | (3,2,4)    | (5,2,4) | (1,2,6) | 36       | 49      |  | 72    | 45    | 49       | 88    | 72    |
| 7            | (4,2,4)    | (3,2,5) | (0,2,5) | 48       | 37      |  | 76    | 44    | 37       | 37    | 76    |
| 8            | (3,6,4)    | (6,3,4) | (3,0,6) | 54       | 33      |  | 73    | 26    | 33       | 52    | 73    |
| 9            | (3,6,4)    | (3,2,4) | (2,2,7) | 65       | 36      |  | 88    | 33    | 36       | 45    | 88    |
| 10           | (4,2,4)    | (4,2,4) | (1,2,5) | 67       | 48      |  | 37    | 39    | 48       | 44    | 37    |
| 11           | (1,2,4)    | (3,6,4) | (3,7,6) | 73       | 54      |  | 52    | 47    | 54       | 26    | 52    |
| 12           | (0,2,5)    | (3,6,4) | (2,2,7) | 75       | 65      |  | 45    | 62    | 65       | 33    | 45    |
| 13           | (3,0,4)    | (4,2,4) | (3,3,5) | 55       | 67      |  | 44    | 71    | 67       | 39    | 44    |
| 14           | (2,2,2)    | (1,2,4) | (6,2,7) | 47       | 73      |  | 26    | 74    | 73       | 47    | 26    |
| 15           | (1,2,4)    | (0,2,5) | (3,3,5) | 43       | 75      |  | 33    | 79    | 75       | 62    | 33    |
| 16           | (3,7,4)    | (3,0,4) | (3,2,6) | 42       | 55      |  | 39    | 93    | 55       | 71    | 39    |
| 17           | (2,2,4)    | (2,2,2) | (3,2,5) | 41       | 47      |  | 47    | 67    | 47       | 74    | 47    |
| 18           | (3,3,3)    | (1,2,4) | (5,2,7) | 75       | 43      |  | 62    | 74    | 43       | 79    | 62    |
| 19           | (6,2,4)    | (3,7,4) | (3,2,5) | 55       | 42      |  | 71    | 55    | 42       | 93    | 71    |
| 20           | (3,3,3)    | (2,2,4) | (6,3,6) | 47       | 41      |  | 74    | 30    | 41       | 37    | 74    |
| 21           | (4,4,4)    | (3,3,3) | (3,2,7) | 43       | 46      |  | 79    | 35    | 46       | 52    | 79    |
| 22           | (3,4,4)    | (6,2,4) | (4,2,3) | 42       | 49      |  | 93    | 41    | 49       | 45    | 93    |
| 23           | (2,2,4)    | (3,3,3) | (3,6,6) | 41       | 31      |  | 67    | 48    | 31       | 44    | 67    |
| 24           | (3,3,4)    | (2,2,4) | (3,6,6) | 46       | 38      |  | 74    | 53    | 38       | 26    | 74    |
| 25           | (5,2,4)    | (3,3,3) | (2,2,7) | 49       | 32      |  | 55    | 34    | 32       | 33    | 55    |

## Тема: Аксонометрія

**Мета роботи** – систематизація і закріплення знань щодо побудови геометричних фігури в ізометрії, прямокутній диметрії та косокутній фронтальній диметрії.

### Завдання для виконання роботи

1. Побудувати геометричні фігури в ізометрії, прямокутній диметрії.
2. Розв'язати в аксонометрії позиційні задачі.

### Порядок опрацювання завдань

**Місце проведення занять:** кафедра механізації (ауд.140а).

**Місце та час отримання консультації:** кафедра механізації (згідно з графіком).

**Обладнання та матеріали:** готовальня середніх розмірів, лінійка, косинці із кутами  $45^\circ$  та  $30^\circ$  і  $60^\circ$ , олівці "Конструктор" марки М, 2М, ТМ, Т (іноземного виробництва відповідно В, 2В, НВ, Н), кнопки, гумки.

**Форми підсумкового контролю:** захист практичних робіт.

### 5.1. Основні поняття. Класифікація.

Аксонометричною проекцією (аксонометрією) називається зображення, одержане паралельним проєкціюванням предмета, зв'язаного з просторовою прямокутною системою координат, на одну площину. Напрямок аксонометричного проєкціювання вибирають так, щоб зображувалися всі три виміри предмета. Якщо проєкціювальні промені перпендикулярні до площини проєкцій  $\Pi'$ , то аксонометрію називають прямокутною; не перпендикулярні – косокутною.

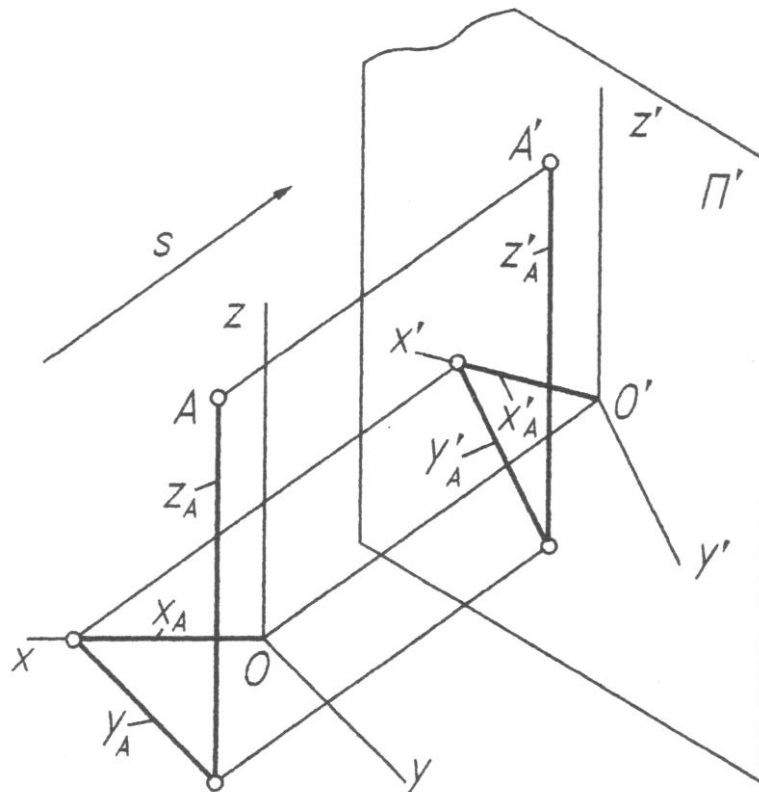


Рис. 5.1. Аксонометричне проєкціювання.

$\Pi'$  – площина аксонометричних проєкцій;

$S$  – напрям проєкціювання;

$x, y, z$  – осі прямокутної системи координат;

$x', y', z'$  – аксонометричні проєкції цих осей;

$u = \frac{x'_A}{x_A}$  – показник спотворення по осі  $x$ ;

$u = \frac{y'_A}{y_A}$  – показник спотворення по осі  $y$ ;

$u = \frac{z'_A}{z_A}$  – показник спотворення по осі  $z$ .

## 5.2. Прямокутна ізометрія (III)

На рис. 5.2 побудовано осі прямокутної ізометрії.

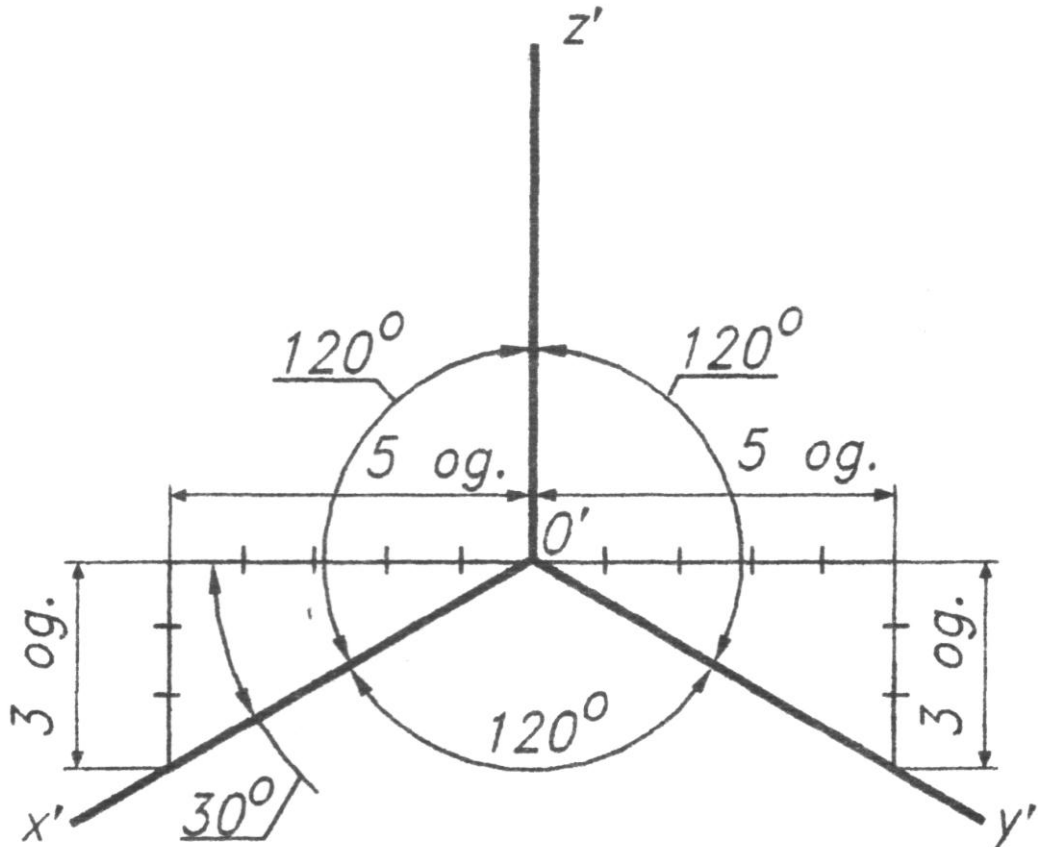


Рис. 5.2. Осі прямокутної ізометрії.

Кола діаметра  $d$ , що належать аксонометричним площинам  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ , зображаються у вигляді еліпсів. Еліпс має дві осі симетрії (рис. 5.3):  $AB$  – велика вісь еліпса.  $CD$  – мала вісь еліпса.

$$AB = 1,22d;$$

$$CD = 0,71d.$$

$$\text{Співвідношення } \frac{AB}{CD} = \frac{1,22}{0,71} = \frac{5}{3}.$$

Еліпси будуються наближено, як овали із чотирьох дуг, тому потрібно знайти 4 центри і величини радіусів (рис. 5.4).

Велика вісь кожного еліпса, що знаходиться у аксонометричній площині, перпендикулярна до аксонометричної осі, що не лежить у даній площині.

Наприклад, якщо еліпс знаходиться в; якщо в площині  $x', O', z'$  то  $AB \perp y'$ , якщо в площині  $x', O', y'$  то  $AB \perp z'$ ;  $y', O', z'$  то  $AB \perp x'$  (рис.5.5).

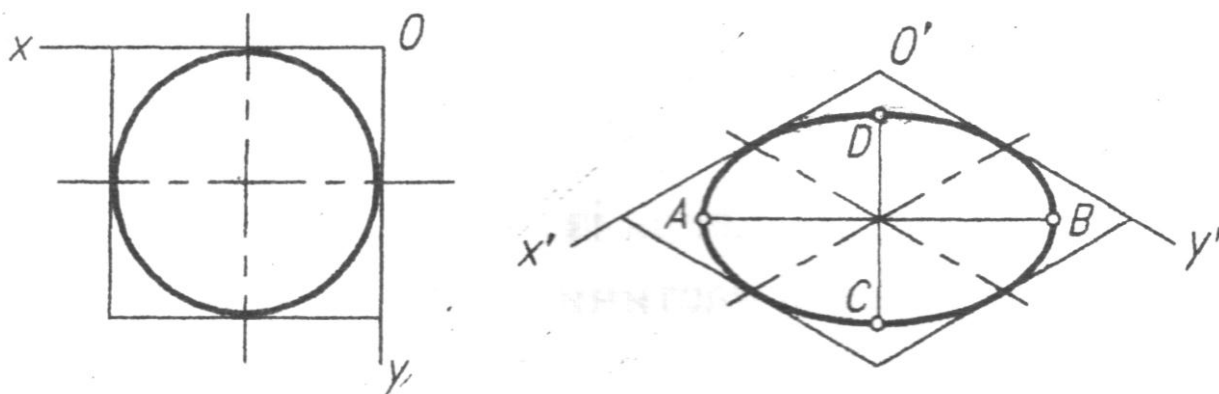


Рис. 5.3. Зображення кола діаметра  $d$  в ізометрії.

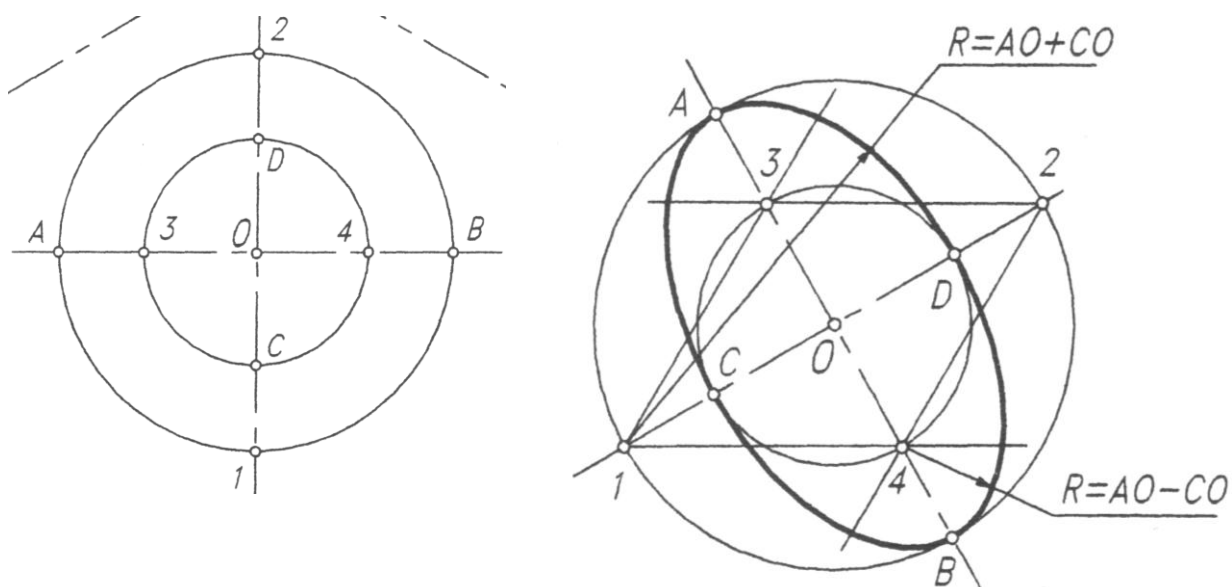


Рис. 5.4. Побудова кола в ізометрії.

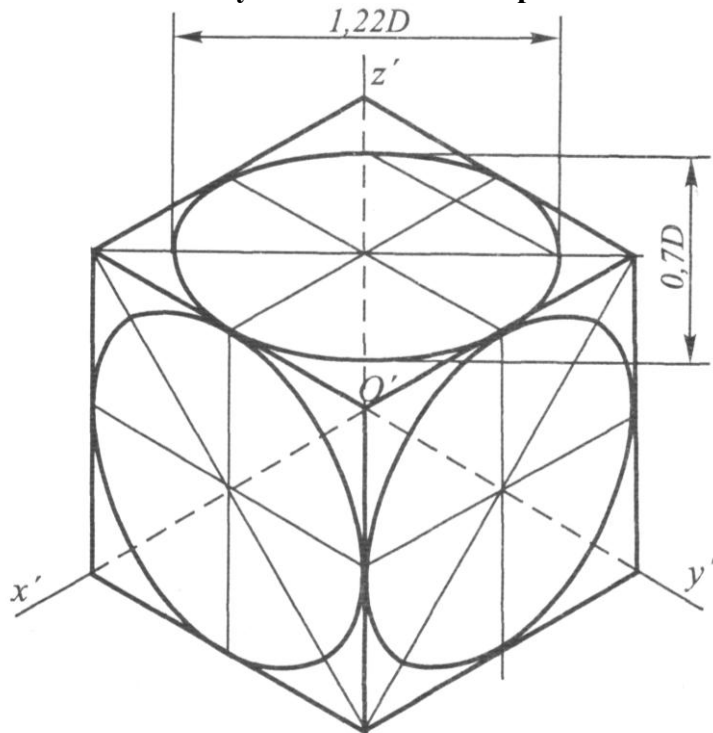


Рис. 5.5. Побудова еліпсів в аксинометричних площинах  $x', O', z'$ ;  $x', O', y'$ ;  $y', O', z'$ .

Штриховка в аксонометричних площинах прямокутної ізометрії показана на рис. 5.6. Прямокутна ізометрія сфери із вирізом однієї восьмої частини показана на рис. 5.7.

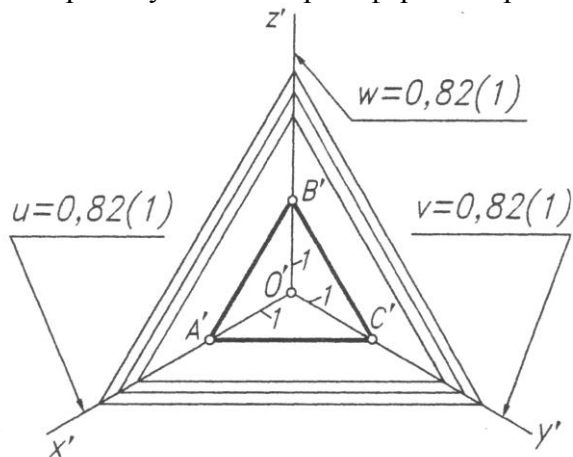


Рис. 5.6. Штриховка в аксонометричних площинах прямокутної ізометрії.

$\Delta A'B'C'$  – трикутник штриховки;  
 $A'O' = B'O' = C'O'$

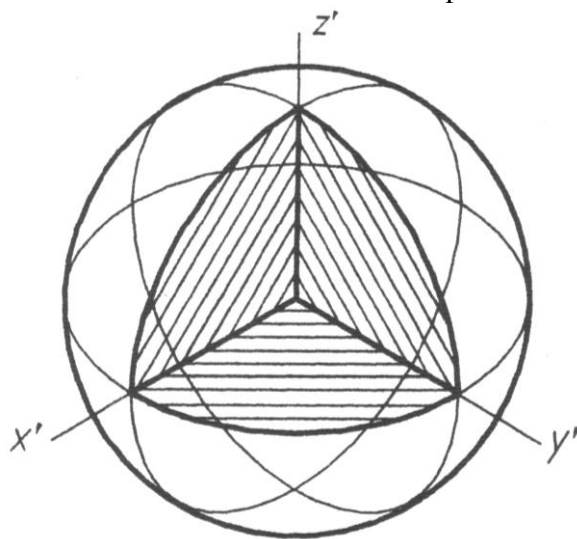


Рис. 5.7. Прямокутна ізометрія сфери із вирізом однієї восьмої частини.

### 5.3. Прямокутна диметрія

На рис. 5.8. побудовано осі прямокутної диметрії.

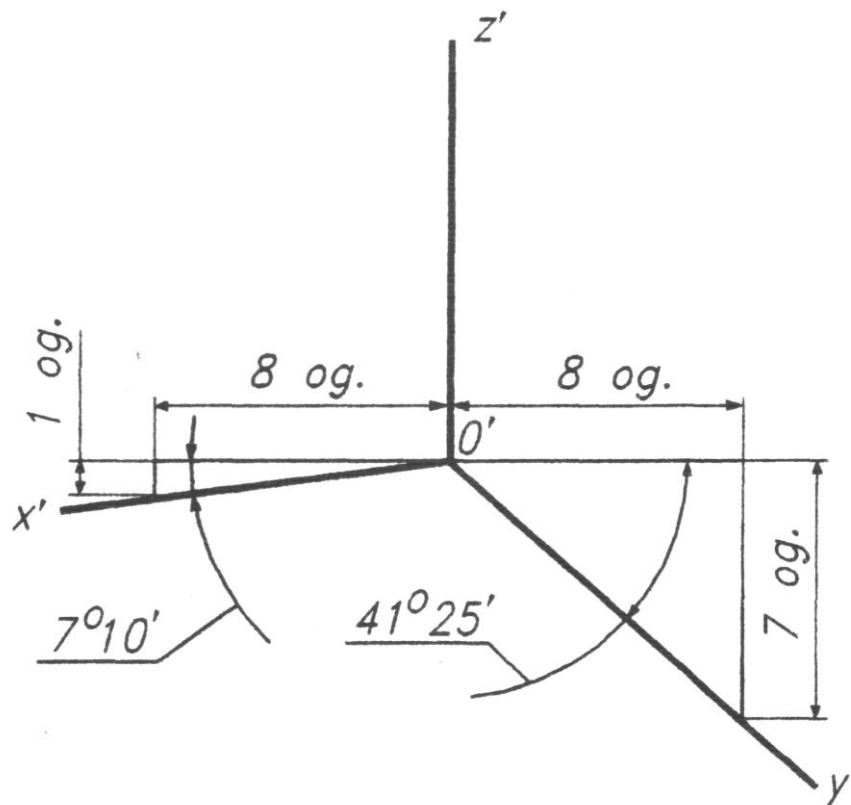


Рис. 5.8. Осі прямокутної диметрії.

Коло в аксинометричних площинах прямокутної диметрії показано на рис. 5.9.

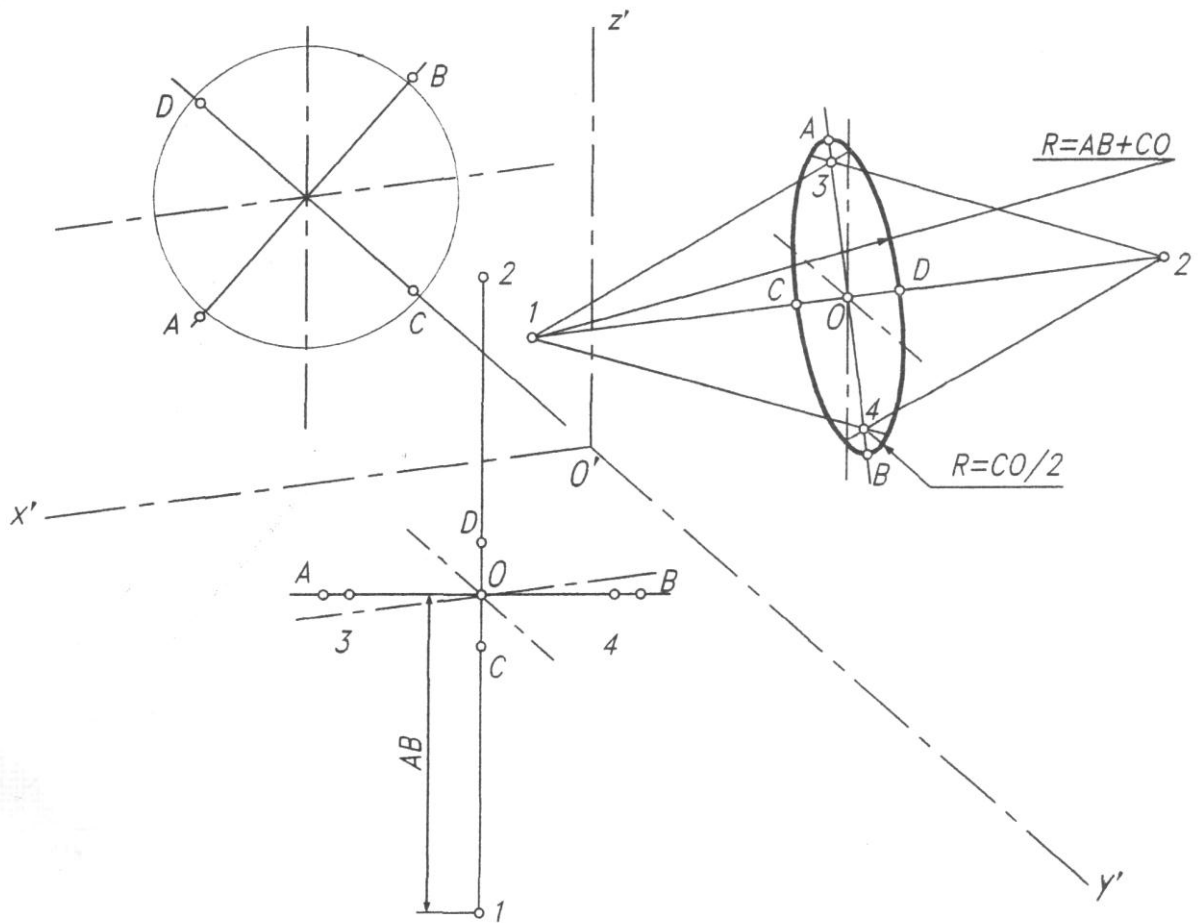


Рис. 5.9. Зображення кола в аксинометричних площинах прямокутної диметрії.

Кола діаметра  $d$ , що належать аксонометричним площинам  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ , зображаються у вигляді еліпсів.

Для всіх трьох площин  $AB=1,06d$ .

Малі осі еліпсів в аксонометричних площинах визначаються:

– в площині  $x', O', z' (\Pi_2)$   $CD=0,95 d$ ;

– в площинах  $x', O', y' (\Pi_1)$  та  $y', O', z' (\Pi_3)$   $CD=0,35 d$ .

Співвідношення між осями еліпсів:

– в площині  $x', O', z' (\Pi_2)$   $\frac{CD}{AB} = \frac{0,95d}{1,06d} = \frac{9}{10}$ .

– в площинах  $x', O', y' (\Pi_1)$  та  $y', O', z' (\Pi_3)$   $\frac{CD}{AB} = \frac{0,35d}{1,06d} = \frac{1}{3}$ .

Розташування еліпсів таке ж, як і в прямокутній ізометрії:  $AB$  перпендикулярна аксонометричній осі, що не належить площині еліпса (рис. 5.10).

Штриховка в аксонометричних площинах прямокутної диметрії показана на рис. 5.11.



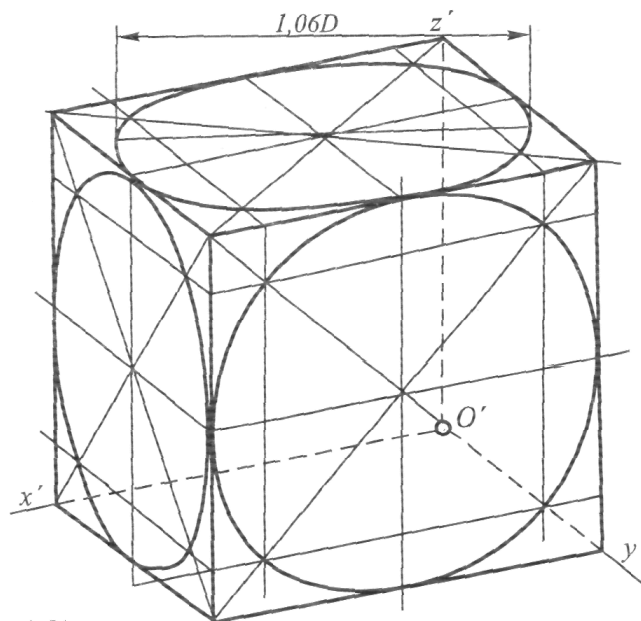


Рис. 5.10. Побудова еліпсів в аксинометричних площинах  $x', O', z'$ ;  $x', O', y'$ ;  $y', O', z'$  прямокутної диметрії.

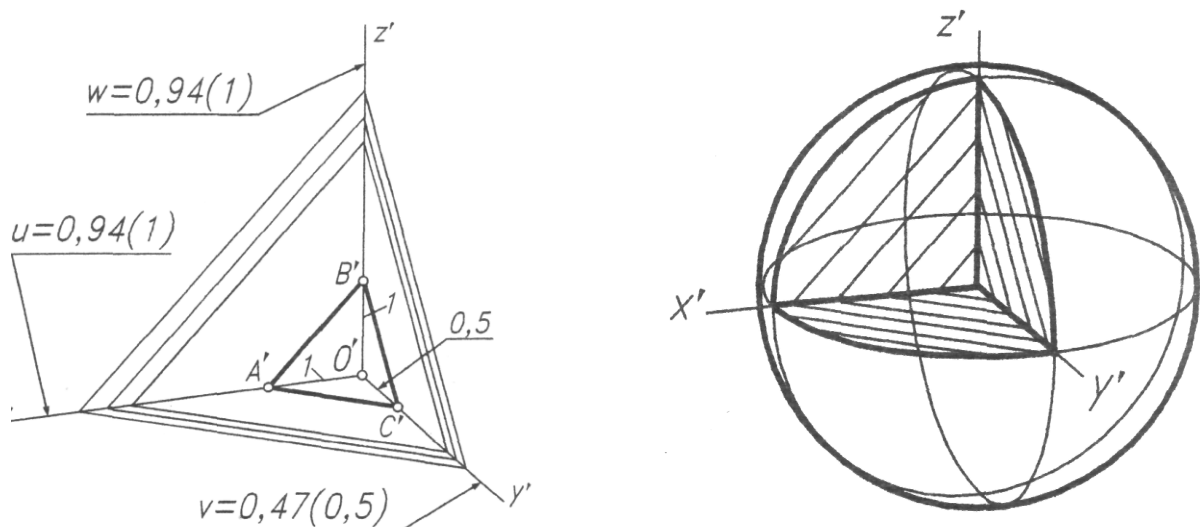


Рис. 5.11. Штриховка в аксинометричних площинах прямокутної диметрії

#### 5.4. Фронтальна диметрія (ФД).

На рис. 5.12. побудовано осі фронтальної диметрії.

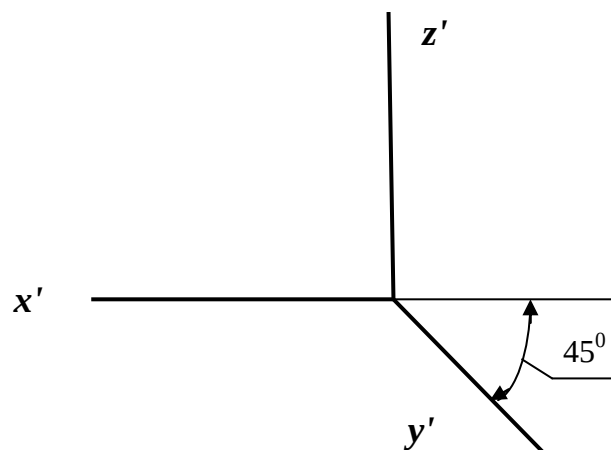


Рис. 5.12. Осі фронтальної диметрії.

Коло в аксонометричній площині  $x', O', z' (П_2)$  зображується у вигляді кола заданого діаметра  $d$ , а в площинах  $x', O', y' (П_1)$  та  $y', O', z' (П_3)$  – у вигляді еліпсів однакової форми. Розміри осей і їх співвідношення таке ж, як і для відповідних площин прямокутної диметрії:  $AB=1,06d$ ,  $CD=0,35d$  (рис. 5.13).

*Примітка.* Еліпси в площинах  $x', O', y' (П_1)$  та  $y', O', z' (П_3)$  будуються так само, як і в прямокутній диметрії, а їх положення відрізняється тим, що  $AB$  не перпендикулярна до третьої координатної осі, а складає кут  $7^\circ 14'$  відповідно з віссю  $x'$  або  $z'$ . Це зумовлено тим, що фронтальна диметрія є косокутною аксонометрією (рис. 5.14).

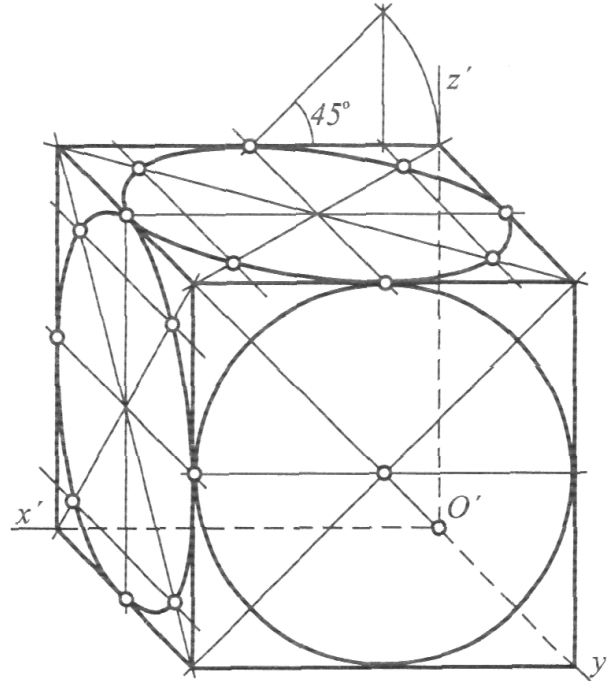


Рис. 5.13. Побудова еліпсів в аксонометричних площинах  $x', O', z'$ ;  $x', O', y'$ ;  $y', O', z'$  фронтальній диметрії.

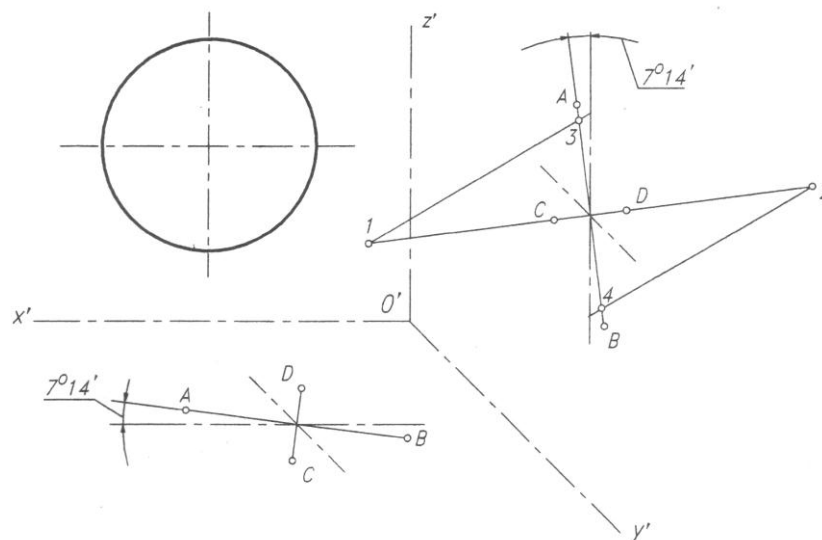


Рис. 5.14. Зображення кола в аксонометричних площинах фронтальної диметрії.

Штриховку в аксонометричних площинах фронтальної диметрії показана на рис. 5.15.

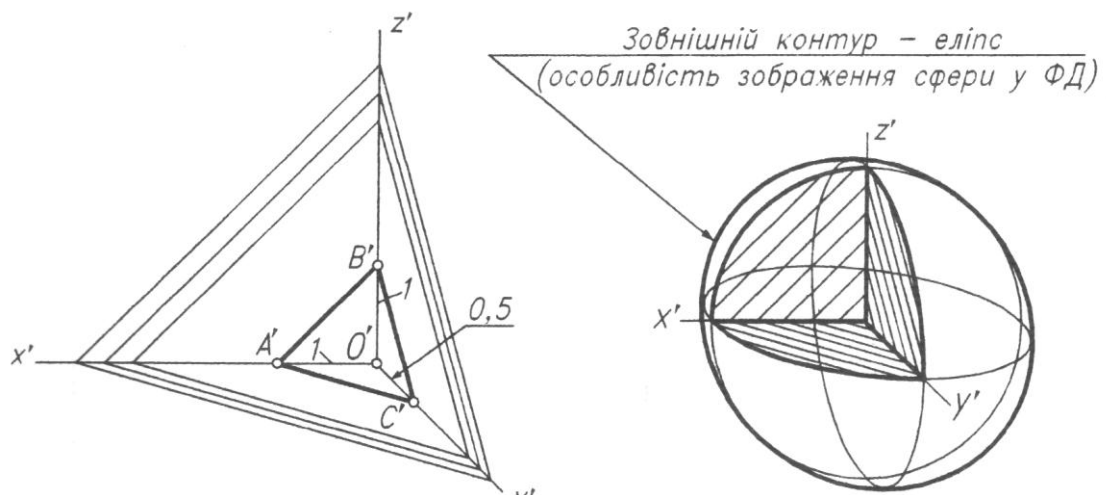


Рис. 5.15. Штриховка в аксонометричних площинах фронтальної диметрії.

### 5.5. Розв'язання позиційних задач в аксонометрії

В аксонометрії просто розв'язуються позиційні задачі на перетин прямої з площиною, з поверхнею, на перетин геометричної фігури з площиною та на перетин геометричних фігур між собою.

Значно складніше розв'язуються в аксонометрії метричні задачі, тому вони розв'язуються, як правило, в прямокутних проекціях.

На рис. 5.16 в довільній триметрії зображено площину загального положення  $\Gamma$ , задану слідами, та відрізок прямої загального положення  $AB$ . Для знаходження точки зустрічі прямої з площиною через пряму проведено допоміжну вертикальну січну площину  $\Lambda$ , горизонтальний слід якої збігатиметься з вторинною проекцією прямої  $AB$ , а фронтальний – паралельний осі  $OY$ . При цьому горизонтальні сліди площин перетинаються в точці 1, а фронтальні – в точці 2. З'єднавши ці точки, одержимо лінію 1-2 перетину площин. Перетин продовженої прямої  $AB$  з лінією перетину 1-2 визначить точку зустрічі  $C$  прямої з площиною.

На рис. 5.17 в прямокутній ізометрії зображено тригранну піраміду, яка перетинається з прямою  $AB$ . Вторинну проекцію вершини піраміди  $S$  з'єднано з вершинами основи піраміди  $C_1, D_1, E_1$  зображено також вторинну проекцію прямої  $AB$  –  $A'_1, B'_1$ . Для знаходження точок перетину прямої з гранями піраміди через пряму проведено допоміжну вертикальну січну площину  $\Phi$ , яка перетне піраміду по трикутнику 1-2-3. Перетин прямої  $AB$  з цим трикутником і визначить точки зустрічі прямої з гранями піраміди – 4 та 5.

На рис. 5.18 у косокутній фронтальній диметрії зображено чотиригранну вертикальну призму, яка перетинається площиною загального положення  $\Phi$ . Горизонтальний слід площини перетинає основу призми у двох точках 1 та 2. Для визначення точок перетину трьох вертикальних ребер призми, що проходять через точки  $B'_1, C'_1$ , та  $D'_1$  через ці ребра, проведено вертикальні січні площини, паралельні горизонтальному сліду, які перетнуть січну площину  $\Phi$  по горизонталях. Перетин кожної горизонталі з відповідним ребром дасть точки 3', 4', 5'. З'єднавши всі точки, отримаємо фігуру перерізу у вигляді п'ятикутника 1-2-3-5-4-1.

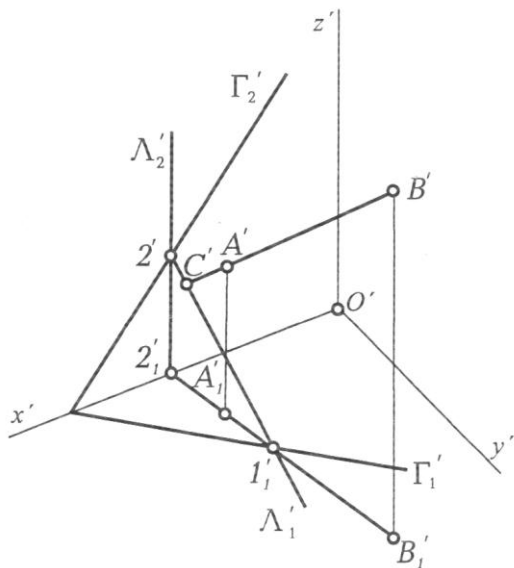


Рис. 5.16. Знаходження точки перетину прямої  $AB$  з площиною  $G$ .

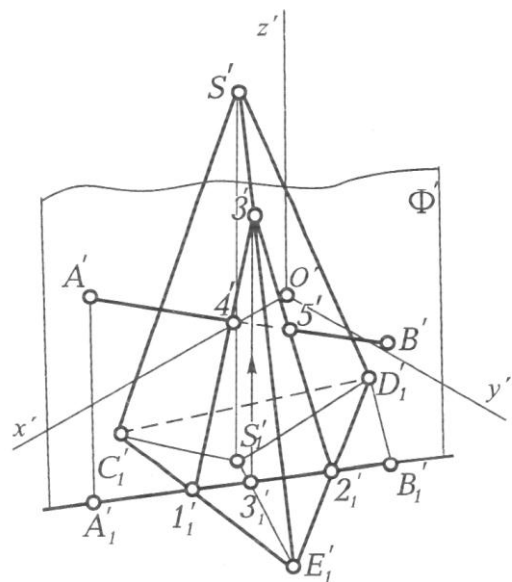


Рис. 5.17. Побудова точок перетину прямої  $AB$  з тригранною пірамідою.

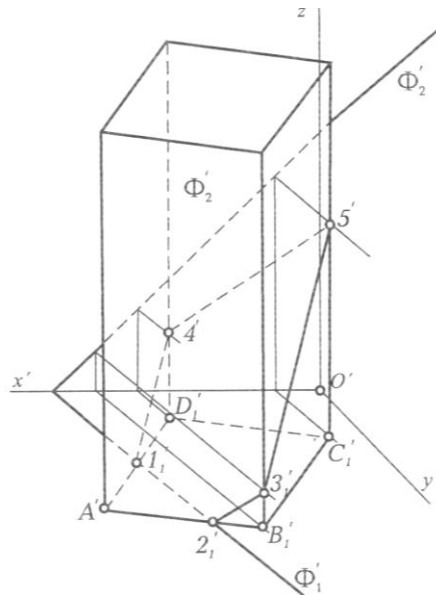


Рис. 5.18. Побудова перетину площини з чотиригранною призмою.

Рисунок 5.19 у прямокутній ізометрії демонструє побудову лінії перетину двох циліндрів – вертикального і горизонтального, в даному випадку має місце проникнення, при якому лінія взаємного перетину має дві вітки – лінію входу та лінію виходу. Спочатку знайдено точки на характерних твірних, які визначаються на вторинній проекції. Так, на контурних твірних вторинної проекції горизонтального циліндра лежатимуть точки 1, 2, 3, 4, які за допомогою вертикальних січних площин  $\Gamma$  та  $\Lambda$ , паралельних аксонометричній площині  $x', O', z'$ , знайдено на відповідних твірних горизонтального циліндра. Так само за допомогою площини  $\Phi$  визначаються точки 5, 6, 7, 8 на верхній та нижній твірних горизонтального циліндра. Для визначення проміжних точок на рисунку ще проведено дві січні площини  $\Omega$ , та  $\Sigma$ , які перетнуть і вертикальний циліндр, і горизонтальний циліндр по двох твірних, взаємний перетин цих твірних визначить у кожній вертикальній площині по чотири точки. Через визначені точки кожної з ліній знаходимо просторові криві входу та виходу. Крива виходу буде вся невидима, а крива входу буде невидимою частково, межу видимих та невидимих відрізків кривої визначають контурні твірні горизонтального циліндра.

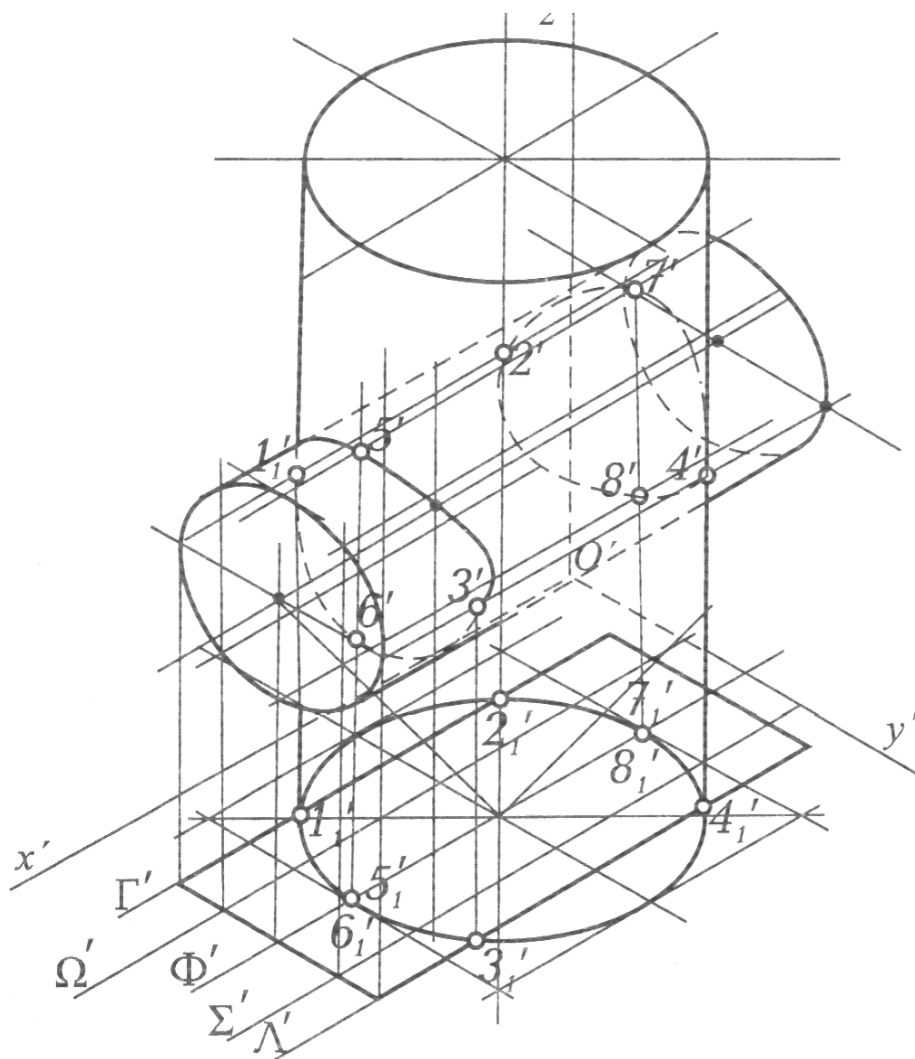


Рис 5.19. Побудова лінії перетину двох циліндрів у прямокутній ізометрії.

#### Запитання для самоперевірки

1. Що таке аксонометрична проекція?
2. Що таке вторинна проекція аксонометричного зображення?
3. На які два види поділяються аксонометричні проекції?
4. Що таке показники спотворення?
5. Чому дорівнює сума квадратів показників спотворення в прямокутній аксонометрії?
6. Як розташовуються великі осі еліпсів як проекцій кіл у прямокутній аксонометрії?

#### ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ №5

1. У прямокутній ізометрії побудувати лінію перетину конуса з вершиною  $S$ , висотою 100 мм та діаметром основи 100 мм з циліндром діаметром 30 мм, який перетинається під кутом  $90^\circ$  до осі конуса на висоті  $h$  від основи конуса, де  $h$  – 1 варіант – 25 мм; 2 – 32 мм; 3 – 35 мм; 4 – 38 мм; 5 – 40 мм; 6 – 42 мм; 7 – 43 мм; 8 – 46 мм; 9 – 48 мм; 10 – 50 мм; 11 – 52 мм; 12 – 54 мм; 13 – 55 мм; 14 – 56 мм; 15 – 57 мм; 16 – 58 мм; 17 – 59 мм; 18 – 60 мм; 19 – 62 мм; 20 – 64 мм; 21 – 65 мм; 22 – 66 мм; 23 – 67 мм; 24 – 68 мм; 25 – 59 мм;

## **Модуль 2 ОСНОВНІ ПРАВИЛА ВИКОНАННЯ КРЕСЛЕНЬ**

### **У РЕЗУЛЬТАТІ ВИВЧЕННЯ ДРУГОГО РОЗДІЛУ ВИ ПОВИННІ ЗНАТИ:**

1. Призначення креслярських інструментів і приладдя при виконанні креслень.
2. Основні прийоми виконання геометричних побудов – поділ на частини відрізків, кутів, кола, побудову перпендикулярних прямих.
3. Прийоми виконання циркульних спряжень.
4. Основні стандартні формати креслень.
5. Стандартні масштаби зображень і їх позначення на кресленнях.
6. Призначення та параметри ліній на кресленнях.
7. Основні правила виконання зображень предметів (виглядів, розрізів, перерізів) і їх позначення на кресленнях.
8. Стандартні графічні позначення матеріалів у перерізах.
9. Правила побудови стандартних типів аксонометричних зображень предметів.
10. Правила і послідовність виконання технічного малюнка.

### **НА ОСНОВІ НАБУТИХ ЗНАНЬ ВИ ПОВИННІ ВМІТИ:**

1. Користуватись креслярськими інструментами при виконанні креслень.
2. Виконувати геометричні побудови – поділяти відрізки на рівні частини чи у заданому відношенні, поділяти навпіл кути, будувати перпендикулярні прямі, поділяти коло на рівні частини.
3. Будувати циркульні спряження за заданими умовами.
4. Виконувати креслення предметів за правилами і вимогами державних стандартів.
5. Виконувати написи на кресленнях стандартним шрифтом.
6. Будувати третю проекцію предмета за двома заданими.
7. Визначати необхідні зображення для виконання креслень предмета.
8. Наносити розміри на кресленнях відповідно до правил державних стандартів.
9. Будувати аксонометричні зображення предметів за ортогональними проекціями.
10. Виконувати технічний малюнок предмету з натури і за заданими ортогональними проекціями.

## **ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧНА РОБОТА № 6**

### **Тема: Креслярські інструменти і приладдя. Вимоги стандартів до оформлення креслень.**

**Мета роботи** – систематизація і закріплення знань щодо користування креслярськими інструментами при виконанні креслень, та вимог стандартів до оформлення креслень.

#### **Завдання для виконання роботи**

Користуватись креслярськими інструментами під час виконання креслень.

#### **Порядок опрацювання завдань**

**Місце проведення занять:** кафедра механізації (ауд.140а).

**Місце та час отримання консультації:** кафедра механізації (згідно з графіком).

**Обладнання та матеріали:** готувальня середніх розмірів, лінійка, косинці із кутами 45° та 30° і 60°, олівці "Конструктор" марки М, 2М, ТМ, Т (іноземного виробництва відповідно В, 2В, НВ, Н), кнопки, гумки.

**Форми підсумкового контролю:** захист практичних робіт.

## 6.1. КРЕСЛЯРСЬКІ ІНСТРУМЕНТИ І ПРИЛАДДЯ

Для виконання креслень використовуються креслярські інструменти і приладдя.

**Креслярський папір** має підвищену щупкість і буває різної якості. Для виконання креслярських робіт олівцем слід вибирати папір, поверхня якого не псується при витиранні гумкою, а для роботи тушшю потрібно перевіряти, чи не розтікається туш. Креслярський папір має гладенький лицевий бік і шорсткий – зворотний. Він випускається промис-ловістю аркушами різного формату або у рулоні. Для виконання ескізів і розрахунково-графічних робіт використовується міліметровий папір, на якому нанесено міліметрову сітку.

**Креслярські олівці** маркуються за твердістю. Тверді олівці позначаються літерою "Т" або "Н", м'які – "М" або "В" і середньої твердості – "ТМ" ("НВ"). Цифри, які стоять перед літерою, показують ступінь твердості або м'якості олівця. Твердість олівця вибирається залежно від твердості креслярського паперу і коливається у межах від "2Т" до "М". Олівцями підвищеної твердості виконують побудови і наводять тонкі лінії. Більш м'якими олівцями наводять товсті лінії і виконують написи. Загострюють олівці на довжину до 25 мм з кінця, протилежного фабричному клейму. Графітний стрижень оголюється на довжину до 10 мм. Йому, залежно від призначення, надається форма конуса, зрізаного циліндра або стамески (рис. 6.1). Після загострення олівця графітний стрижень підправляють на наждачному папері.

**Креслярські дошки** виготовляються різних розмірів. Для навчальних цілей використовують дошки 1000 x 650 мм. Папір кріпиться до дошки кнопками або клейкою стрічкою (скотчем) ближче до лівого боку дошки. Відстань від нижнього краю паперу до нижнього ребра дошки повинна перебільшувати ширину рейшини.

**Рейшина** являє собою лінійку, довжина якої приблизно дорівнює довжині креслярської дошки. Існують різні конструкції рейшин. Звичайна рейшина на кінці має одну або дві поперечні планки, які утворюють головку рейшини (рис. 6.2). Одна з цих планок може повертатись навколо осі. При роботі головка рейшини ковзає уздовж короткої сторони дошки, забезпечуючи горизонтальне положення рейшини. Поворотна планка дозволяє проводити паралельні лінії під заданим кутом. Рейшина іншої конструкції має на кінцях ролики, через які пропускається шнур для кріплення рейшини на дошці. Таку рейшину використовують для проведення горизонтальних ліній і як напрямну для косинців.

**Косинці** випускаються двох типів – з кутами 45°, 45°, 90° і з кутами 30°, 60°, 90°. Косинці використовуються для проведення вертикальних, а також ліній під кутами 30°, 45°, 60° до рейшини або лінійки. Одним катетом косинця прикладають до рейшини або лінійки, а вздовж другого катета або гіпотенузи проводять лінію. При придбанні косинця потрібно перевірити точність виготовлення прямого кута. Для цього косинець одним катетом прикладають до лінійки, а вздовж іншого проводять лінію. Потім його перевертають і ще раз проводять лінію (рис. 6.3). Якщо дві проведені лінії збігаються, кут дорівнює 90°.

Рейшину і косинці можна замінити **креслярським приладом** (рис. 6.4).

Прилад кріпиться до дошки за допомогою струбцини, з якою шарнірно-стрижневою системою з'єднано дві лінійки, що скріплені під прямим кутом. При повороті головки можна повертати лінійки з різним кутом нахилу до горизонтальної лінії.

**Лекала** (рис. 6.5) призначаються для проведення кривих ліній, які не можна замінити дугами кіл. Точки, через які потрібно провести криву, спочатку з'єднують тонкою лінією від руки, а тоді підбирають лекало до окремих частин кривої для наведення їх олівцем чи тушшю. Для виконання креслень потрібно мати набір з кількох лекал.

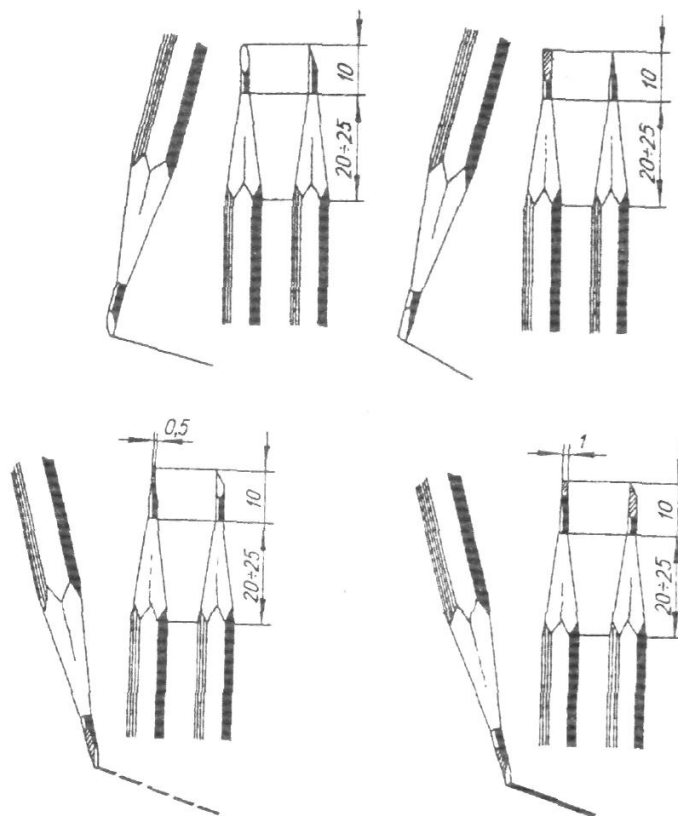


Рис. 6.1. Загострення олівців.

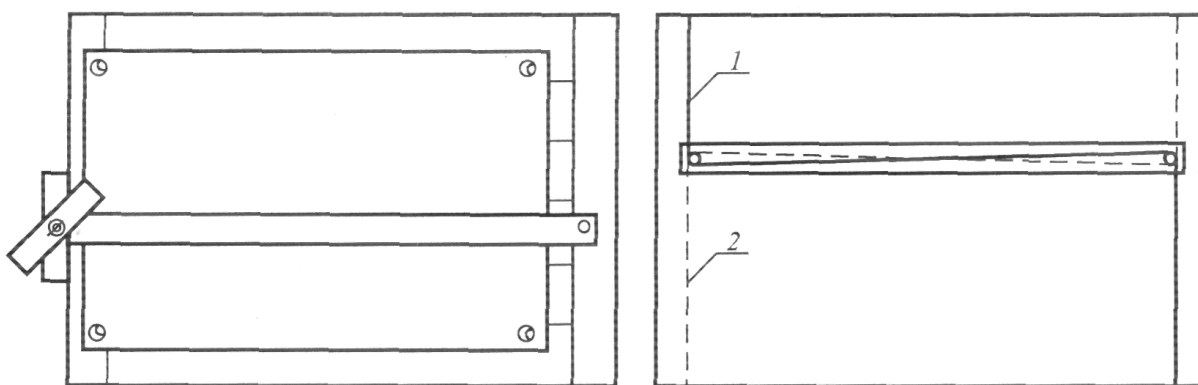


Рис. 6.2. Рейшина.

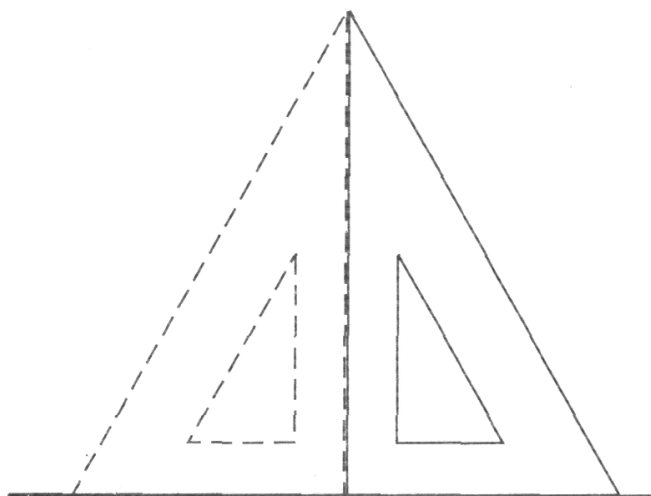


Рис. 6.3. Перевірка точності виготовлення прямого кута.



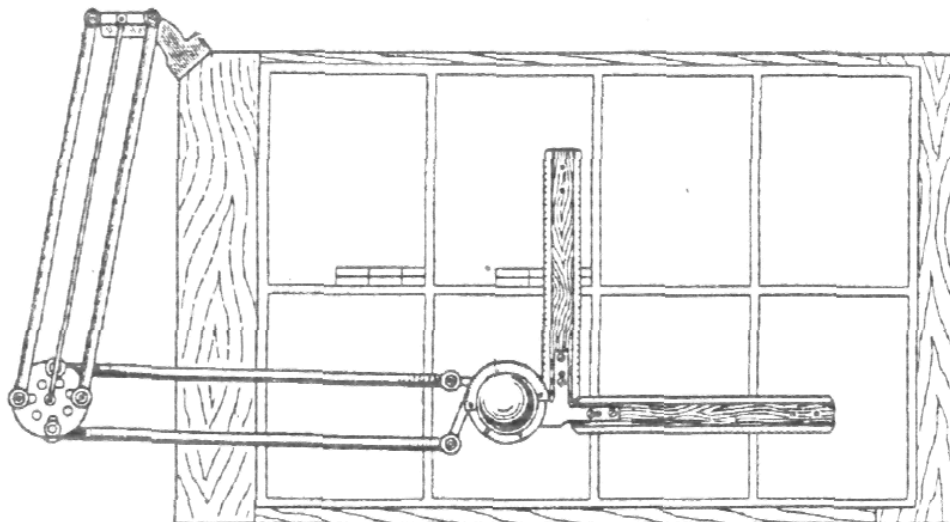


Рис. 6.4. Креслярський прилад.

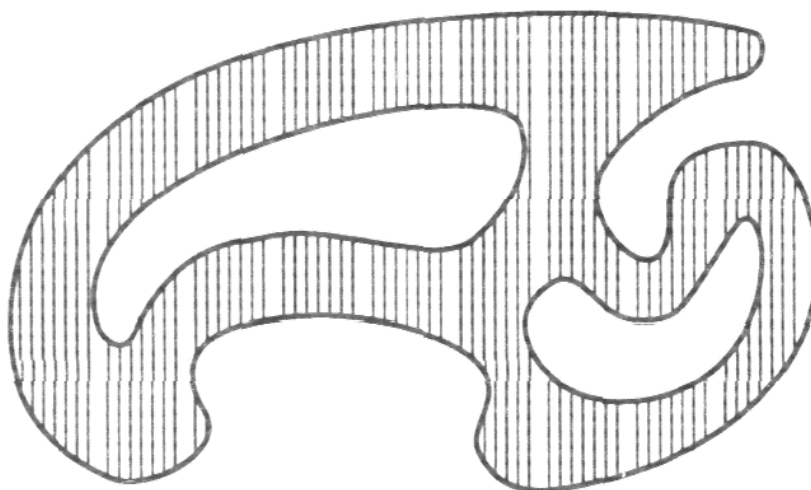


Рис. 6.5. Лекала.

Креслярські інструменти для проведення кіл, обведення ліній тушшю, виміру довжини відрізків виготовляються у вигляді набору, який називається **готовальнею**.

Готовальні бувають різного складу. На рис. 6.6 наведено приклад середньої готовальні, де:

- 1 – пенал для голок і грифелів;
- 2 – грифельна ніжка для кронциркуля;
- 3 – подовжувач для креслярського циркуля;
- 4,10 – рейсфедери;
- 5 – кронцикуль падаючий (балеринка);
- 6 – викрутка;
- 7 – циркуль розміточний (вимірник);
- 8 – циркуль креслярський із грифельною вставкою;
- 9 – ручка;
- 11 – рейсфедер круговий для циркуля;
- 12 – центрик;
- 13 – ніжка для циркуля;
- 14 – вимірювач.

Графітні стрижні для циркуля загострюють так само, як і для олівця. Рейсфедер використовується для обведення тушшю прямих і кривих ліній. При роботі з рейсфедером використовується спеціальна лінійка, яка має вставку, що не дотикається до паперу для

того, щоб туш не затікала під лінійку. Кронциркуль падаючий використовується для проведення кіл невеликих діаметрів. Циркуль розмітний і вимірювач необхідні для точного вимірювання і фіксації довжин відрізків. Циркуль креслярський призначається для проведення кіл та їх дуг. Креслярський циркуль має дві вставні ніжки: для проведення кіл графітом і тушшю (круговий рейсфедер). Якщо розхилу циркуля не вистачає для проведення кола великого діаметра, в циркуль вставляється подовжувач. Центрик використовується для фіксації голки циркуля при проведенні концентричних кіл.

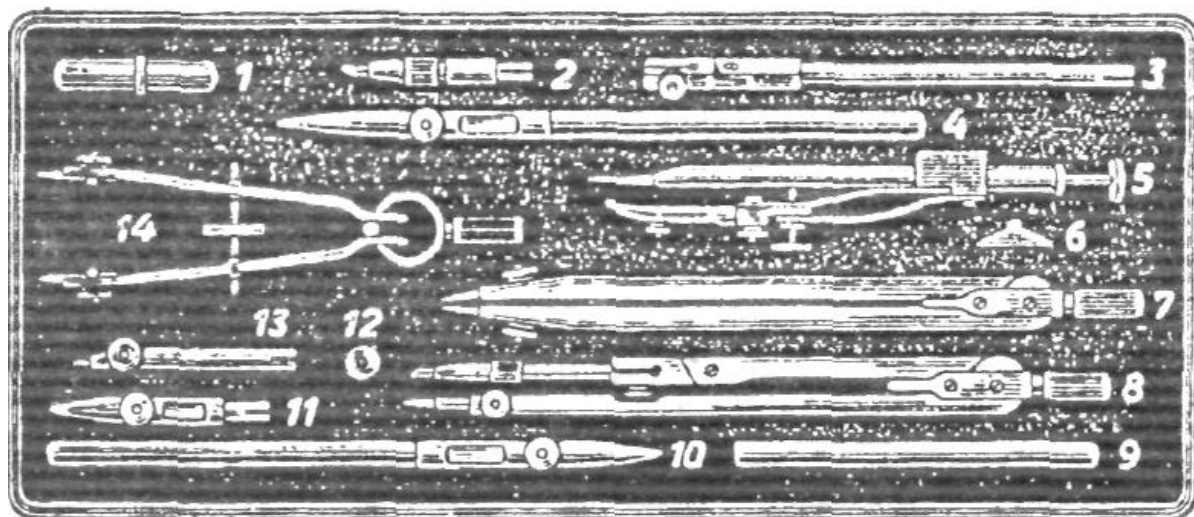


Рис. 6.6. Готовальня.

## 6.2. Вимоги стандартів до оформлення креслень

При виконанні креслень використовується багато умовностей у зображеннях об'єктів і їх елементів, надається багато інформації у вигляді умовних позначень тощо. Для того щоб така інформація була зрозуміла кожному спеціалісту повинна бути єдина технічна мова і єдина термінологія, що забезпечується державними стандартами. Усі креслення оформляють відповідно до вимог чинних стандартів. Загальні правила виконання креслень регламентуються ДСТУ 3321 -96 Система конструкторської документації (СКД). Терміни та визначення основних понять. СКД замінила з 01.01.97 р. діючи в Україні Єдину систему конструкторської документації (ЄСКД).

**СКД** – це комплекс державних стандартів, який встановлює взаємопов'язані правила та положення щодо порядку розроблення, оформлення й обігу конструкторської документації.

### 6.2.1. Формати і основні написи

Відповідно до ГОСТ 2.301-68, формат аркуша креслень визначається розмірами його сторін. Кожний стандартний формат має позначення, наприклад, А0. Основні формати визначаються послідовним діленням навпіл довгих сторін формату А0 (1189 x 841 мм), площа якого дорівнює 1м<sup>2</sup>. Розміри основних форматів наведено у табл. 6.1.

Таблиця 6.1 – Перелік форматів аркуша креслень.

| Позначення формату | Розміри сторін в мм |
|--------------------|---------------------|
| А0                 | 841 x 1189          |
| А1                 | 594 x 841           |
| А2                 | 420 x 594           |
| А3                 | 297 x 420           |
| А4                 | 210 x 297           |

Допускається використання додаткових форматів, довга сторона яких повинна бути кратною короткій стороні основного формату. Розміри додаткових форматів наведено у табл. 6.2.

Таблиця 6.2 – Додаткові формати.

| Кратність | Формат    |          |          |          |           |
|-----------|-----------|----------|----------|----------|-----------|
|           | A0        | A1       | A2       | A3       | A4        |
| 2         | 1189x1682 |          |          |          |           |
| 3         | 1189x2523 | 841x1783 | 594x1261 | 420x891  | 297x630   |
| 4         |           | 841x2378 | 594x1682 | 420x1189 | 297x841   |
| 5         |           |          | 594x2102 | 420x1486 | 297x1051  |
| 6         |           |          |          | 420x1783 | 297x1261  |
| 7         |           |          |          | 420x2080 | 297x1471  |
| 8         |           |          |          |          | 297x1682  |
| 9         |           |          |          |          | 1297x1892 |

Позначення додаткового формату складається з позначення основного формату і кратності довгої сторони додаткового формату короткій стороні основного формату. Наприклад, формат 420x1486 позначається A3x5.

На форматі виконується рамка на відстані 5 мм від краю з трьох сторін аркуша і на відстані 20 мм від четвертого лівого краю (рис. 6.7).

У правому нижньому куті формату розміщується основний напис. Формати, за винятком A4, можуть компонуватись як горизонтально, так і вертикально. Формат A4 компонується тільки вертикально.

Основні написи залежно від призначення документа, можуть мати різну форму. На рис. 6.8 наведено основний напис, який відповідно до ГОСТ 2.104-68 призначається для всіх типів креслень, за винятком будівельних.

У графах основного напису вказується:

- 1 – назва виробу;
- 2 – позначення документа відповідно до ГОСТ 2.202-80;
- 3 – позначення матеріалу деталі (графу заповнюють тільки на кресленнях деталей);
- 4 – літера, яку присвоєно документу відповідно до ГОСТ 2.103-68 (на учбових кресленнях – "У");
- 5 – маса виробу відповідно до ГОСТ 2.109-73;
- 6 – масштаб відповідно до ГОСТ 2.302-68.

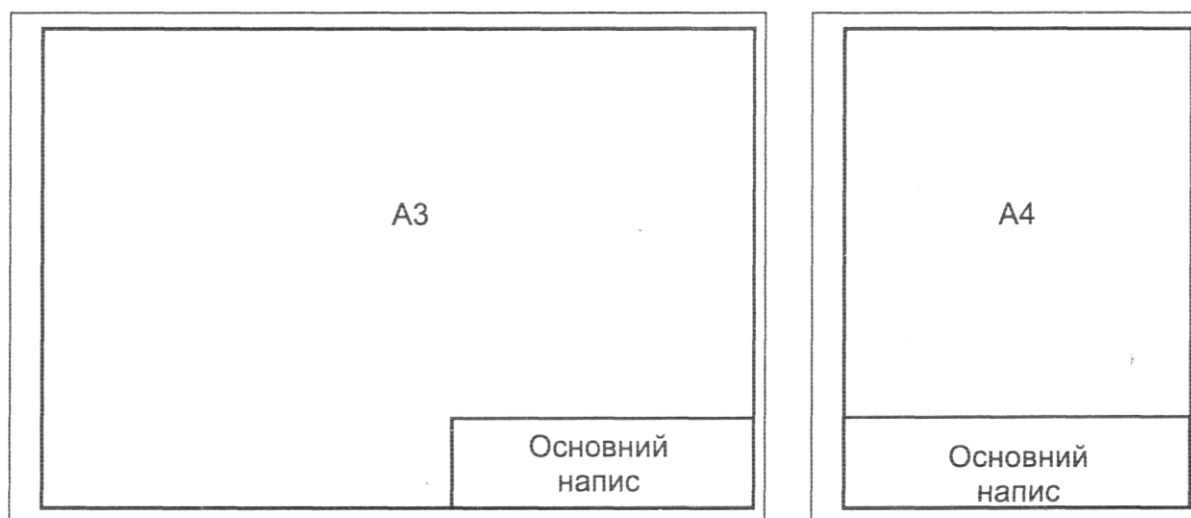


Рис. 6.7. Правила виконання рамки.

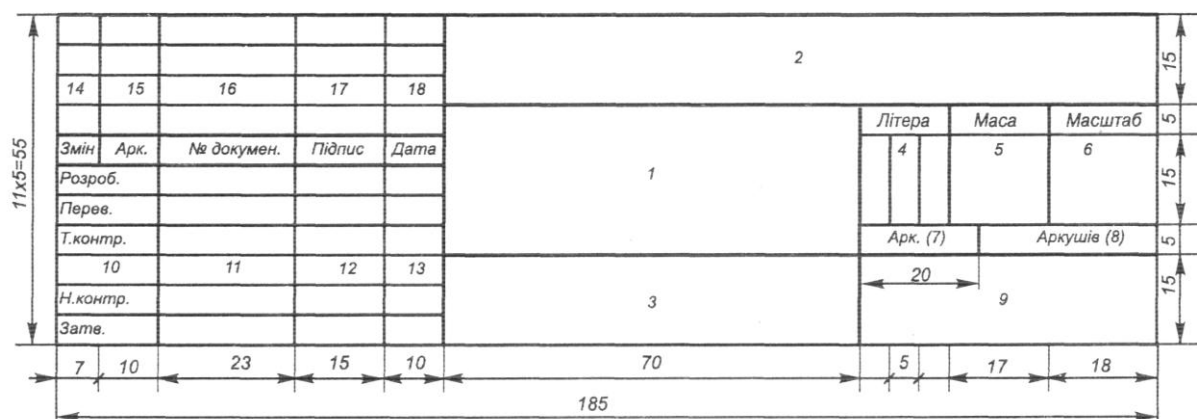


Рис. 6.8. Правила виконання основного надпису.

- 7 – порядковий номер аркуша (на документах, що складаються з одного аркуша, графу не заповнюють);  
 8 – загальне число аркушів (графу заповнюють лише на першому аркуші);  
 9 – назва або розпізнавальний індекс підприємства, що випустило документ (графу не заповнюють, якщо розпізнавальний індекс є в позначенні документа);  
 10 – характер роботи, що виконується особами, які підписують документ;  
 11 – прізвища осіб, які підписали документ;  
 12 – підписи осіб, прізвища яких зазначені у графі 11;  
 13 – дата підписання документа;  
 14... 18 – зміни, які вносяться відповідно до вимог ГОСТ 2.503-74.

### 6.2.2. Масштаби

**Масштабом** називають міру зменшення або збільшення зображення предмету по відносно до натури. Відповідно до ГОСТ 2.302-68 для виконання креслень рекомендуються масштаби, які наведено в табл. 6.3.

Для великих об'єктів допускається використовувати масштаби 1:2000, 1:5000, 1:10000, 1:20000, 1:50000. В необхідних випадках також допускається використання масштабів збільшення  $(100n):1$ , де  $n$  – ціле число. У відповідній графі основного напису масштаб позначається без літери "М", наприклад, 1:2, 2:1 і т.д.

Таблиця 6.3 – Масштаби.

|                     |                                                                                                           |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Масштаби зменшення  | 1:2; 1:2,5; 1:4; 1:5; 1:10; 1:15; 1:20; 1:25; 1:40; 1:50; 1:75; 1:100; 1:200; 1:400; 1:500; 1:800; 1:1000 |
| Натуральна величина | 1:1                                                                                                       |
| Масштаби збільшення | 2:1; 2,5:1; 4:1; 5:1; 10:1; 20:1; 40:1; 50:1; 100:1                                                       |

### 6.2.3. Лінії

При виконанні креслень використовують лінії, що встановлені стандартом ГОСТ 2.303-68 (табл. 6.4).

Товщина ліній, довжина штрихів штрихових і штрихпунктирних ліній повинні бути однаковими для всіх зображень на форматі і обираються в залежності від масштабу і складності зображення. Штрих-пунктирні лінії повинні перетинатись і закінчуватись штрихами. Приклади використання різних типів ліній наведено на рис. 6.9.

### 6.2.4. Шрифти креслярські

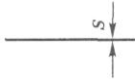
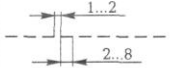
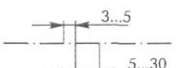
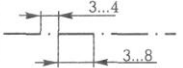
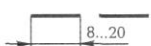
Всі написи на кресленнях виконуються стандартним шрифтом. ГОСТ 2.304-81 встановлює такі типи шрифтів:

- тип А без нахилу (рис. 6.10, 6.14а);

- тип А з нахилом близько 75° (рис. 6.11, 2.14б);
- тип Б без нахилу (рис. 6.12 а, 6.13 б.14в);
- тип Б з нахилом близько 75° (рис.6.12 б, 6.14г).

Розміри елементів літер, відстані між літерами, словами і рядками кратні розміру чарунки сітки (таб. 2.5).

Таблиця 6.4 – Лінії які використовують під час виконання креслень.

| № /п | Назва                     | Зображення                                                                          | Товщина                             | Призначення                                                                                                                       |
|------|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1    | Суцільна товста основна   |    | $S=0,5-1,4 \text{ мм}$              | Лінії видимих контурів, лінії контурів перерізів (винесених і таких, які входять до складу розрізу)                               |
| 2    | Суцільна тонка            |    | від $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$  | Лінії контурів накладених перерізів, розмірні та виносні лінії. Лінії штрихування, полиці ліній-виносков і підкреслювання написів |
| 3    | Суцільна хвиляста         |    | від $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$  | Лінії розмежування вигляду і розрізу. Лінії обриву                                                                                |
| 4    | Штрихова                  |    | від $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$  | Лінії невидимого контуру                                                                                                          |
| 5    | Штрих-пунктирна тонка     |  | від $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$  | Осьові та центрові лінії                                                                                                          |
| 6    | Штрих-пунктирна потовщена |  | від $\frac{S}{2}$ до $\frac{2S}{3}$ | Позначення поверхонь, що підлягають термообробці або покриттю. Зображення елементів, розташованих перед січною площиною           |
| 7    | Розімкнена                |  | від $S$ до $\frac{3S}{2}$           | Лінії перерізів                                                                                                                   |
| 8    | Суцільна тонка зі зломом  |  | від $\frac{S}{3}$ до $\frac{S}{2}$  | Довгі лінії обриву                                                                                                                |

Таблиця 6.5 – Параметри шрифту.

| Параметри                       | Тип А    | Тип Б    |
|---------------------------------|----------|----------|
| Розмір шрифту                   | $h$      | $h$      |
| Висота великих літер і цифр     | $h$      | $h$      |
| Висота рядкових літер           | $10h/14$ | $7h/10$  |
| Відстань між літерами           | $2h/14$  | $2h/10$  |
| Мінімальний крок рядків         | $22h/14$ | $17h/10$ |
| Мінімальна відстань між словами | $6h/14$  | $6h/10$  |

Шрифти типу А мають товщину літер  $h/14$ , а типу Б –  $h/10$ , де  $h$  – висота великих літер у мм. Висоту  $h$  також називають розміром шрифту, який відповідно до ГОСТ 2.304-81 може приймати такі значення: 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40.

Стандарт ГОСТ 2.304-81 встановлює також форму літер латинської і грецької абетки (рис. 6.13), римських цифр, математичних і розділових знаків тощо.

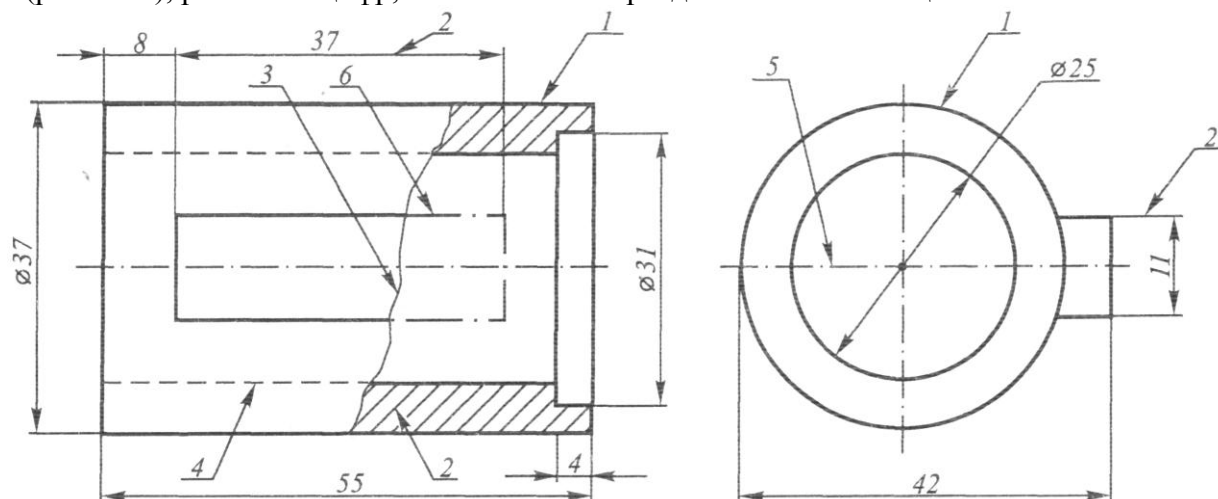


Рис. 6.9. Приклади використання різних типів ліній.



Рис. 6.10. Тип шрифту А без нахилу.

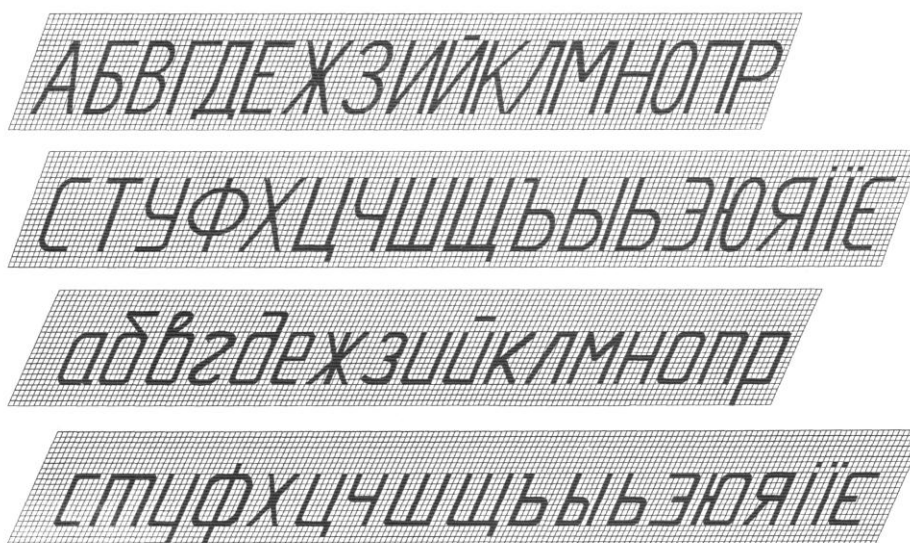


Рис. 6.11. Тип шрифту А з нахилом близько 75°.

АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПР  
СТУФХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯІІЄ  
абвгдежзийклмнопр  
стуфхцчшщъыьэюяііє

*a*

АБВГДЕЖЗИЙКЛ  
МНОПРСТУФХЦЧ  
ШЩЪЫЬЭЮЯІІЄ  
абвгдежзийклм  
нопрстуфхцчш  
щъыьэюяііє

*б*

Рис. 6.12. Тип шрифту Б (*a* – без нахилу; *б* – з нахилом близько 75°).





|             |             |              |
|-------------|-------------|--------------|
| 1- альфа    | 9- йота     | 17- ро       |
| 2- бета     | 10- каппа   | 18- сигма    |
| 3- гамма    | 11- ламбда  | 19- тау      |
| 4- дельта   | 12- мю      | 20- іпси́лон |
| 5- е́псилон | 13- ню      | 21- фі       |
| 6- дзета    | 14- ксі     | 22- хі       |
| 7- ета      | 15- омікрон | 23- псі      |
| 8- тета     | 16- пі      | 24- омега    |

Рис. 6.13. Форма літер латинської і грецької абетки.

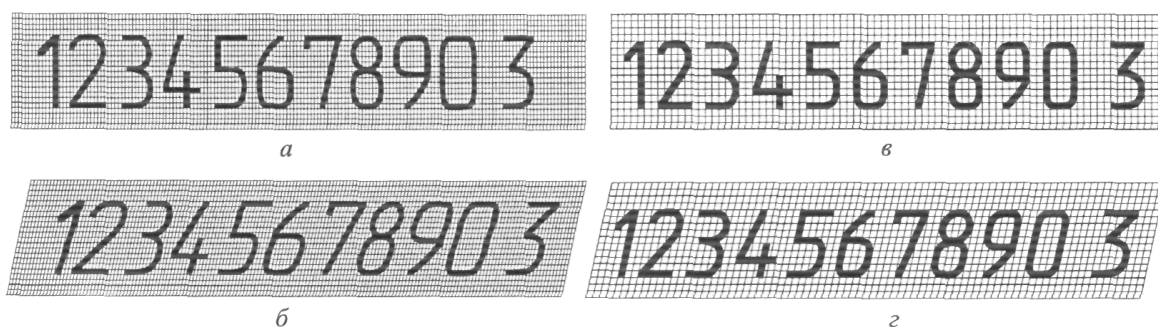


Рис. 6.14. Форма римських цифр.

### 6.2.5. Зображення

ГОСТ 2.305-68 встановлює правила зображення предметів (виробів, споруд та їх складових частин) на кресленнях всіх галузей промисловості. Число зображень предмета повинно бути мінімальним, але достатнім для визначення його форми і форми його елементів. Додаткові правила виконання зображень на будівельних кресленнях встановлюються стандартами СПДБ (система проектної документації для будівництва). Згідно зі стандартом ГОСТ 2.305-68, зображення поділяються на вигляди, розрізи і перерізи.



Зображення предметів виконують за методом прямокутного проєкціювання. Основними вважаються шість проєкцій, які одержуються на гранях куба, що оточує предмет (рис. 6.15а). За головне приймається зображення на задній фронтальній грані куба. Положення інших зображень визначається при суміщенні розгортки куба з площиною цієї грані (рис. 6.15б). Предмет розташовується відносно фронтальної площини проєкцій так, щоб зображення на ній давало найбільш повне уявлення про форму і розміри предмета (формально головне зображення можна визначити як таке, на якому можна нанести максимальне число розмірів).

**Виглядом** називається зображення звернутої до спостерігача видимої частини поверхні предмета. Назви основних виглядів відповідають напрямку проєкціювання предмета на грані куба.

Так, зображення на рис. 6.15б називаються:

1 – вигляд спереду (головний вигляд); 2 – вигляд зверху; 3 – вигляд зліва; 4 – вигляд справа; 5 – вигляд знизу; 6 – вигляд ззаду.

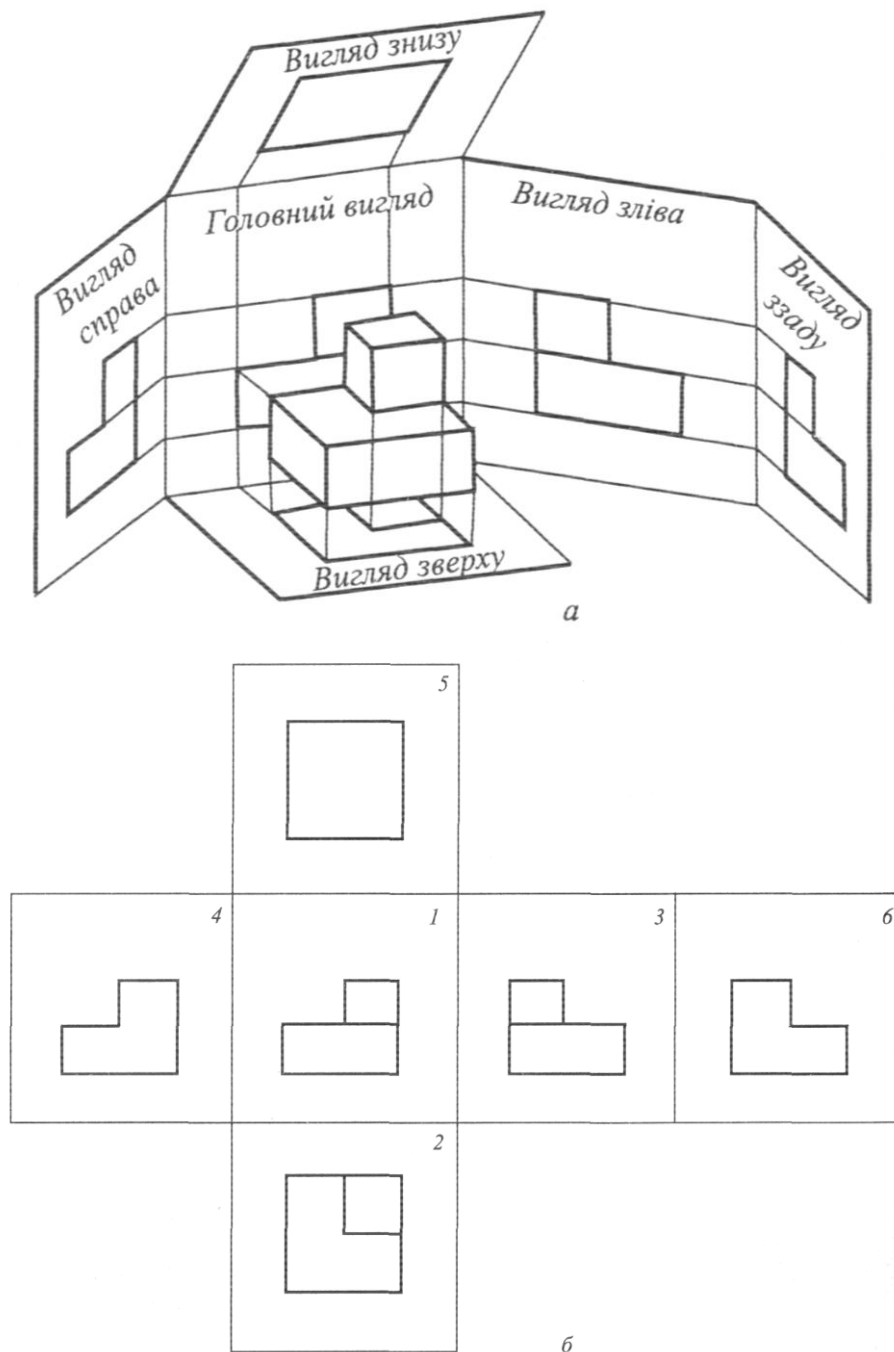


Рис. 6.15. Метод прямокутного проєкціювання.

Вигляди, які знаходяться у прямому проекційному зв'язку, не надписуються. В іншому випадку напрям проекціювання показують стрілкою. Над стрілкою і над побудованим виглядом наносять одну і ту ж велику літеру українського алфавіту (рис. 6.16). Форму і розміри стрілки показано на рис. 6.17.

Додатковим називається вигляд, який одержується проекціюванням на площину, що не паралельна жодній з основних площин проекцій (рис 6.18).

**Місцевим** називається вигляд обмеженої частини поверхні предмета або його окремого елемента (рис. 6.19). Місцевий вигляд обмежується суцільною хвилястою лінією або лініями контура елемента. Місцеві і додаткові вигляди позначаються так само, як і основні.

**Розрізом** називається зображення предмета, уявно перерізаного однією або кількома площинами (рис. 6.20 – 6.22).

Розріз виконується тільки на даному зображенні і не впливає на інші зображення.

У розрізі показують все, що знаходиться у січній площині і за нею. При необхідності окремі елементи, що знаходяться перед січною площиною, показують штрихпунктирною потовщеною лінією (рис. 6.9). Розрізані елементи предмета виділяються штриховкою. Залежності від числа січних площин розрізи поділяють на **прості** (при одній січній площині, рис. 6.20) і **складні** (при кількох січних площинах, рис. 6.21, 6.22).

Прості розрізи, залежно від положення січної площини, поділяють на горизонтальні і вертикальні. Окремими випадками вертикальних розрізів є розрізи фронтальні і профільні (рис. 6.20).

Розрізи можуть бути поздовжніми, коли січна площина проходить уздовж довжини предмета, і поперечними, якщо січна площина перпендикулярна довжині.

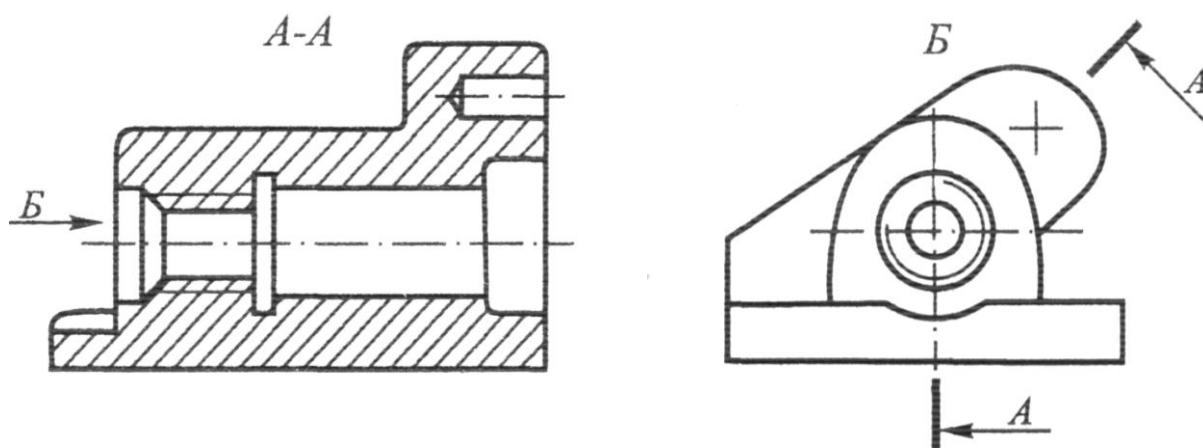


Рис. 6.16. Вказання стрілкою напрямку проекціювання.

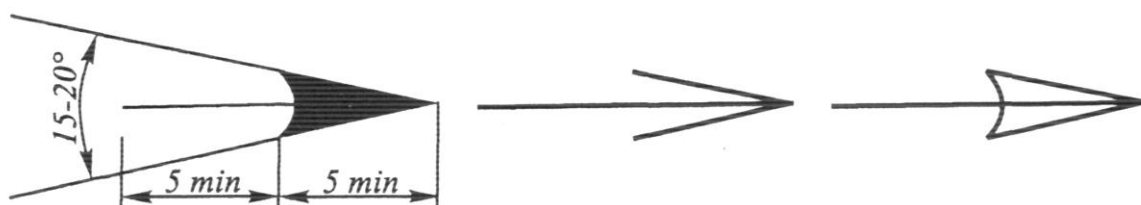


Рис. 6.17. Вигляд і розміри стрілки.

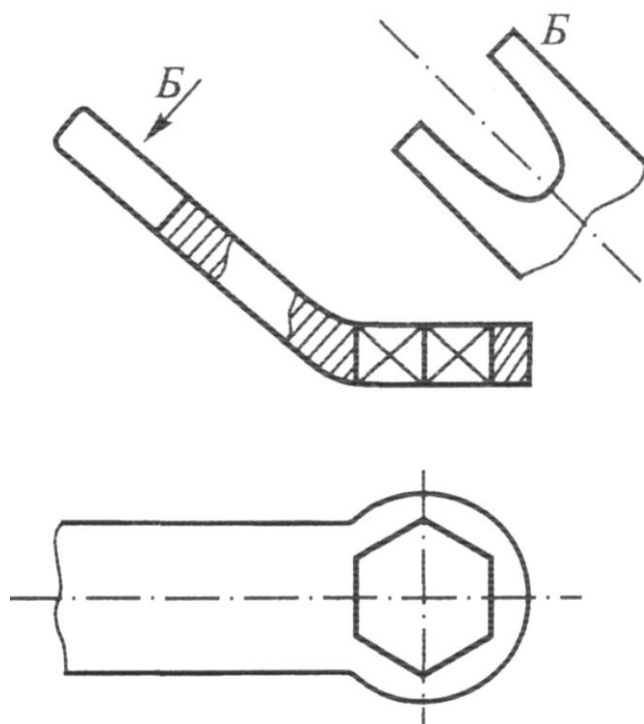


Рис. 6.18. Додатковий вигляд.

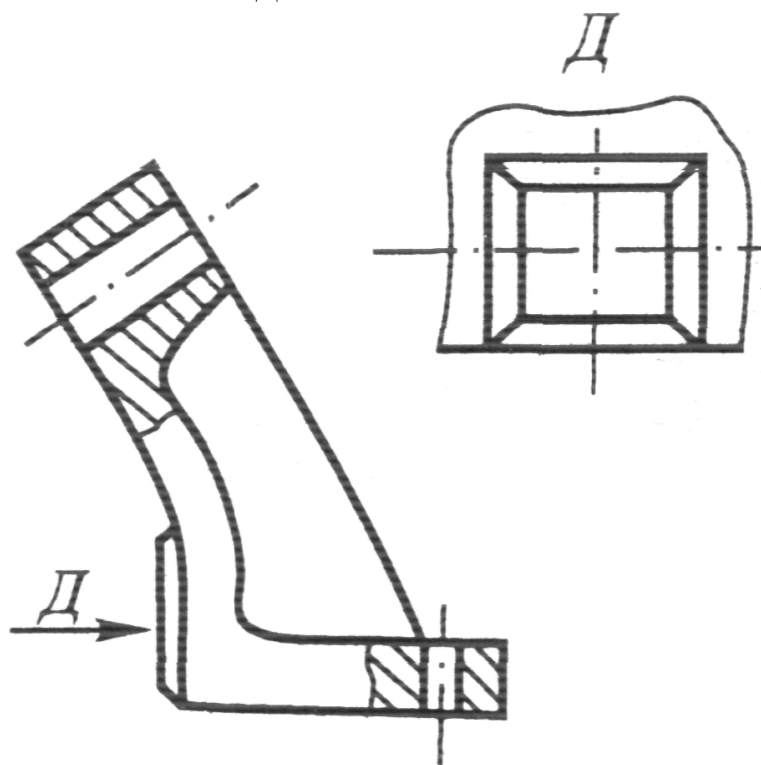


Рис. 6.19. Місцевий вигляд.

Положення січної площини розрізу показують на іншому зображенні розімкненою лінією (рис. 6.21). Напрямок погляду показують стрілками, форму яких було наведено на рис. 6.17. Стрілки наносять на відстані 2-3 мм від зовнішніх кінців розімкненої лінії. Січну площину позначають двома однаковими літерами української абетки, які наносяться вертикально із зовнішньої сторони стрілок. Розріз позначають написом, що складається з двох літер позначення січної площини, наприклад: "А-А" (рис. 6.21-6.22).

Січну площину не показують і простий розріз не позначають, якщо розріз має прямий проекційний зв'язок з іншими зображеннями, а січна площина збігається з пло-

щиною симетрії предмета. Горизонтальні, фронтальні та профільні розрізи, як правило, розміщують на місцях відповідних основних виглядів (рис. 6.20).

Складні розрізи поділяються на **ступінчасті**, якщо січні площини паралельні (рис. 6.21), і **ламані**, якщо січні площини перетинаються (рис. 6.22). Січні площини складних розрізів обов'язково показуються, а самі розрізи позначаються відповідними літерами. Лінію перепаду площин на ступінчастому розрізі і лінію перетину площин на ламаному розрізі не показують.

Розріз, який виконується в окремому обмеженому місці, називається **місцевим**. Місцевий розріз відокремлюється від вигляду суцільною хвилястою лінією (рис. 6.9).

При побудові зображень симетричних предметів для зменшення числа проекцій половину вигляду суміщують з половиною розрізу (рис. 6.20). При цьому вигляд і розріз розділяються тонкою штрих-пунктирною лінією. Якщо зображення має дві осі симетрії, то допускається з'єднання чверті вигляду з трьома чвертями трьох розрізів.

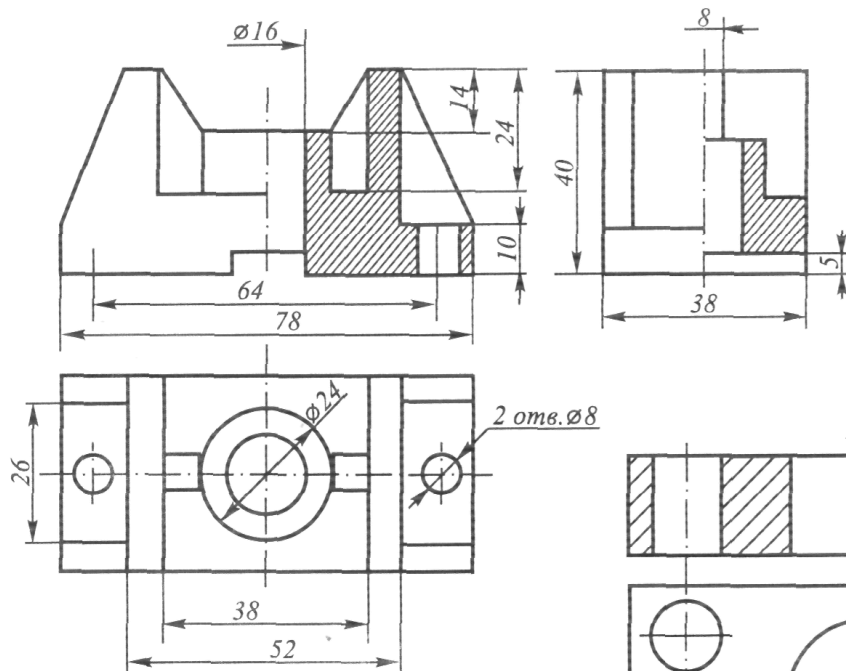


Рис. 6.20. Простий розріз.

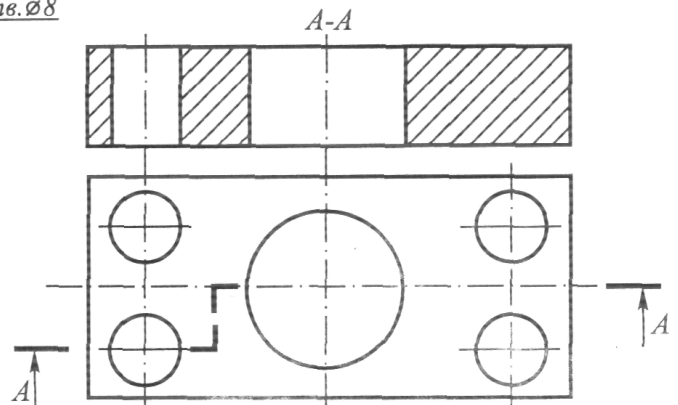


Рис. 6.21. Складний розріз.

**Перерізом** називається зображення фігури, яке міститься безпосередньо в уявній січній площині. Перерізи поділяються на **винесені** (рис. 6.23) і **накладені** (рис. 6.24). Винесений переріз виконується за межами вигляду або у розриві між його частинами. Контур винесеного перерізу показують суцільною основною лінією. Накладений переріз розміщують безпосередньо на вигляді. Контур такого перерізу зображують суцільною тонкою лінією (рис. 6.24). Якщо положення січної площини симетричного перерізу збігається з віссю його симетрії, січну площину не позначають. У решті випадків положення січної площини показують так, як для розрізів. Якщо січна площина проходить через вісь круглого отвору, то контур отвору показують повністю як на розрізі (рис. 6.25). Слід уникати випадків, коли переріз складається з окремих самостійних частин. У цьому разі слід використовувати розрізи.

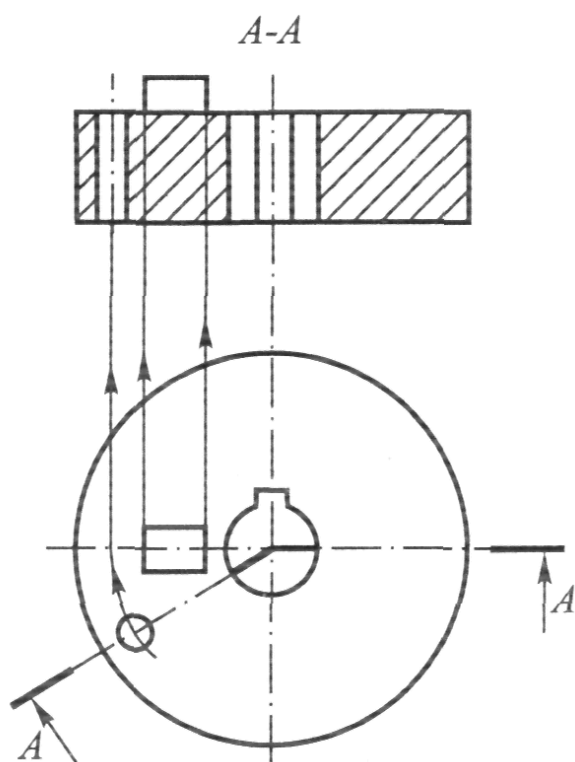


Рис. 6.22. Ламаний розріз.

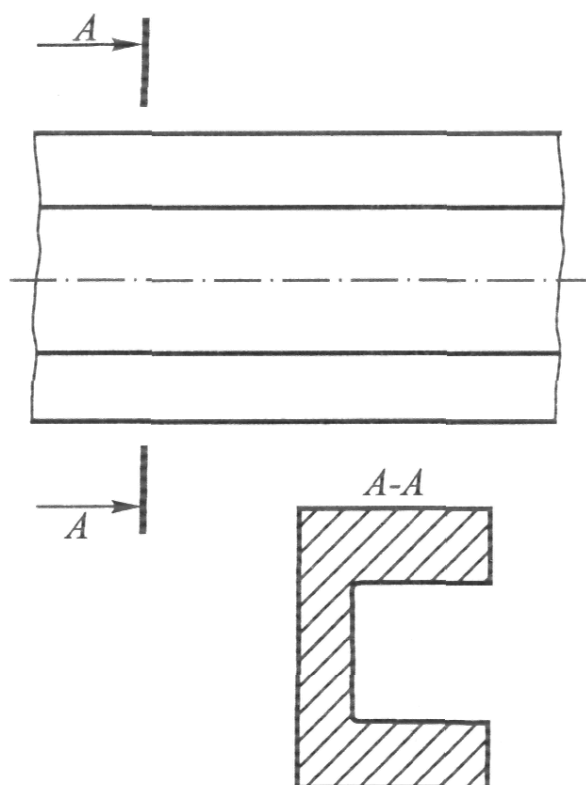


Рис. 6.23. Винесений переріз.

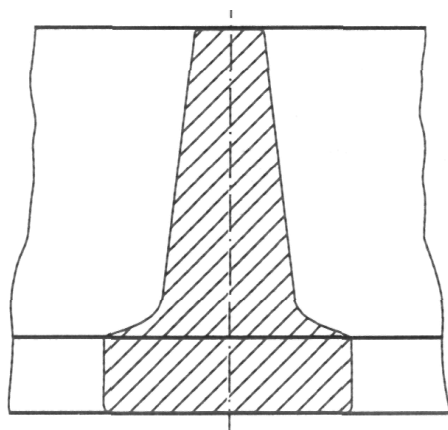


Рис. 6.24. Накладний переріз.

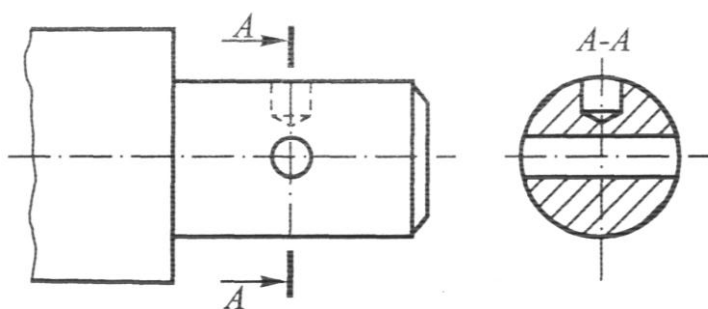


Рис. 6.25. Січна площина проходить через вісь круглого отвору.

**Виносимим елементом** називається окреме зображення (як правило, збільшене) якої-небудь частини предмета, яка потребує більш детального графічного зображення, додаткових розмірів тощо (рис. 6.26). При виконанні виносного елемента відповідне місце обводять на зображенні суцільною тонкою лінією-колом або овалом з лінією-виноскою і полицею. Над полицею великою літерою позначають виносний елемент, а над зображенням виносного елемента поряд із літерою у дужках вказують його масштаб. Виносний елемент може бути виглядом, розрізом або перерізом, незалежно від типу зображення, на якому показано його місце.

На зображеннях предметів допускаються деякі спрощення і умовності. Симетричні зображення допускається показувати до осі симетрії або більше половини з проведенням лінії обриву. Якщо предмет має кілька рівномірно розташованих однакових елементів (наприклад отворів), то допускається повністю показати один елемент із вказівкою їх кількості, а інші показують спрощено або умовно (рис. 6.20). На зображеннях

допускається пока-зувати спрощено лінії перетину поверхонь. Так, наприклад, на рис. 6.27 проекцію лінії четвертого порядку перетину двох циліндрів спрощено показано дугою кола, а на рис. 6.25 – прямою. Плавний перехід від однієї поверхні до іншої умовно показують суцільною тонкою лінією, яка не торкається контурних ліній (рис. 6.27).

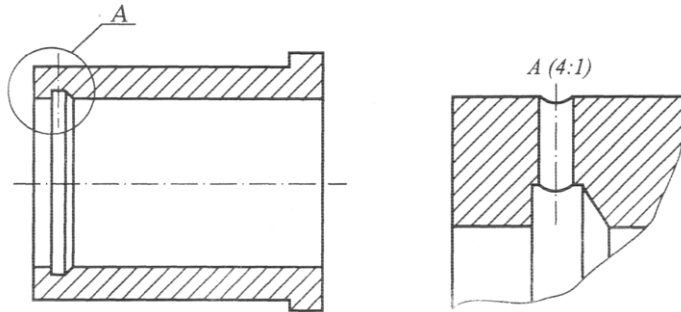


Рис. 6.26. Зображення виносного елемента.

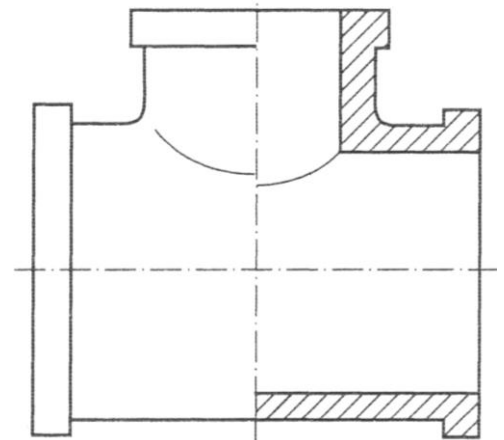


Рис. 6.27. Зображення плавного переходу від однієї поверхні до іншої.

#### 6.2.6. Позначення графічних матеріалів

Позначення графічні матеріалів на кресленнях регламентується ГОСТ 1.306-68. Загальне графічне позначення будь-якого матеріалу у перерізах наноситься у вигляді штриховки суцільними тонкими лініями з інтервалом 1-10 мм. Графічне позначення конкретних матеріалів наведено в табл. 6.5.

Похили паралельні лінії штриховки проводяться під кутом  $45^\circ$  до лінії контуру зображення, до його осі або до рамки формату. Якщо напрям ліній штриховки збігається з напрямом осі, контурних ліній або ліній рамки, то кут  $45^\circ$  замінюють кутами  $30^\circ$  або  $60^\circ$ .

Штриховка всіх перерізів однієї деталі повинна бути однаковою за напрямом і відстанню між лініями. Суміжні перерізи штрихуються у різні боки або з різним інтервалом між лініями (рис. 6.28). Вузькі площі перерізів (менше 2 мм) допускається тушувати (рис. 6.29). При великих площах перерізів допускається наносити штриховку вузькою стрічкою вздовж контурів перерізу (рис. 6.30).

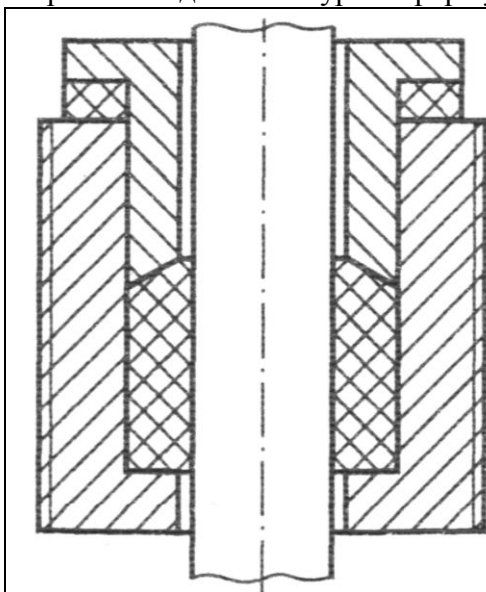


Рис. 6.28. Штрихування суміжних перерізів.

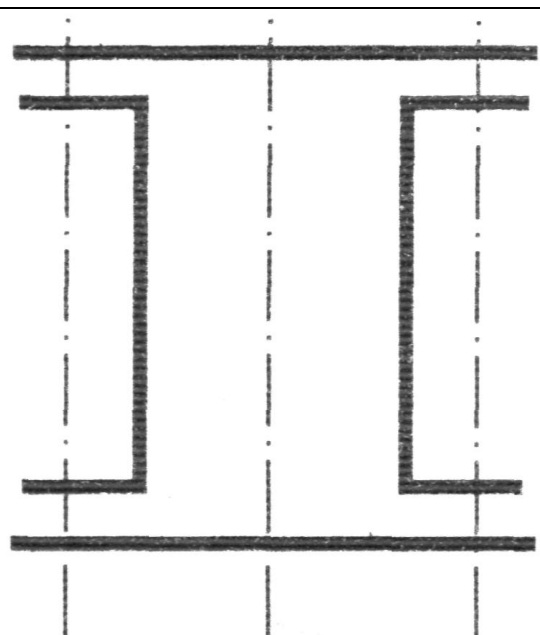
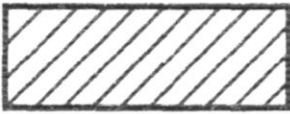
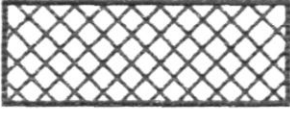
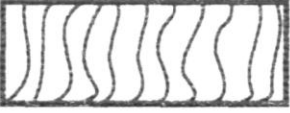
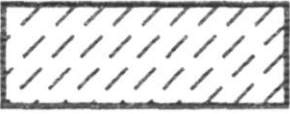
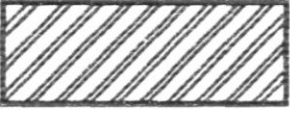
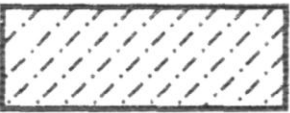


Рис. 6.29. Тушування вузьких площ перерізів (менше 2 мм).

Таблиця 6.5 – Графічне позначення конкретних матеріалів.

| Позначення                                                                          | Матеріал                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
|    | Метали, тверді сплави і композитні матеріали, до складу яких входить метал. |
|    | Неметалеві матеріали, за винятком наведених нижче                           |
|    | Деревина                                                                    |
|    | Каміння природне                                                            |
|    | Кераміка, силікатні матеріали для мурування, цегляні вироби                 |
|   | Бетон                                                                       |
|  | Скло та інші прозорі матеріали                                              |
|  | Рідина                                                                      |
|  | Ґрунт природний                                                             |

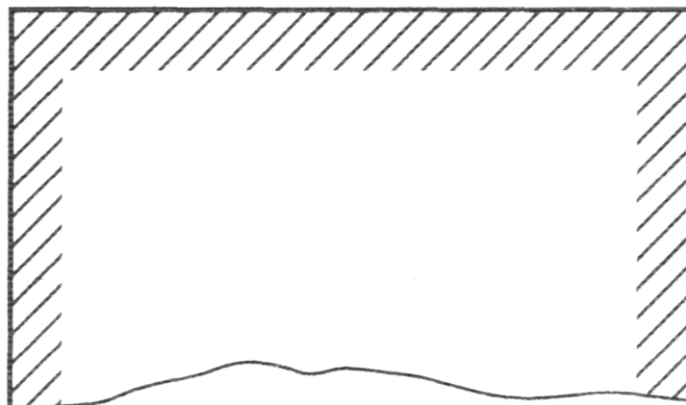


Рис. 6.30. Нанесення штриховки за великої площі перерізу вузькою стрічкою вздовж контурів перерізу.

### 6.2.7. Нанесення розмірів

Розміри на кресленнях наносять для визначення величини виробу і його елементів. Основні правила нанесення розмірів на кресленнях регламентуються ГОСТ 2.307-68. Число розмірів на зображеннях повинно бути мінімальним, але достатнім для виготовлення і контролю виробу. З одного боку, нестача хоча б одного розміру робить креслення неприйнятним, з іншого – на кресленнях не повинно бути зайвих розмірів, які можна підрахувати або визначити геометричними побудовами. Не дозволяється повторювати розміри одного елемента на різних зображеннях. Нанесення розмірів повинно відповідати технології і послідовності виготовлення виробу. Розміри повинні бути такими, щоб при виготовленні виробу не потрібно було займатись підрахунками. Розміри наносять за допомогою виносних та розмірних ліній і розмірних чисел (рис. 6.31). Розміри бувають лінійні та кутові. Лінійні розміри визначають довжину відрізка. Розмірну лінію наносять паралельно цьому відрізку, а виносні – перпендикулярно (рис. 6.31). В окремих випадках виносні лінії можуть утворювати гострий кут із розмірною. Розмірну лінію для кутового розміру (дуги або кута) проводять у вигляді дуги з центром у вершині кута або в центрі дуги. Виносні лінії при нанесенні розміру кута проводять радіально, а при нанесенні розміру дуги – перпендикулярно її хорді або радіально.

Розмірна лінія на обох кінцях, як правило, має стрілки, що упираються у виносні, осеві або контурні лінії. Форму розмірної стрілки показано на рис. 6.32. Розмірна лінія не може збігатись з будь-якою іншою лінією.

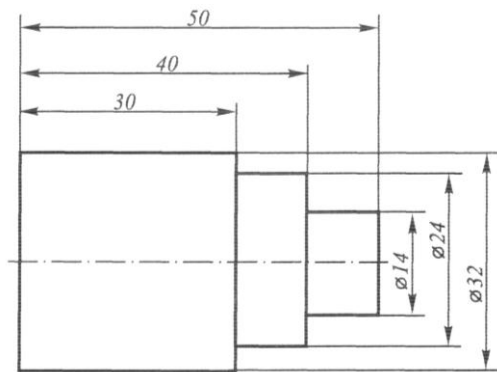


Рис. 6.31. Нанесення розмірів.

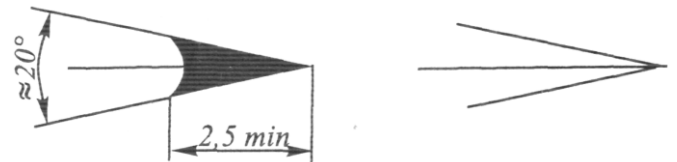


Рис. 6.32. Форма розмірної стрілки.

Виносні лінії повинні виходити за розмірні на 1-5 мм. Мінімальна відстань між паралельними розмірними лініями – 7 мм, а між розмірною і контурною – 10 мм. Слід уникати випадків перетину розмірних і виносних ліній.

Розмірне число проставляється у міліметрах, як правило, на відстані 1 мм над розмірною лінією ближче до її середини (рис. 6.31). Слід уникати нанесення розмірів невидимих елементів, які показано штриховою лінією. При нанесенні кількох паралельних або концентричних розмірних ліній розмірні числа над ними проставляють у шаховому порядку.

Якщо довжина розмірної лінії недостатня для розміщення стрілок, їх виносять за виносні лінії (рис. 6.33). При нестачі місця для стрілок на ланцюжку розмірних ліній замість розмірних стрілок наносять точки або засічки довжиною 2-4 мм під кутом  $45^\circ$  до розмірної лінії.

Контурна лінія розривається, якщо вона перетинається з розмірною стрілкою. Кут нахилу розмірного числа до горизонтальної лінії рамки повинен бути таким, щоб воно не виглядало перекинутим. Тому, якщо кут нахилу розмірної лінії до горизонтальної лінії знаходиться в межах від  $90^\circ$  до  $120^\circ$ , розмірне число виносять на полицю лінії-виноски (рис. 6.34). Аналогічне правило є і для кутових розмірів (рис. 6.35). Розмірне число виноситься на полицю і в тому випадку, коли для нього не вистачає місця над розмірною лінією (рис. 6.33).



Для нанесення розмірів радіусів, діаметрів, довжин сторін квадрата, уклону і конусності існують спеціальні знаки, які наносяться перед розмірним числом. Форма і розміри цих знаків регламентуються стандартом ГОСТ 2.301-81.

**Уклон** характеризує відхил прямої лінії від горизонтального положення і вимірюється тангенсом кута її нахилу (рис. 6.36). Розмір конусності наносять для елементів деталей конічної форми. **Конусністю** називається відношення діаметра основи конуса обертання до його висоти. Конусність зрізаного конуса визначається як відношення різниці діаметрів основ до висоти (рис. 6.37).

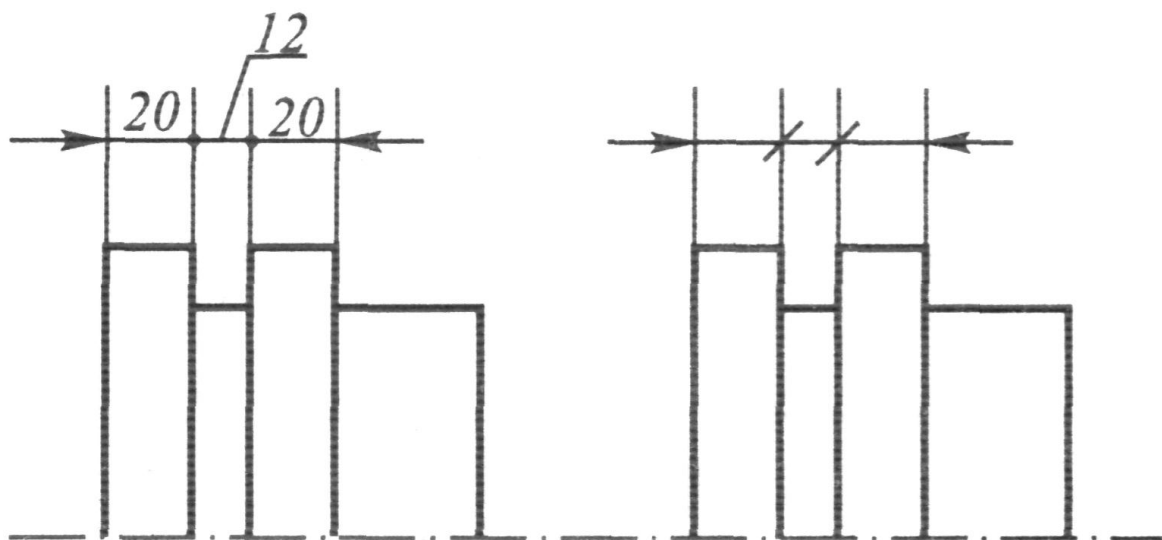


Рис. 6.33. Нанесення розмірних ліній за нестачі місця для стрілок.

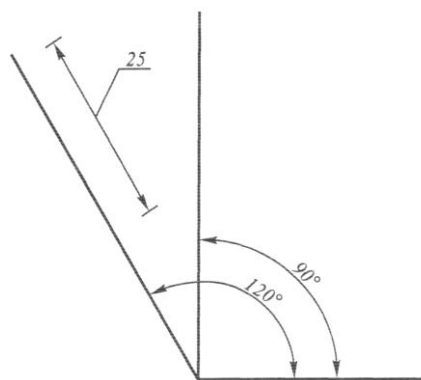


Рис. 6.34. Нанесення розмірного числа.

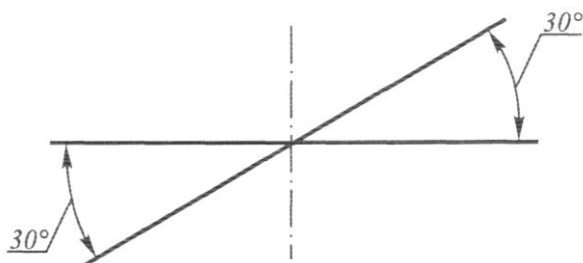


Рис. 6.35. Нанесення кутових розмірів.



Рис. 6.36. Нанесення уклону.

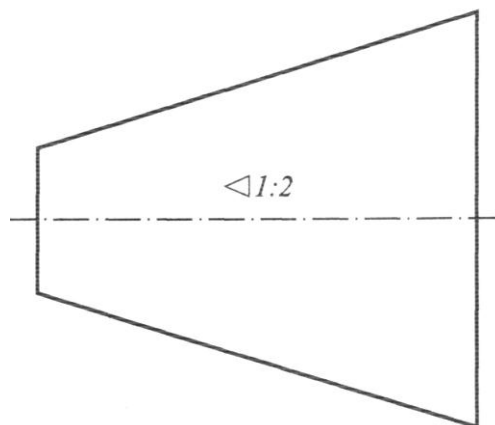


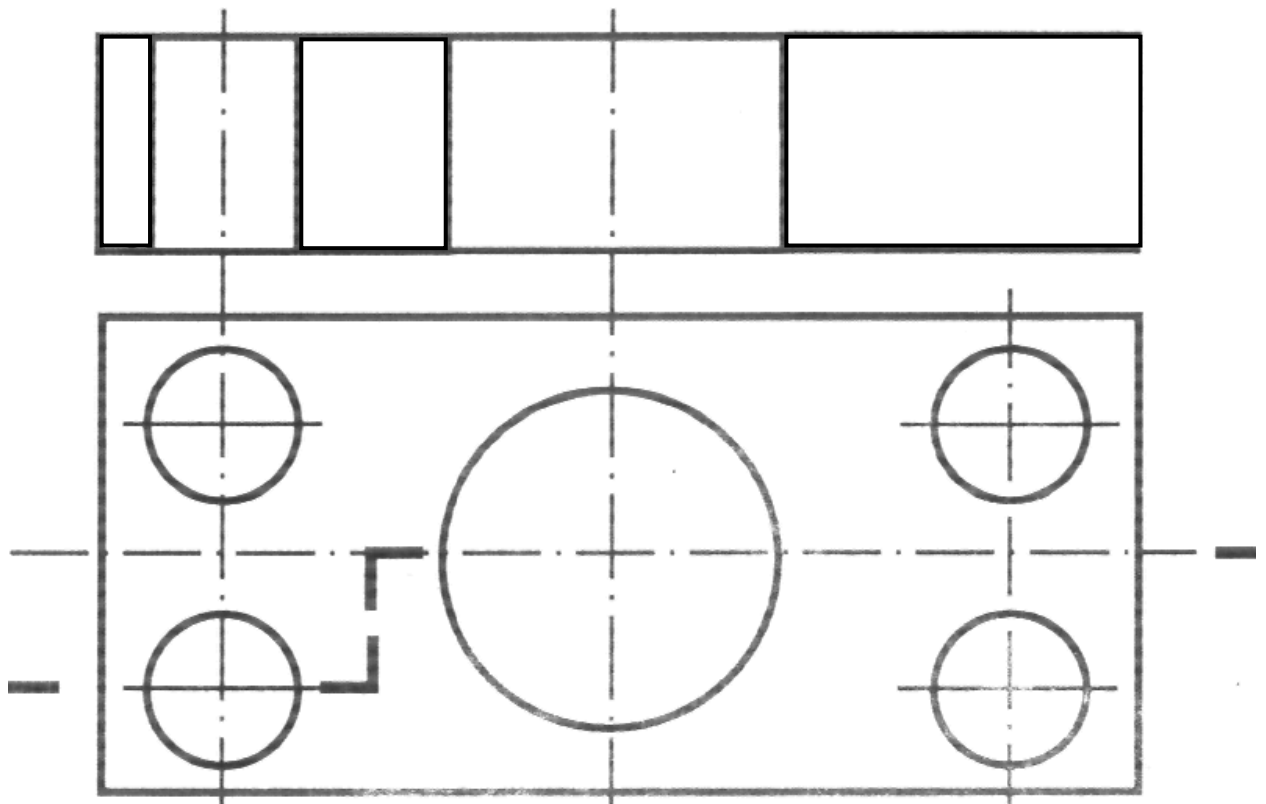
Рис. 6.37. Позначення конусності.

### Запитання для самоперевірки

1. Як перевіряється якість креслярського паперу для роботи тушшю?
2. Як загострюються креслярські олівці?
3. Яке призначення має рейшина?
4. Як перевіряється точність виготовлення косинців?
5. Як визначаються розміри основних форматів відносно до формату A0?
6. Яка величина називається масштабом?
7. В яких межах обираються товщини ліній на кресленнях?
8. Які типи шрифтів встановлює ГОСТ 2.304-81?
9. Які зображення називаються виглядами, розрізами, перерізами?
10. Які вигляди називаються додатковими і місцевими?
11. Як поділяються розрізи за положенням січної площини, за числом січних площин?
12. Згадайте правила виконання перерізів.
13. Як обирається кут нахилу ліній штриховки?
14. У яких межах обираються величини елементів виносних і розмірних ліній при нанесенні розмірів?

### ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ №6

1. Записати шрифтом А розміром 7 з нахилом  $75^\circ$  **«Не забувайте приносити на заняття креслярське приладдя і робочий зошит! Графічні завдання обов'язково приносити і показувати викладачеві на кожне заняття незалежно від їх готовності, аж поки вони не будуть підписані викладачем!»**
2. Нанести штриховку та розміри на кресленні деталі, покажіть позначення розрізу.



## Тема: Геометричні побудови

**Мета роботи** – систематизація і закріплення знань щодо виконання геометричних побудов – поділяти відрізки на рівні частини чи у заданому відношенні, поділяти навпіл кути, будувати перпендикулярні прямі, поділяти коло на рівні частини та побудови циркульних спряжень за заданими умовами.

### Завдання для виконання роботи

1. Виконати геометричні побудови – поділяти відрізки на рівні частини чи у заданому відношенні, поділяти навпіл кути, будувати перпендикулярні прямі, поділяти коло на рівні частини.
2. Побудувати циркульні спряження за заданими умовами.

### Порядок опрацювання завдань

**Місце проведення занять:** кафедра механізації (ауд.140а).

**Місце та час отримання консультації:** кафедра механізації (згідно з графіком).

**Обладнання та матеріали:** готувальня середніх розмірів, лінійка, косинці із кутами  $45^\circ$  та  $30^\circ$  і  $60^\circ$ , олівці "Конструктор" марки М, 2М, ТМ, Т (іноземного виробництва відповідно В, 2В, НВ, Н), кнопки, гумки.

**Форми підсумкового контролю:** захист практичних робіт.

Під *геометричними побудовами* розуміють точне графічне розв'язання деяких геометричних задач за допомогою заданого набору креслярських інструментів. Залежності від вибору інструментів визначається коло задач, які можуть бути розв'язаними цими засобами. Класичним набором інструментів для геометричних побудов є циркуль і лінійка без поділу на одиниці виміру. Умова будь-якої задачі на геометричні побудови повинна містити задані геометричні елементи (точки, прямі, кола і т.п.), елементи, які потрібно побудувати, і відношення, у яких шукані елементи повинні знаходитись до заданих або між собою. Далеко не всі геометричні задачі, навіть елементарні, можуть бути розв'язані за допомогою циркуля і лінійки. Так, наприклад, ще у XIX сторіччі було доведено неможливість розв'язання цими засобами задач квадратури круга, трисекції кута і подвоєння куба.

### 7.1. ПОБУДОВА ПЕРПЕНДИКУЛЯРА ДО ПРЯМОЇ. ПОДІЛ ВІДРІЗКА

На прямій  $m$  (рис. 7.1) задано точку  $O$ , через яку потрібно провести перпендикуляр до  $m$ . Довільним розхилом циркуля проводять коло  $n$  з центром  $O$ . З точок перетину  $A$  і  $B$  кола  $n$  з прямою  $m$ , як з центрів, проводять дві дуги довільного радіуса  $r_2$  до взаємного перетину у точках  $C$  і  $D$ . Три точки  $C$ ,  $O$ , і  $D$  належать шуканому перпендикуляру.

Аналогічні побудови виконуються для поділу відрізка  $AB$  навпіл. З точок  $A$  і  $B$  проводять дуги довільного радіуса  $r_2$  до взаємного перетину у точках  $C$  і  $D$ , які визначають пряму  $CD$ , що поділяє відрізок  $AB$  на дві рівні частини  $AO=OB$ .

Щоб провести перпендикуляр із точки  $N$  до прямої  $m$  (рис.7.2), з цієї точки довільним радіусом  $r_1$  на прямій  $m$  роблять засічки  $A$  і  $B$ . Відрізок  $AB$  поділяють навпіл засічками довільного радіуса  $r_2$ . Середина  $O$  відрізка  $AB$  і точки  $N$ ,  $C$ ,  $D$  належать шуканому перпендикуляру.

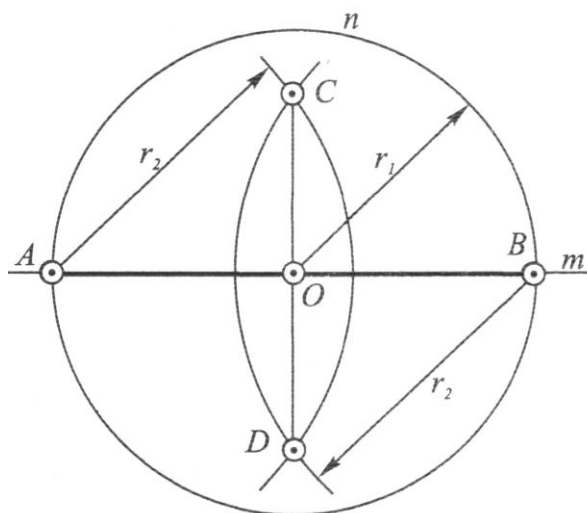


Рис. 7.1. Побудова перпендикуляра до прямої  $m$  та поділу відрізка  $AB$  навпіл.

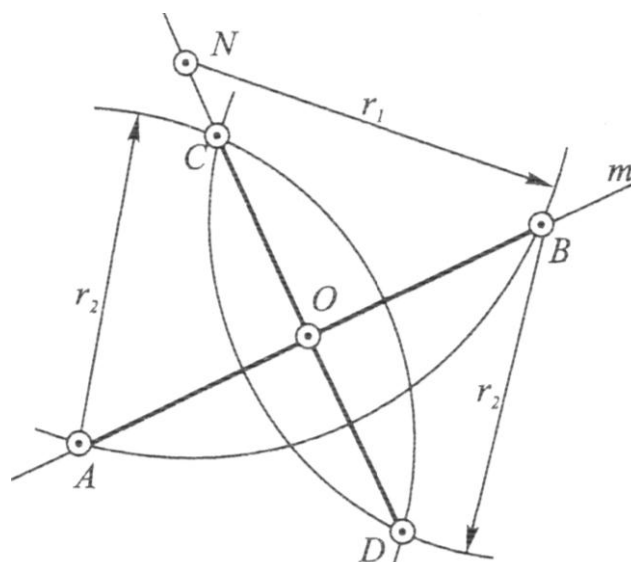


Рис. 7.2. Проведення перпендикуляра із точки  $N$  до прямої  $m$ .

Для поділу відрізка  $AB$  у заданому відношенні  $a:b$  (рис. 7.3) через точку  $A$  проводять довільну пряму  $m$ , на якій від точки  $A$  послідовно відкладають відрізки  $a$  і  $b$ . Точку  $D$  з'єднують з точкою  $B$ , а через точку  $C$  проводять пряму  $CE$  паралельно  $DB$ . Точка  $E$  поділяє відрізок  $AB$  у відношенні  $a:b$ .

Такий самий прийом застосовується для поділу відрізка  $AB$  на  $n$  рівних частин (рис. 7.4). На довільній прямій  $m$ , що проходить через точку  $A$ , послідовно відкладають  $n$  разів відрізок довільної довжини  $l$ . Кінцеву точку  $M$  з'єднують з точкою  $B$  відрізка  $AB$ , а через точки поділу прямої  $m$  проводять прямі лінії паралельно прямій  $MB$ , які перетинають відрізок  $AB$  у шуканих точках  $C, D, \dots$

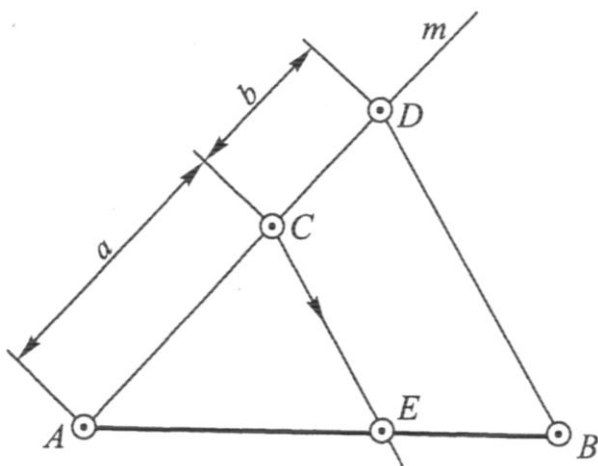


Рис. 7.3. Поділ відрізка  $AB$  у заданому відношенні  $a:b$ .

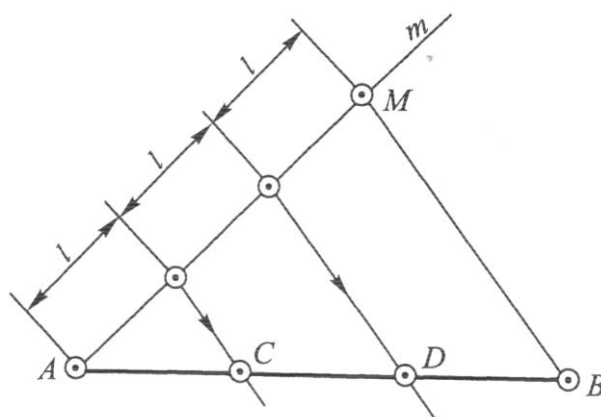


Рис. 7.4. Поділ відрізка  $AB$  на  $n$  рівних частин.

## 7.2. Побудова кута, що дорівнює заданому поділу кута навпіл

Для побудови кута  $A_2O_2B_2$  (рис. 7.5), що дорівнює заданому  $\alpha$ , з вершини  $O_1$  кута  $\alpha$  і з точки  $O_2$  довільним радіусом  $r_1$  проводять дуги  $m_1$  і  $m_2$ . На дузі  $m_2$  з точки  $A_2$  перетину дуги  $m_2$  з променем  $O_2n_2$  роблять засічку радіусом  $r_2=A_1B_1$ . Кут  $A_2O_2B_2$  є шуканим.

Для побудови бісектриси кута  $\beta$  з його вершини  $O$  довільним радіусом  $r_1$  проводять дугу  $MN$ . З точок  $M$  і  $N$  довільним радіусом  $r_2$  роблять засічки до взаємного перетину у точці  $K$ , яка разом з вершиною  $O$  кута  $\beta$  визначає його бісектрису (рис. 7.6).

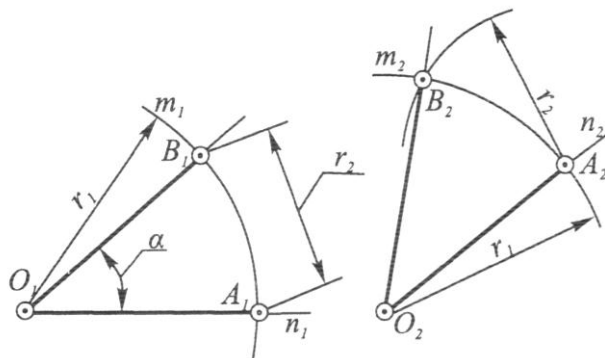


Рис. 7.5. Побудови кута  $A_2O_2B_2$ , що дорівнює заданому  $\alpha$

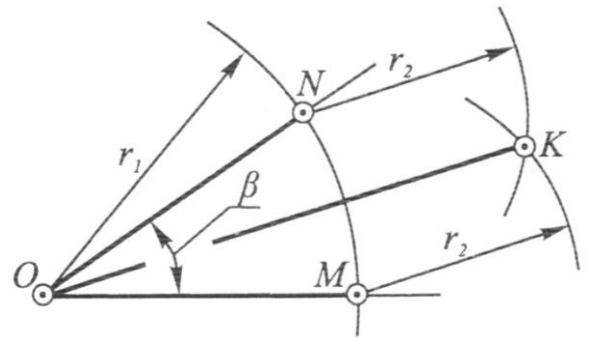


Рис. 7.6. Побудова бісектриси кута  $\beta$ .

### 7.3. Поділ кола на рівні частини

Поділ кола на рівні частини використовується для побудови правильних багатокутників. Видатний німецький математик Карл Фрідріх Гаус ще у 1801 році довів, що коло можна поділити на  $n$  рівних частин за допомогою циркуля і лінійки, якщо:

$$n = 2^i (2^{2k} + 1)(2^{2l} + 1) \dots (2^{2m} + 1),$$

де  $i, k, l, \dots, m$  – цілі невід'ємні числа. Серед першої десятки ряду натуральних чисел цій формулі задовольняють всі значення  $n$ , за винятком  $n = 7$ .

Два взаємно перпендикулярні діаметри кола перетинають його у вершинах вписаного квадрата (рис. 7.7). Вершини правильного вписаного восьмикутника будуються поділом кутів між діаметрами навпіл.

Для побудови вершин вписаного в коло правильного п'ятикутника (рис. 7.8) з середини  $C$  відрізка  $OB$  проводять дугу  $AD$  радіуса  $AC$ . Відрізок  $AD$  дорівнює довжині сторони шуканого п'ятикутника. Вершини правильного десятикутника будуються поділом дуг між вершинами п'ятикутника навпіл.

Для побудови вершин правильного вписаного шестикутника або трикутника коло поділяють його радіусом (рис. 7.9).

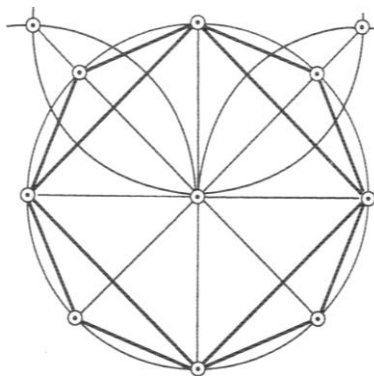


Рис. 7.7. Побудова вершини правильного вписаного восьмикутника.

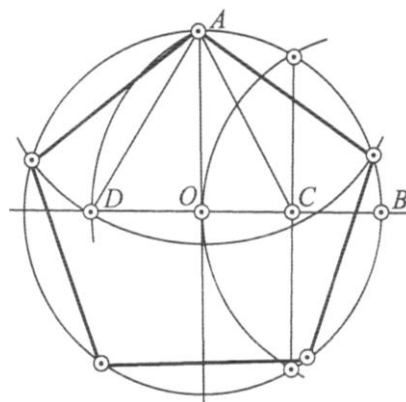


Рис. 7.8. Побудова вершин вписаного в коло правильного п'ятикутника.

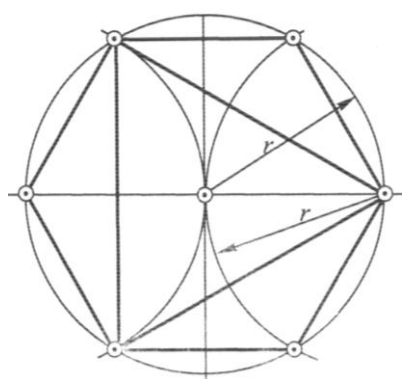


Рис. 7.9. Побудови вершин правильного вписаного шестикутника

#### 7.4. Дотичні прямі і кола

Дотичною  $t$  до кола  $m$  у точці  $A$  називається пряма, що проходить через точку  $A$  перпендикулярно до радіуса  $OA$  (рис. 7.10). Саме коло  $m$  називається дотичним до прямої  $t$ . Точка  $A$  називається точкою дотику. Дотична  $t$  до кола  $m$  у точці  $A$  будується як перпендикуляр до радіуса  $OA$  в точці  $A$  (див. рис. 7.1).

Дотичними називаються два кола  $m$  і  $n$ , які мають одну дотичну у спільній точці  $A$  (рис. 7.10). Дотик двох кіл, центри яких розміщені з одного боку від спільної дотичної  $t$ , називається внутрішнім, а якщо центри кіл розміщені з різних боків від дотичної  $t$ , дотик називається зовнішнім. При побудові дотичних прямих і кіл вважається, що одна з фігур завжди є заданою, а другу, дотичну до першої, потрібно побудувати за заданими геометричними умовами. Серед цих умов можуть бути задані величина радіуса або положення центра дотичного кола, умова проходження дотичної прямої або кола через задану точку, зокрема через точку дотику тощо. Виникає питання, яка сукупність умов є необхідною і достатньою для побудови дотичної прямої або кола. Через точку  $N$ , наприклад, можна провести безліч дотичних кіл до кола  $m$  (рис. 7.11), а якщо задано центр  $S$  дотичного кола і його радіус, то така сукупність умов визначає єдине коло  $n$ , яке у загальному випадку не дотикатиметься до кола  $m$  (рис. 7.12).

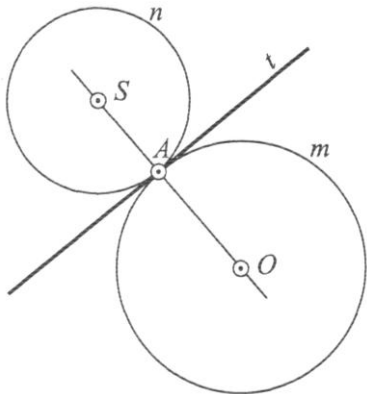


Рис. 7.10. Побудова дотичною  $t$  до кола  $m$  у точці  $A$ .

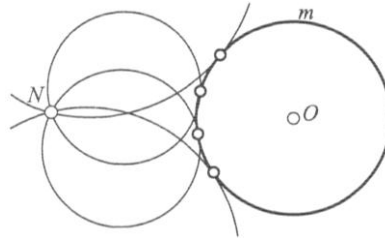


Рис. 7.11. Побудова безлічі дотичних кіл до кола  $m$  через точку  $N$ .

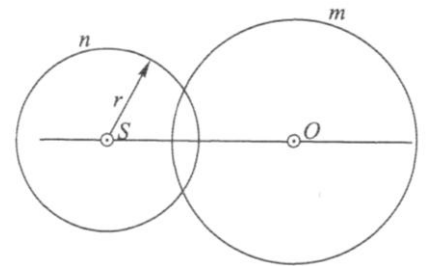


Рис. 7.12. Побудова кола  $n$  з центром  $S$  дотичного кола і його радіусом.

При побудові дотичних прямих і кіл слід керуватись такими властивостями:

- а) дотична пряма до кола і його радіус, проведений через точку дотику, складають прямий кут;
- б) точка дотику двох кіл належить прямій, що з'єднує їх центри (рис. 7.10);
- в) геометричним місцем центрів дотичних до прямої однакових кіл є дві прямі, розміщені на відстані радіуса кола від заданої прямої паралельно їй (рис. 7.13);
- г) геометричним місцем центрів однакових кіл радіуса  $r_2$ , дотичних до заданого кола  $m$  радіуса  $r_1$  є два кола з радіусами  $|r_1 + r_2|$  і  $|r_1 - r_2|$ , концентричних заданому колу  $m$  (рис. 7.14);
- д) геометричним місцем центрів однакових кіл, що проходять через задану точку  $N$ , є таке саме коло з центром у точці  $N$  (рис. 7.15).

Задача вважається розв'язаною, якщо визначено дві точки дотичної прямої, одна з яких є точкою дотику, або визначеними є точка дотику і центр  $S$  дотичного кола  $n$ .

Для проведення дотичної  $t$  до кола  $m$  через зовнішню точку  $N$  (рис. 7.16) достатньо побудувати прямий кут  $NMO$ , вершина  $M$  якого належить колу  $m$ . Як відомо, вписаний в коло кут, що спирається на діаметр, дорівнює  $90^\circ$ . Тому на відрізок  $ON$ , як на діаметрі,

будують коло  $n$ , яке перетинається з колом  $m$  у шуканій точці  $M$  дотику. Пряма  $MN$  є дотичною до кола  $m$ .

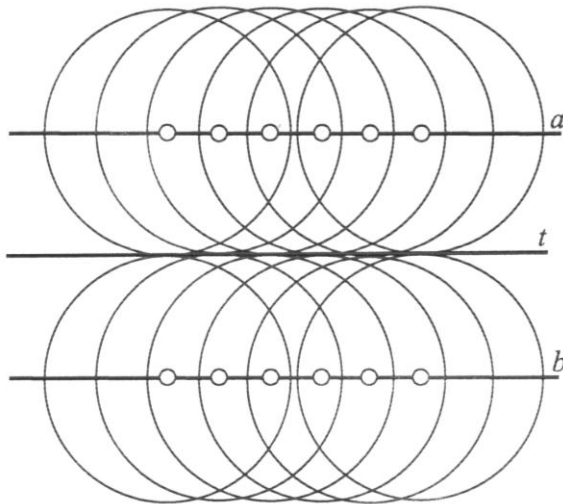


Рис. 7.13. Побудова центрів дотичних до прямої однакових кіл.

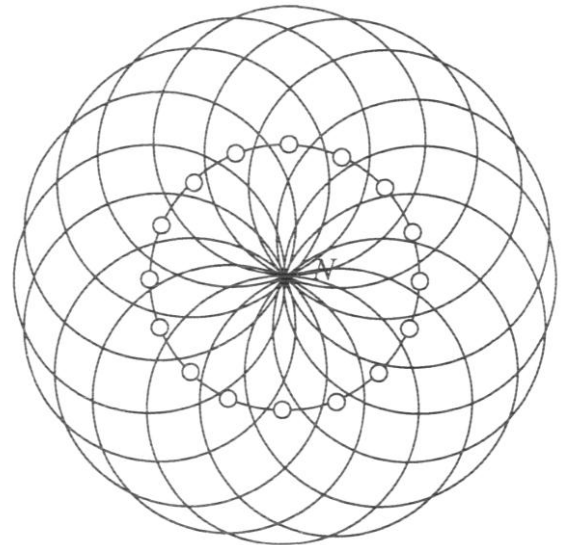


Рис. 7.15. Побудова центрів однакових кіл, що проходять через задану точку  $N$ .

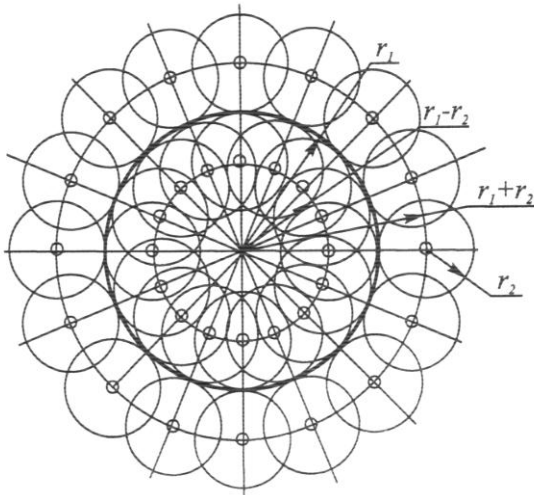


Рис. 7.14. Побудова центрів однакових кіл радіуса  $r_2$ , дотичних до заданого кола  $m$  радіуса  $r_1$ .

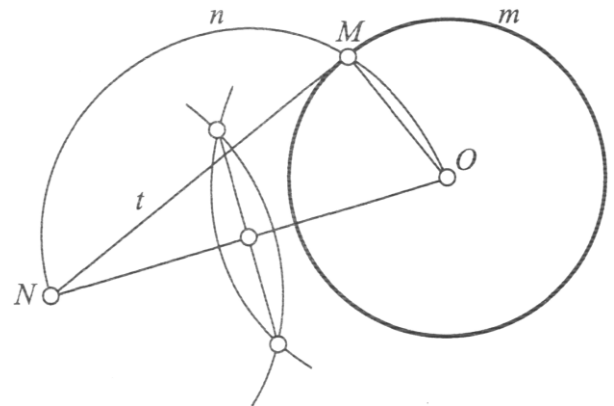


Рис. 7.16. Побудова дотичної  $t$  до кола  $m$  через зовнішню точку  $N$ .

На рис. 7.17 показано побудову кола  $n$  радіуса  $r$ , яке дотикається до заданого кола  $m$  у точці  $M$ . Для розв'язання задачі потрібно визначити положення центра  $S$  дотичного кола  $n$ . Через центр  $O$  заданого кола  $m$  і точку дотику  $M$  проведено пряму  $a$ , на якій засічкою радіуса  $r$  визначені центри  $S_1$  і  $S_2$  дотичних кіл.

На рис. 7.18 побудовано коло  $n$ , що дотикається до кола  $m$  у точці  $M$  і проходить через задану точку  $N$ . Центр  $S$  шуканого кола, з одного боку, належить перпендикуляру  $a$ , що проходить через середину відрізка  $MN$ , а з іншого – прямій  $b$ , що з'єднує центр  $O$  з точкою дотику  $M$ . Центр  $S$  визначається як точка перетину прямих  $a$  і  $b$ .

На рис. 7.19 через задану точку  $N$  проведені кола  $n_1, n_2, n_3, n_4$  радіуса  $r_2$ , які дотикаються до заданого кола  $m$  радіуса  $r_1$ . За заданими умовами необхідно визначити положення центрів дотичних кіл і точок дотику. З центра  $O$  заданого кола проводять дві дуги радіусів  $|r_1 + r_2|$  і  $|r_1 - r_2|$ , на яких з точки  $N$  радіусом  $r_2$  роблять засічки. Точки  $P, Q, R, S$  є центрами дотичних кіл  $n_1, n_2, n_3, n_4$ . Точки дотику  $A, B, C, D$  визначаються за пере-

тином кола  $m$  з прямими, що з'єднують центр  $O$  з центрами дотичних кіл. Якщо точку  $N$  задано зовні кола  $m$ , то задача має чотири розв'язки при  $2r_2 - r_1 > NO$  (рис. 7.19), три розв'язки при  $2r_2 - r_1 = NO$  (рис. 7.20), два розв'язки при  $2r_2 + r_1 > NO > 2r_2 - r_1$  (рис. 7.21), один –  $2r_2 + r_1 = NO$  (рис. 7.22) і жодного – при  $2r_2 + r_1 < NO$ . Аналогічні варіанти розв'язання задачі мають місце, якщо точку  $N$  задано всередині кола  $m$ .

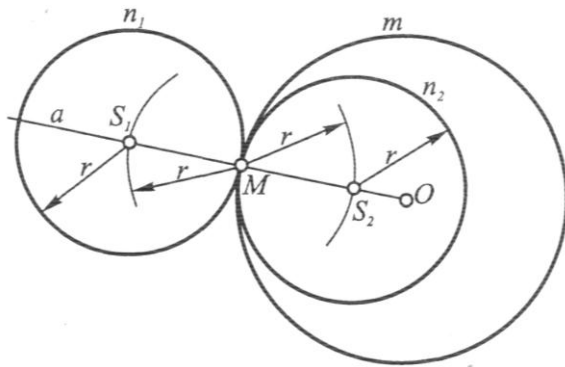


Рис. 7.17. Побудову кола  $n$  радіуса  $r$ , яке дотикається до заданого кола  $m$  у точці  $M$ .

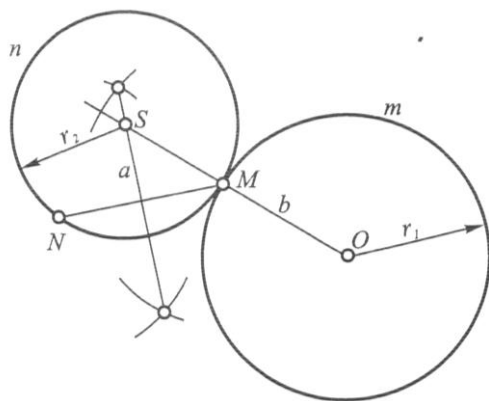


Рис. 7.18. Побудова кола  $n$ , що дотикається до кола  $m$  у точці  $M$  і проходить через задану точку  $N$ .

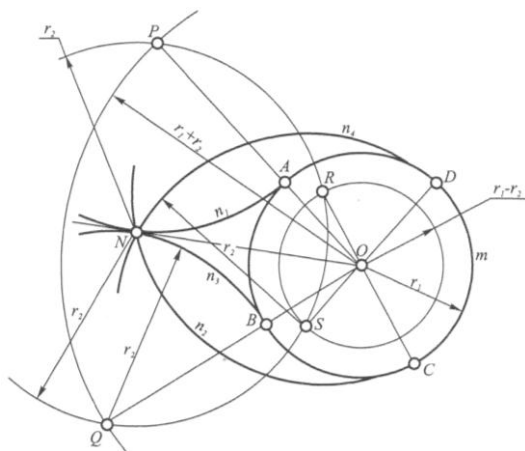


Рис. 7.19. Проведення кіл  $n_1, n_2, n_3, n_4$  радіуса  $r_2$  через задану точку  $N$ , які дотикаються до заданого кола  $m$  радіуса  $r_1$ .

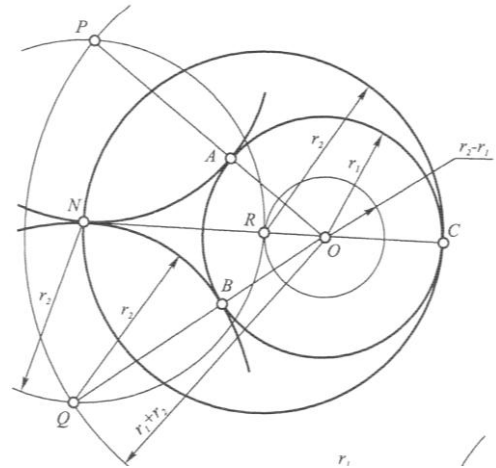


Рис. 7.20. Три розв'язки при  $2r_2 - r_1 = NO$ .

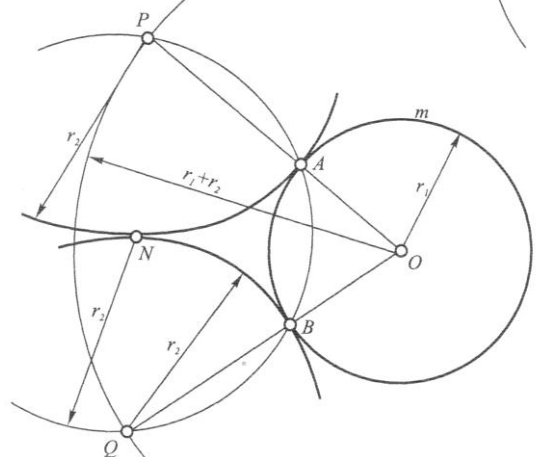


Рис. 7.21. Два розв'язки при  $2r_2 + r_1 > NO > 2r_2 - r_1$

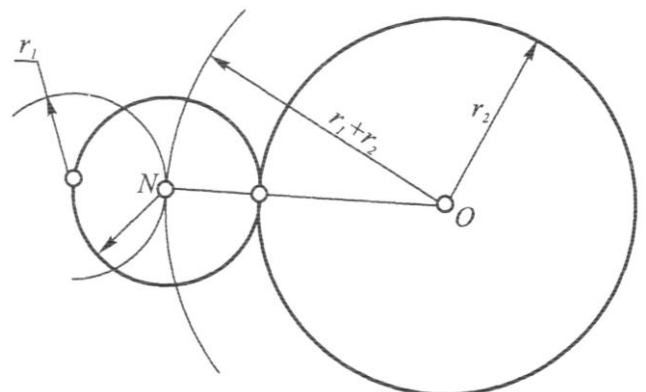


Рис. 7.22. Один розв'язок  $2r_2 + r_1 = NO$ .



## 7.5. Циркульні спряження

Циркульними спряженнями називають гладенькі з'єднання дуг кіл і відрізків прямих у різних сполученнях. Спряження застосовуються для побудови складних криволінійних контурів різноманітних машинобудівних виробів, архітектурних деталей і т.п. На рис. 7.23 і 7.24 показано контури ручки і архітектурної вази, криволінійні контури яких складаються з кількох дуг кіл. В основі побудови спряжень знаходяться розглянуті побудови дотичних прямих і кіл.

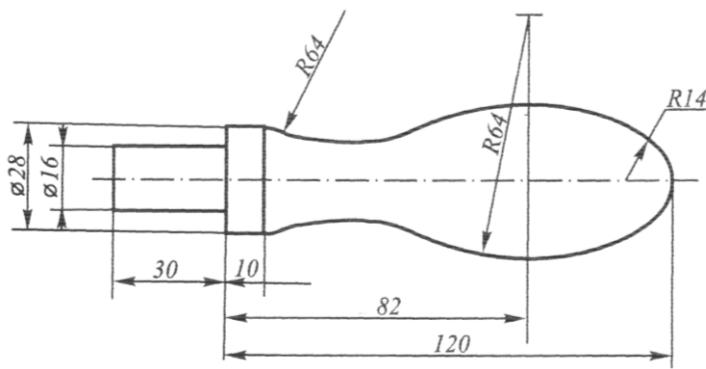


Рис. 7.23. Побудова контурів ручки.

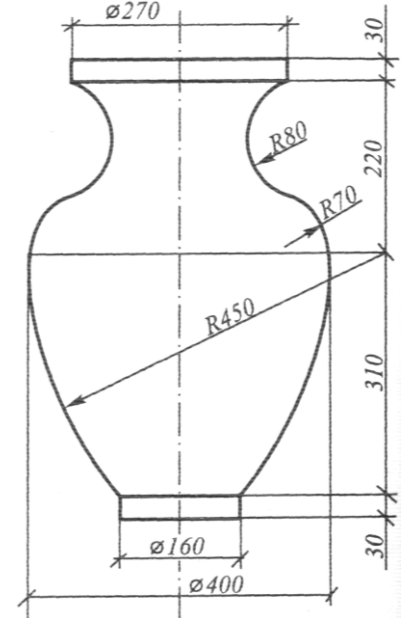


Рис. 7.24. Побудова контурів архітектурної вази.

Центри дуг спрягаючих кіл називаються центрами спряження, а точки взаємного дотику елементів – точками спряження. При побудові спряжень потрібно коректно формулювати умову задачі. Ця коректність визначається порівнянням числа параметрів спрягаючих елементів із числом параметрів поставлених вимог (параметричним аналізом).

На рис. 7.25. показано спряження двох дуг кіл  $m$  і  $n$  відповідно радіусів  $r_1$  і  $r_2$  відрізком  $MN$  прямої. Умова дотику прямої до двох кіл визначається двома параметрами, що відповідає двом параметрам спрягаючої прямої. З центра  $S$  більшого кола проводять коло радіуса  $r_2 - r_1$  (при зовнішньому спряженні) або  $r_2 + r_1$  (при змішаному спряженні, рис. 7.26) і проводять дотичну  $OB$  до цього кола так, як було показано на рис. 7.16. Точка спряження  $N$  будується в результаті перетину прямої  $BS$  з колом  $n$ , а для визначення точки спряження  $M$  через центр  $O$  проводять пряму  $OM$  паралельно  $BS$  до перетину з колом  $m$ . Взагалі, до двох кіл можна провести чотири спільних дотичних, якщо  $r_2 + r_1 < OS$ , три – при  $r_2 + r_1 = OS$ , дві, якщо  $r_2 + r_1 > OS$  /  $r_2 - r_1$ , одну – при  $r_2 - r_1 = OS$  і жодної – при  $r_2 - r_1 > OS$ .

При спряженні двох елементів дугою кола два параметри кола визначаються умовами дотику до двох заданих ліній, а третій залишається вільним, і тому можна провести безліч дуг, що спрягають задані елементи. Для визначеності задачі потрібно задати додаткову умову, яка зв'яже вільний параметр спрягаючого кола. Такою умовою може бути задання радіуса дуги спрягаючого кола, умова його проходження через задану точку (зокрема через точку спряження) або будь-яка інша умова, що відповідає одному параметру кола.

На рис. 7.27 показано спряження двох заданих прямих  $a$  і  $b$  дугою кола радіуса  $r$ . Потрібно визначити центр спряження (центр дуги спрягаючого кола) і точки спряження (точки дотику). Задачу сформульовано коректно, тому що дві умови дотику дуги

спрягаючого кола до прямих  $a$  і  $b$  та задання довжини його радіуса відповідають трьом параметрам, які повністю визначають спрягаюче коло. На відстані  $r$  від прямих  $a$  і  $b$  паралельно до них проводять прямі  $m$  і  $n$ , точкою перетину яких є центр спряження. Точки  $A$  і  $B$  спряження визначаються з умови  $AO \perp a$  і  $OB \perp b$ .

На рис. 7.28 і 7.29 показано побудову спряження дуги кола  $m$  радіуса  $r_1$  і відрізка прямої  $a$  дугою кола  $n$  заданого радіуса  $r_2$ . Задані умови, як і у попередньому прикладі, відповідають трьом параметрам спрягаючого кола. Центр  $S$  дуги спрягаючого кола буде як точка, рівновіддалена від заданих кола і прямої. На відстані  $r_2$  від прямої  $a$  проводять паралельно їй пряму  $b$ , на якій з центру  $O$  роблять засічку радіусом  $r_2 + r_1$  за зовнішнього спряження (рис. 7.27) або  $r_2 - r_1$  – за внутрішнього спряження (рис. 7.28). Точка  $S$  є центром спряження. Через центр  $S$  проводять перпендикуляр до прямої  $a$ , основа  $N$  якого є точкою спряження на прямій  $a$ . Точка спряження  $M$  визначається в результаті перетину кола  $m$  з прямою, що з'єднує центри  $O$  і  $S$ .

На рис. 7.30 показано побудову зовнішнього спряження дуг двох кіл –  $m$  і  $n$  – відповідно радіусів  $r_1$  і  $r_2$  дугою третього кола із заданим радіусом  $r_3$ . Центр  $T$  спряження знайдено в результаті перетину засічок, які зроблено з центрів  $O$  і  $S$  відповідно радіусами  $r_1 + r_3$  і  $r_2 + r_3$ . Точки  $M$  і  $N$  спряження визначено в результаті перетину прямих, що з'єднують центри кіл із центром  $T$ .

При внутрішньому спряженні дуг двох заданих кіл  $m$  і  $n$  дугою заданого радіуса  $r_3$  (рис. 7.31) засічки з центрів  $O$  і  $S$  проводять відповідно радіусами  $r_3 - r_1$  і  $r_3 - r_2$ .

Змішаним спряженням дуг двох кіл дугою третього кола називається спряження, яке у своєму складі має як внутрішній, так і зовнішній дотик кіл. На рис. 7.32 показано побудову змішаного спряження дуг двох кіл  $m$  і  $n$  дугою кола  $k$  заданого радіуса  $r_3$ .

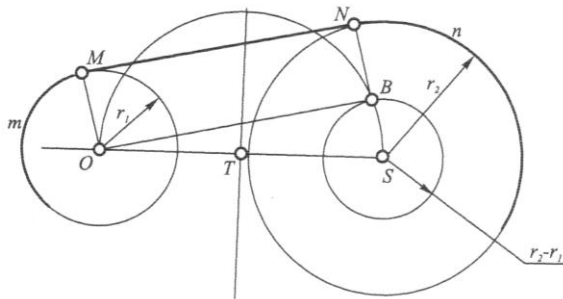


Рис. 7.25. Побудова спряження двох дуг кіл  $m$  і  $n$  відповідно радіусів  $r_1$  і  $r_2$  відрізком  $MN$  прямої.

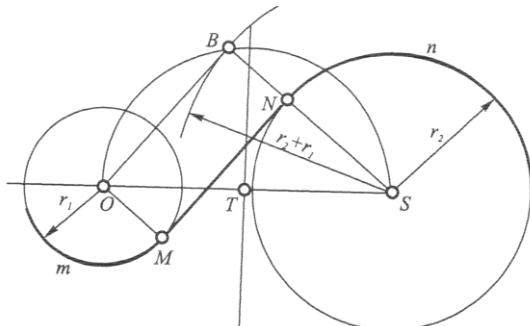


Рис. 7.26. Побудова спряження двох дуг кіл  $m$  і  $n$  відповідно радіусів  $r_1$  і  $r_2$  відрізком  $MN$  прямої за змішаного спряження.

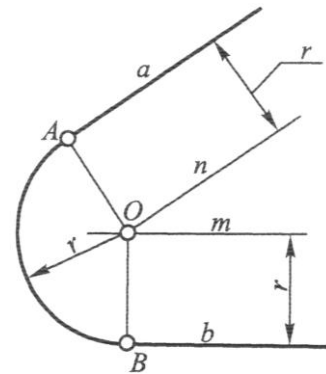


Рис. 7.27. Побудова спряження двох заданих прямих  $a$  і  $b$  дугою кола радіуса  $r$ .

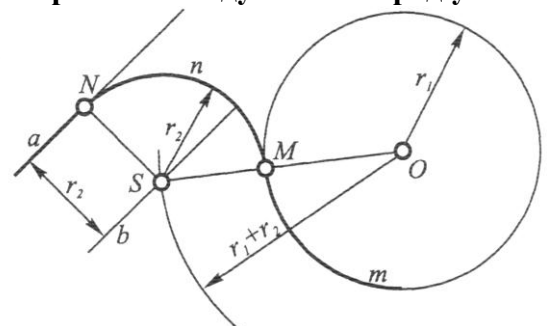


Рис. 7.28. Побудова спряження дуги кола  $m$  радіуса  $r_1$  і відрізка прямої  $a$  дугою кола  $n$  заданого радіуса  $r_2$ .

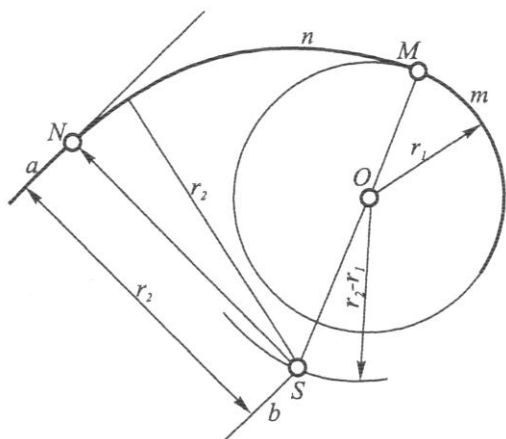


Рис. 7.29. Побудова спряження дуги кола  $m$  радіуса  $r_1$  і відрізка прямої  $a$  дугою кола  $n$  заданого радіуса  $r_2$

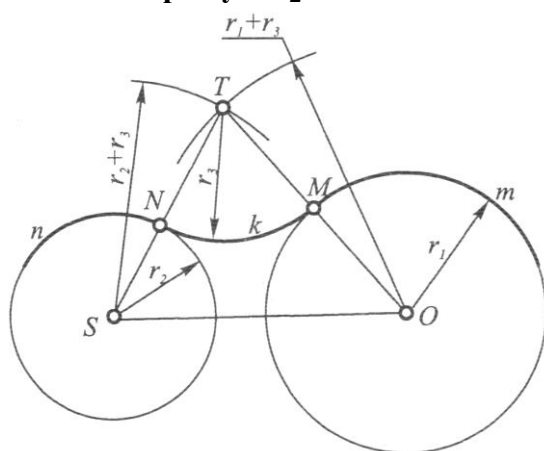


Рис. 7.30. Побудову зовнішнього спряження дуг двох кіл –  $m$  і  $n$  – відповідно радіусів  $r_1$  і  $r_2$  дугою третього кола із заданим радіусом  $r_3$ .

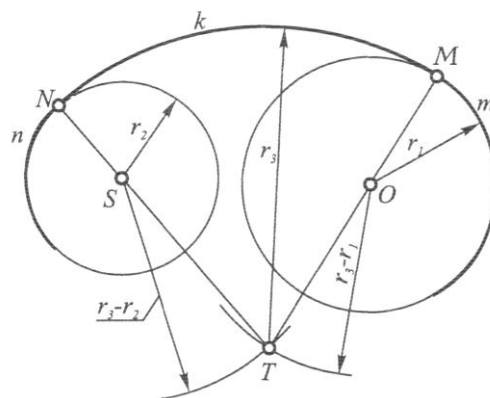


Рис. 7.31. Побудова внутрішнього спряження дуг двох заданих кіл  $m$  і  $n$  дугою заданого радіуса  $r_3$ .

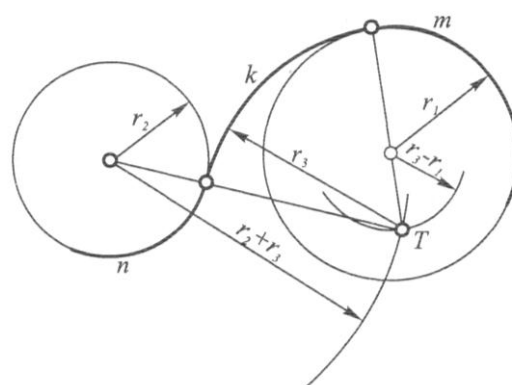


Рис. 7.32. Побудова змішаного спряження дуг двох кіл  $m$  і  $n$  дугою кола  $k$  заданого радіуса  $r_3$ .

Умова задачі спряження двох ліній може бути такою, що її неможливо розв'язати за допомогою тільки одного спрягаючого елемента. У такому разі доводиться добирати сукупність таких елементів. На рис. 7.33 показано побудову складного спряження прямої  $a$  з дугою кола  $m$ , на яких задано точки спряження  $A$  і  $B$ . Задані умови визначаються чотирма параметрами (2 параметри – умови дотику до заданих ліній і 2 параметри – умови проходження спрягаючих ліній через точки  $A$  і  $B$ ). Спряження дугою одного кола побудувати неможливо, оскільки число параметрів заданих умов (4) перевищує число параметрів кола (3). Тому для побудови спряження обираємо коло і пряму, які у сумі визначаються 5 параметрами. Тепер до параметрів заданих умов додається ще один параметр (умова взаємного дотику спрягаючих ліній), і в результаті число параметрів спрягаючих елементів відповідає числу параметрів умов спряження. Через точку  $B$  проводимо до кола  $m$  дотичну перпендикулярно до  $OB$  так, як було показано на рис. 7.1. Будуємо бісектрису  $l$  кута  $ACD$  так, як було показано на рис. 7.6.

Перпендикуляр до прямої  $a$  з основою в точці  $A$  перетинає цю бісектрису у точці  $S$ , яка є центром спрягаючої дуги. Точка спряження  $D$  визначається в результаті перетину прямої  $BC$  з перпендикуляром до неї з точки  $S$ .

Так само, як і при побудові дотичних кіл, задачі спряження можуть мати кілька розв'язань, але побудова конкретного криволінійного контуру визначає, яке саме розв'язання з можливих потрібно обрати.

В практиці креслення часто використовують замкнені криві, складені з дуг кіл, для наближеної заміни лекальних кривих, зокрема еліпса. Такі складені криві іноді називають овалами, хоча математичний термін "овал" має інше значення.

На рис. 7.34 показано побудову такої кривої за довжинами двох осей  $AB$  і  $CB$ . З центра  $O$  робиться засічка радіусом  $OA$  на вертикальній осі  $CD$ , а з точки  $C$  – засічка радіусом  $CE$  на відрізку  $AC$ , що з'єднує вершини кривої. Через середину  $H$  відрізка  $AF$  проводять перпендикуляр, який перетинається з осями у центрах  $P$  і  $R$  шуканих дуг кіл. Ще два центри –  $S$  і  $T$  – визначаються симетрично центрам  $P$  і  $R$  відносно осей. Відрізки  $PA$  і  $RC$  є радіусами спряжених дуг складеної кривої. Точки спряження визначаються при перетині цих дуг з прямими, що з'єднують побудовані центри. Цей спосіб значно спрощується, якщо осі складеної кривої мають співвідношення  $\frac{AB}{CD} = \sqrt{3}$ .

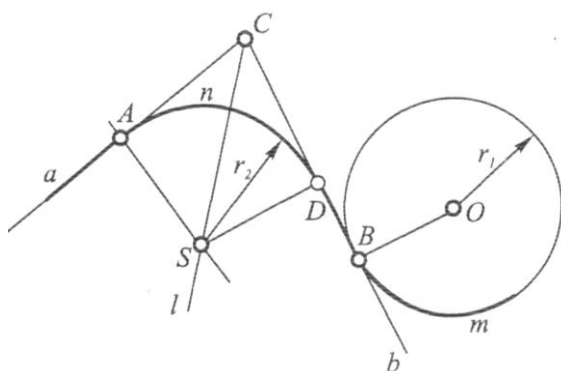
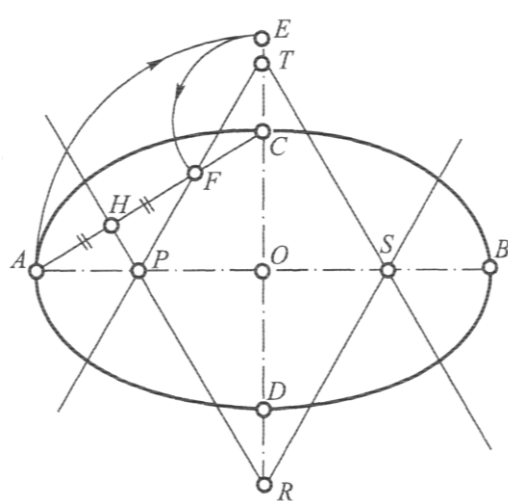


Рис. 7.33. Побудова складного спряження прямої  $a$  з дугою кола  $m$ , на яких задано точки спряження  $A$  і  $B$ .



7.34. Побудова кривої за довжинами двох осей  $AB$  і  $CB$ .

На рис. 7.35 таку криву вписано у ромб з кутами  $LKN=LMN=60^\circ$ . Середини сторін ромба є точками спряження. Прямі, що з'єднують точки спряження з вершинами  $L$  і  $N$  ромба, перетинаються між собою у центрах спряження  $O$  і  $P$ . Двома іншими центрами є вершини  $L$  і  $N$  ромба. Така складена крива використовується для наближеної заміни ізометричного зображення кола у координатних площинах.

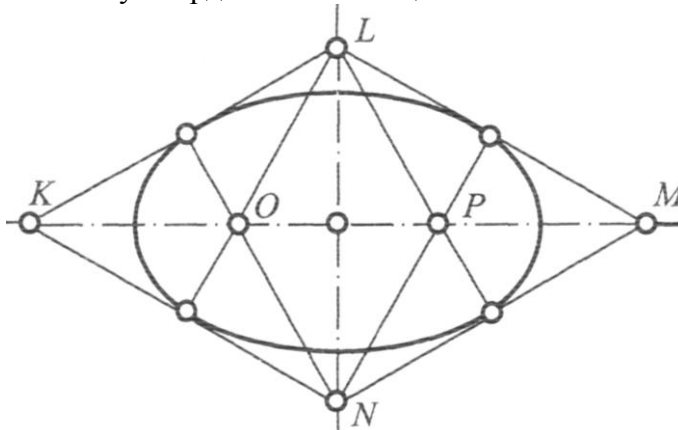


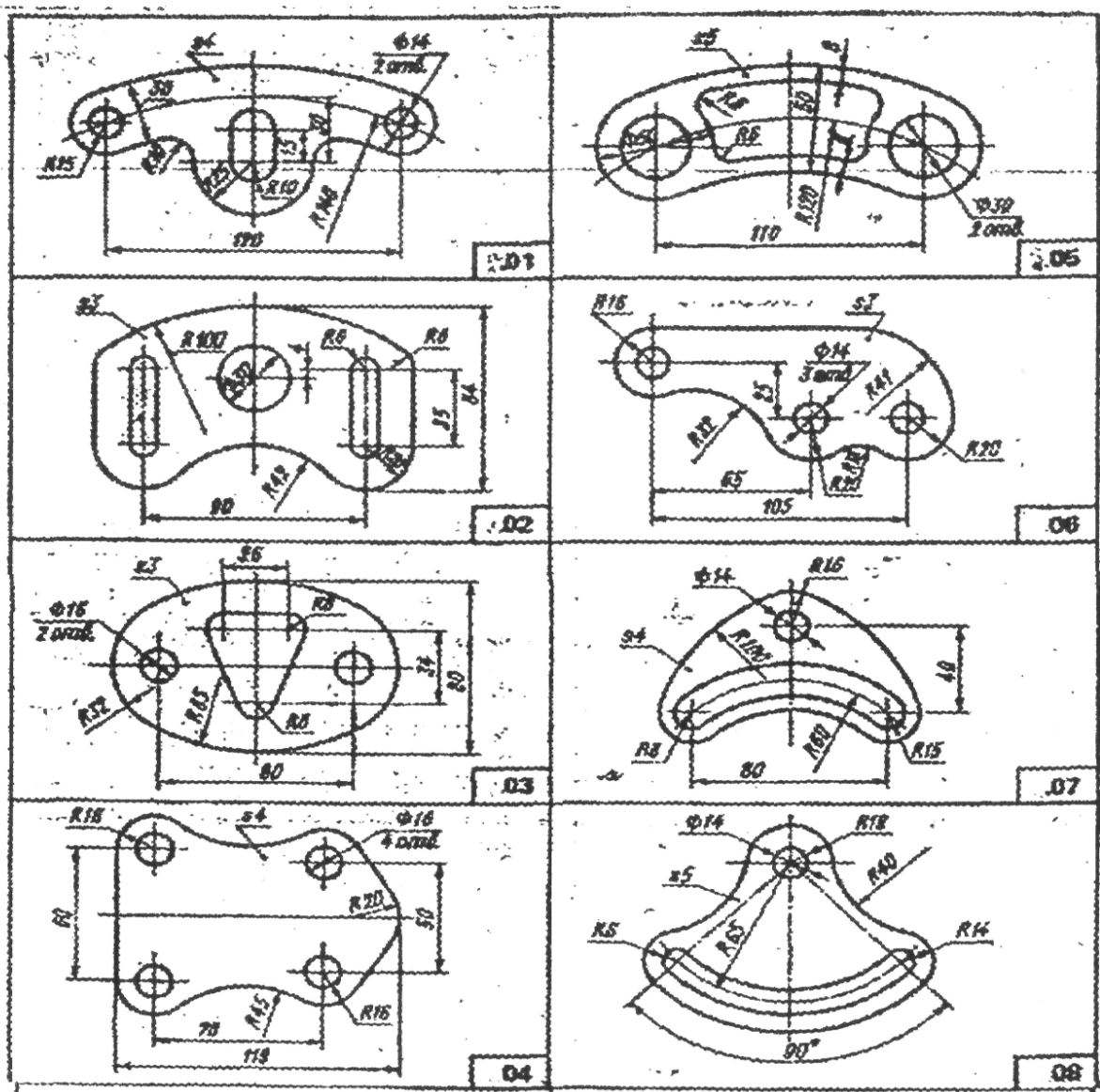
Рис. 7.35. Побудова кривої вписаної у ромб з кутами  $LKN=LMN=60^\circ$ .

### Запитання і вправи для самоперевірки

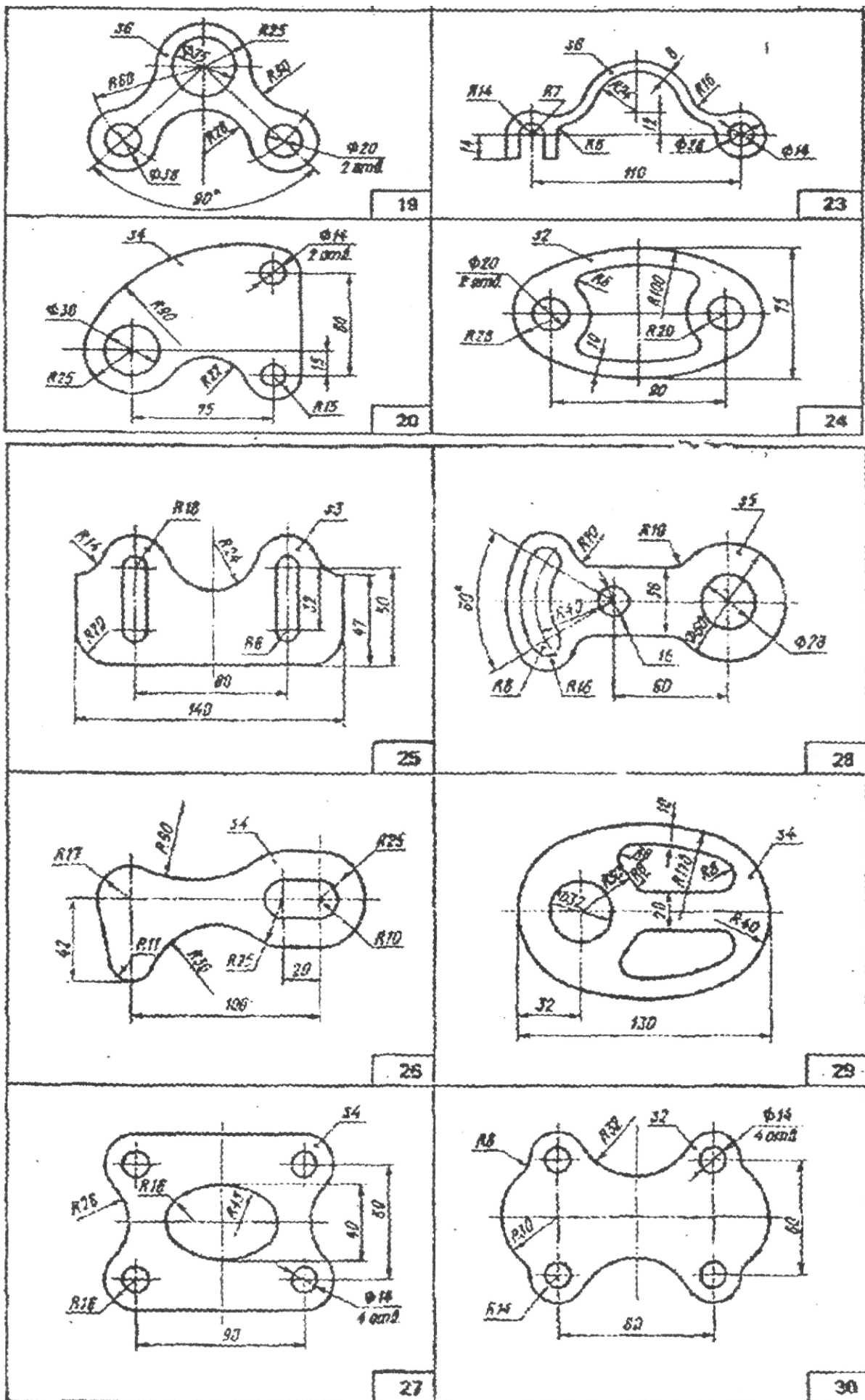
1. Поділіть довільний відрізок на три рівні частини.
2. Поділіть прямий кут на чотири рівні частини.
3. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте кут  $15^\circ$ .
4. Побудуйте правильний п'ятикутник, вписаний в коло діаметра 60 мм.
5. Побудуйте правильний шестикутник, сторона якого дорівнює 30 мм.
6. Яка пряма називається дотичною до кола? Які кола називаються дотичними?
7. Які точки називаються точками спряження і центрами спряження?
8. Побудуйте спряження двох взаємно перпендикулярних прямих дугою кола радіуса 30 мм. Скільки розв'язків має задача?
9. Побудуйте спільну дотичну до двох кіл відповідно радіусів  $r_1 = 2r_2$ , якщо центр меншого кола належить більшому колу.
10. Визначіть можливу сукупність спрягаючих елементів для побудови спряження дуг двох кіл, якщо на останніх задано точки спряження.

### ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ №7

1. На форматі А4 виконати креслення нижче вказаної деталі згідно з варіантом.







### Тема: Проекційне креслення

**Мета роботи** – систематизація і закріплення знань щодо виконання креслення предметів за правилами і вимогами державних стандартів, виконати написи на кресленнях стандартним шрифтом, будувати третю проекцію предмета за двома заданими, визначати необхідні зображення для виконання креслень предмета, нанести розміри на кресленнях відповідно до правил державних стандартів.

#### Завдання для виконання роботи

1. Виконати креслення предметів за правилами і вимогами державних стандартів.
2. Виконати написи на кресленнях стандартним шрифтом.
3. Побудувати третю проекцію предмета за двома заданими.
4. Визначити необхідні зображення для виконання креслень предмета.
5. Нанести розміри на кресленнях відповідно до правил державних стандартів.

#### Порядок опрацювання завдань

**Місце проведення занять:** кафедра механізації (ауд.140а).

**Місце та час отримання консультації:** кафедра механізації (згідно з графіком).

**Обладнання та матеріали:** готувальня середніх розмірів, лінійка, косинці із кутами  $45^\circ$  та  $30^\circ$  і  $60^\circ$ , олівці "Конструктор" марки М, 2М, ТМ, Т (іноземного виробництва відповідно В, 2В, НВ, Н), кнопки, гумки.

**Форми підсумкового контролю:** захист практичних робіт.

Проекційне креслення вивчає правила побудови зображень предметів, виробів і їх частин. Задачами проекційного креслення є:

- ♦ побудова зображень (виглядів, розрізів і перерізів) в ортогональних проекціях з натури або за аксонометрією;
- ♦ побудова третьої проекції предмета за двома заданими;
- ♦ побудова аксонометричного зображення предмета за зображеннями в ортогональних проекціях;
- ♦ нанесення розмірів на зображеннях.

#### 8.1. Визначення форми фігури за її проекціями

Складні форми технічних виробів, як правило, складаються з простих геометричних фігур – призм, пірамід, конусів, циліндрів, тіл обертання. Тому для уявлення форми складного об'єкта за його проекціями потрібно вміти розпізнавати за заданими проекціями форми простих геометричних тіл. Так, наприклад, якщо однією проекцією тіла є трикутник, то таке тіло може бути трикутною призмою чи пірамідою, або конусом (рис. 8.1).

Якщо одна проекція – коло (рис. 8.2), то тіло може бути конусом або будь-яким тілом обертання (в тому числі циліндром або кулею). Найпростіші тіла, що мають однією проекцією квадрат, – призма або циліндр (рис. 8.3). За такими ознаками часто, але не завжди, можна визначити форму фігури за двома заданими проекціями.

Як відомо з нарисної геометрії, дві проекції геометричної фігури повністю визначають її форму, але це твердження є справедливим тільки у тому разі, коли відомими є проекції кожної точки фігури. В окремих випадках, коли дві проекції пари або множини точок фігури мають одну спільну лінію зв'язку (лінію відповідності), як показано на рис. 8.4, 8.5, то фронтальна і горизонтальна проекції фігури не визначають її форму. Навіть позначення граничних точок відрізка лінії не допомагає однозначно побудувати профільну проекцію (рис. 8.4). На кресленнях точки на зображеннях взагалі не позначають, і тому невизначеність форми збільшується. Так, наприклад, два зображення у



вигляді вертикальних відрізків можуть бути проекціями не тільки відрізка прямої або кривої, але й будь-якої плоскої фігури (рис. 8.5). Позначення літерами вершин ромба (рис. 8.6) дозволяє однозначно побудувати профільну проекцію за заданими фронтальною і горизонтальною, але відсутність такого позначення (рис. 8.6) робить побудову профільної проекції неоднозначною. Неоднозначність побудови третьої проекції лінії або плоскої фігури поширюється і на геометричні тіла. На рис. 8.7 показано проекції трикутної призми, обмеженої проекціюючими гранями, але якщо немає інформації, що на фронтальній і горизонтальній проекціях показано саме призму, то навіть позначення вершин не дає однозначної побудови профільної проекції. Число ймовірних розв'язань задачі значно збільшується, якщо вершини геометричного тіла не позначені літерами (рис. 8.8).

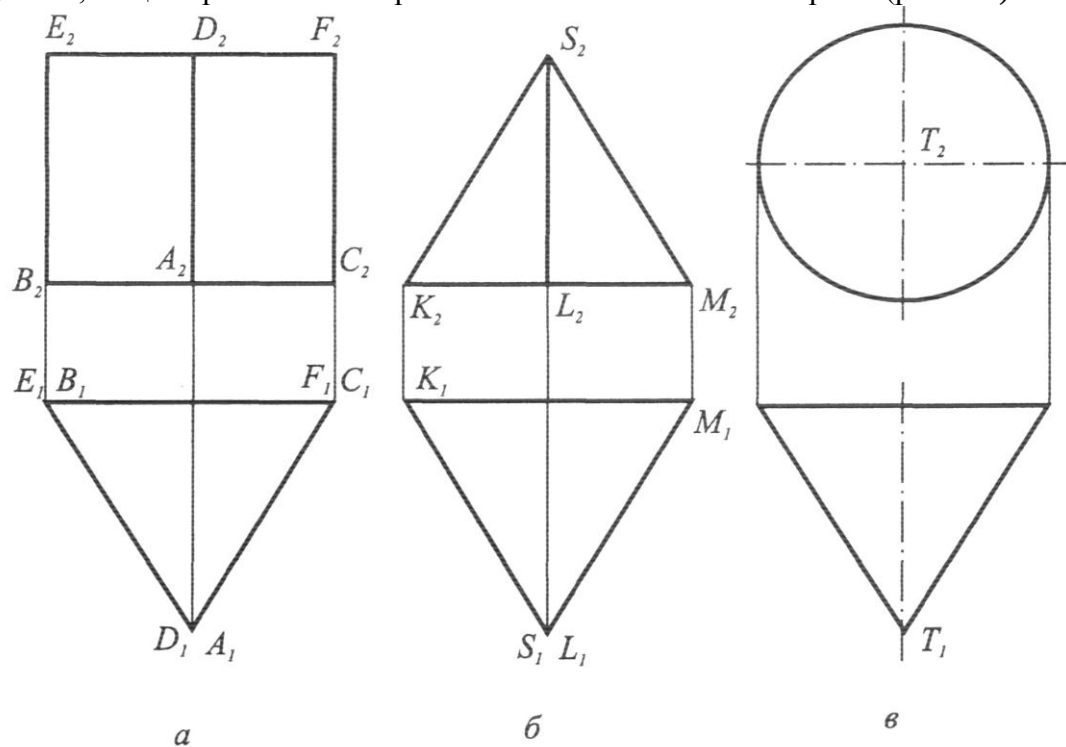


Рис. 8.1. Проекції трикутної призми, піраміди, конуса.

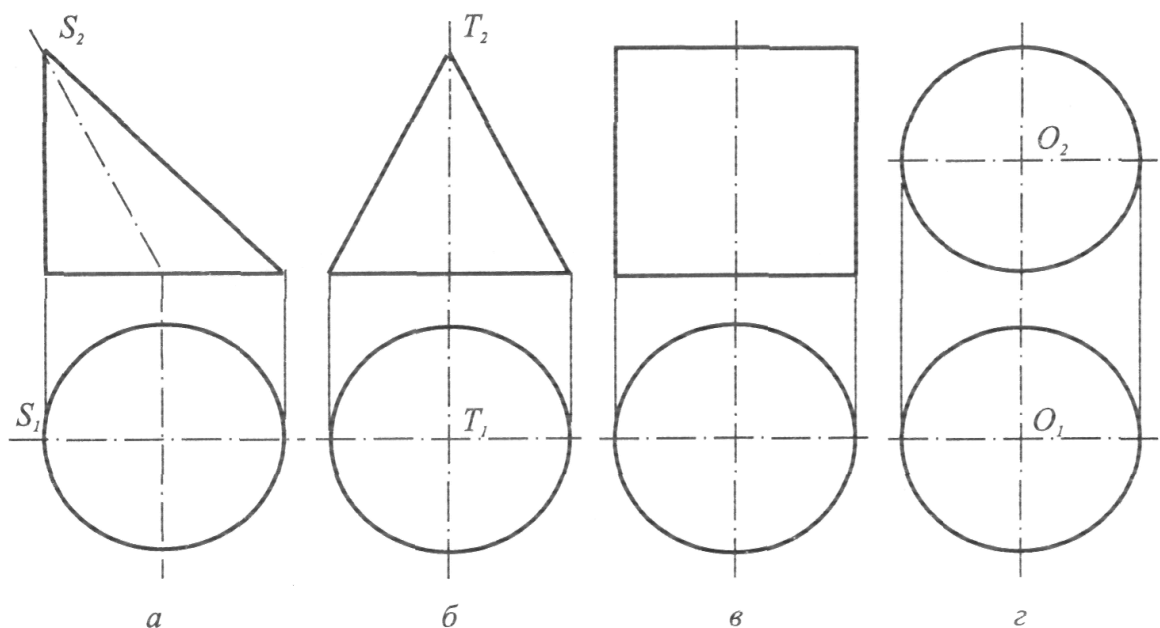


Рис. 8.2. Проекції конуса, циліндра, кулі.

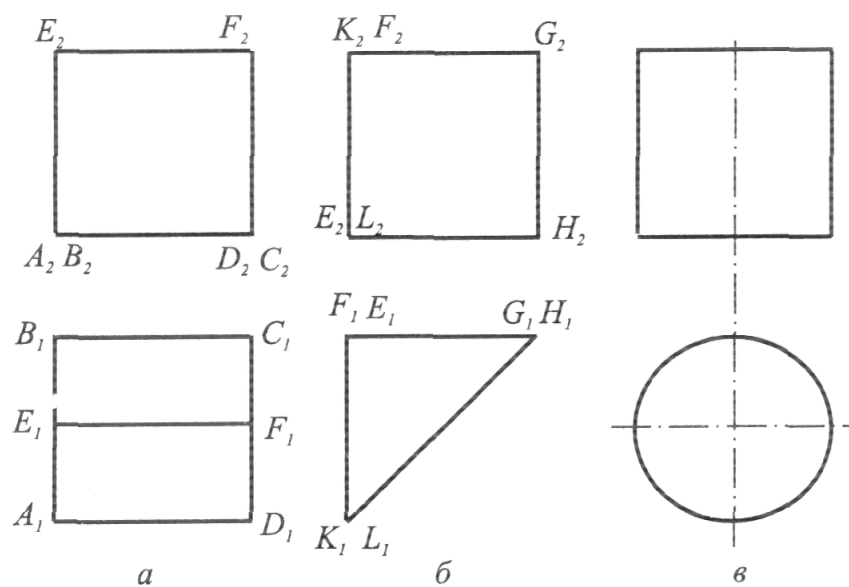


Рис. 8.3. Проекції призми, циліндра.

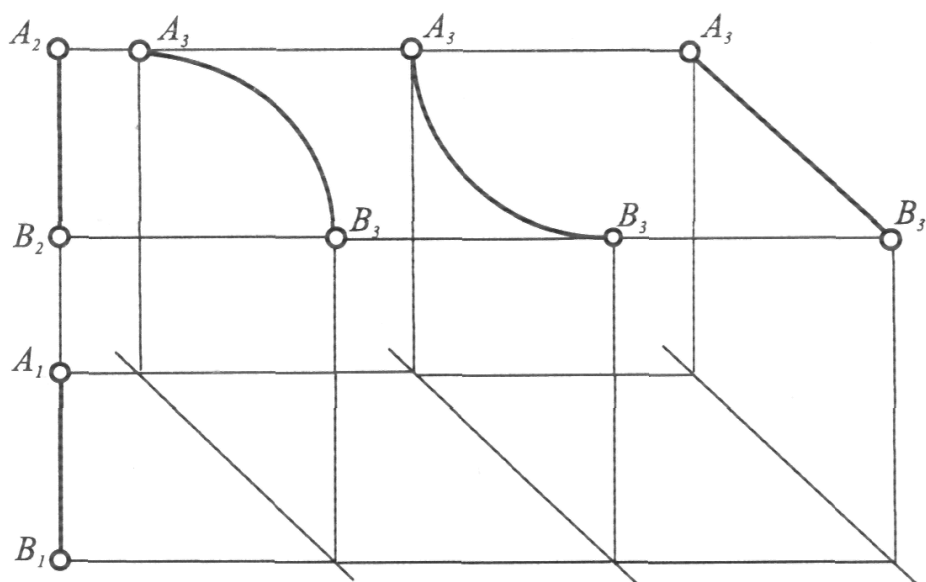


Рис. 8.4. Проекції дуги та лінії.

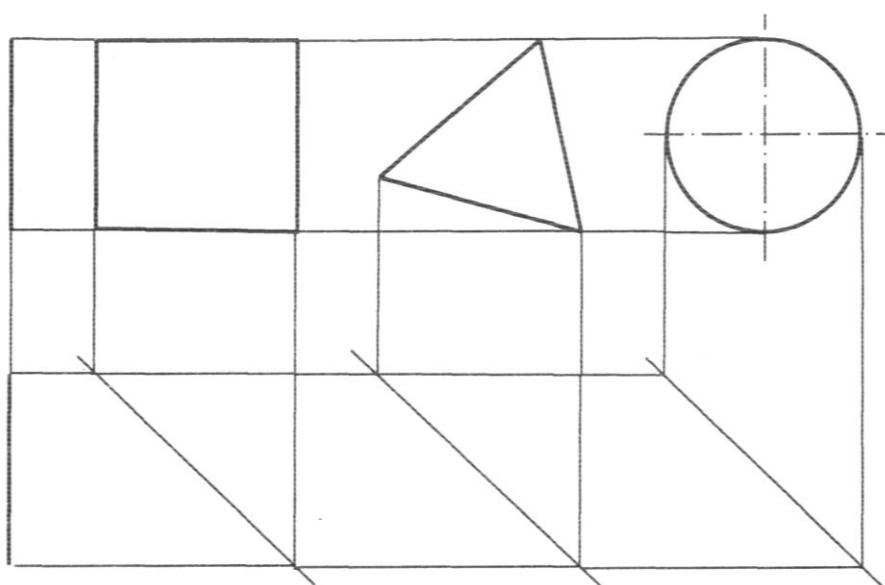


Рис. 8.5. Проекції квадрата трикутника кола.

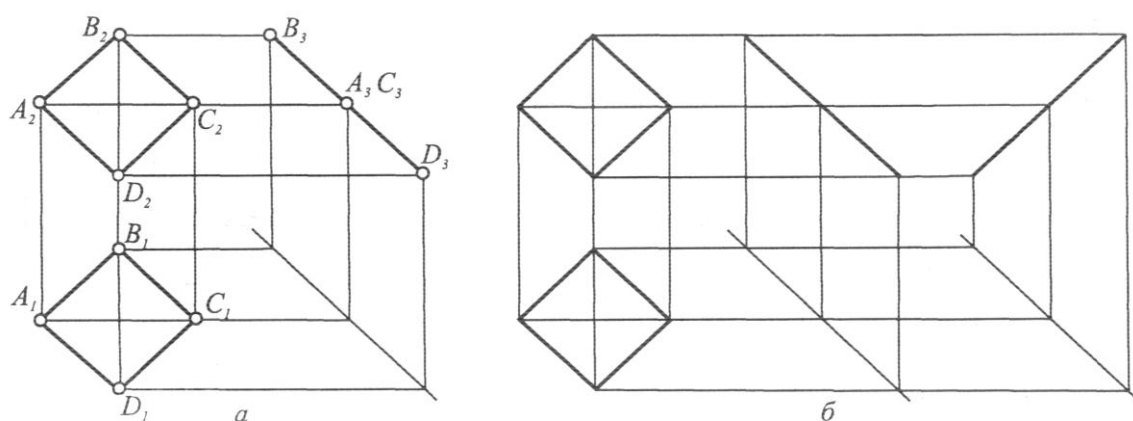


Рис. 8.6. Проекції ромба.

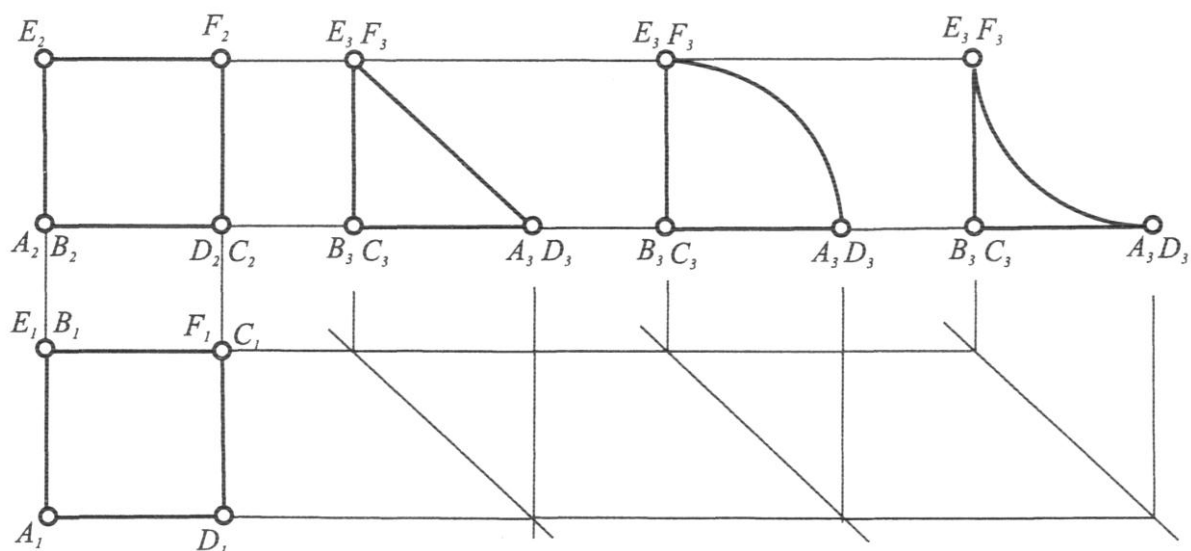


Рис. 8.7. Проекції трикутної призми.

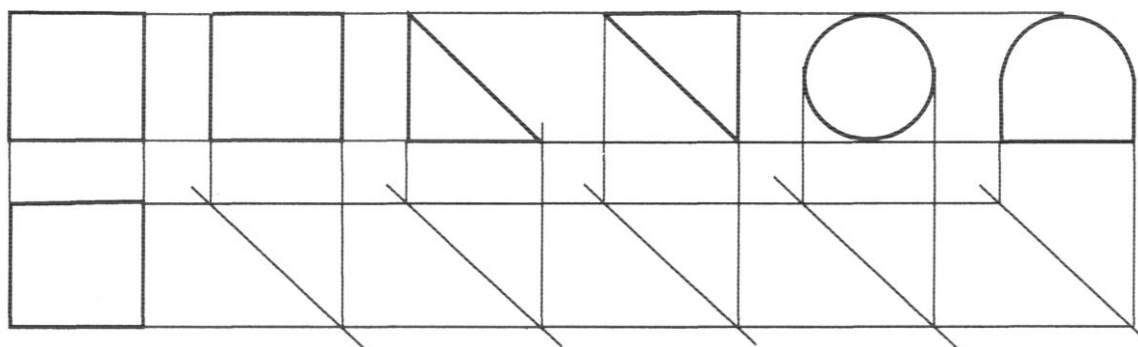


Рис. 8.8. Проекції геометричних тіл.

При невизначеності форми фігури, заданої двома проекціями, обов'язково потрібна додаткова інформація, яка надається різними способами. Крім додаткової проекції, таку інформацію можуть нести осі симетрії, розміри, пояснення. Так, наприклад, якщо на зображенні у вигляді квадрата нанести вісь і розміри, як показано на рис. 8.9, то така інформація у сукупності повністю визначає циліндричну форму. При цьому навіть друга проекція є зайвою. Так само однієї проекції достатньо для визначення форми пластинки, якщо вказано її товщину (рис. 8.10).

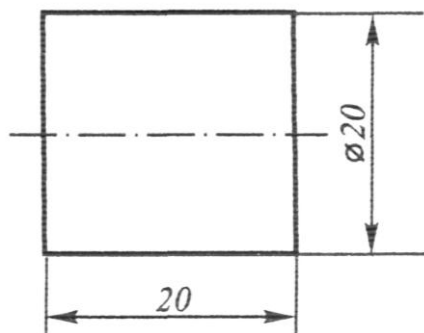


Рис. 8.9. Зображення циліндра.

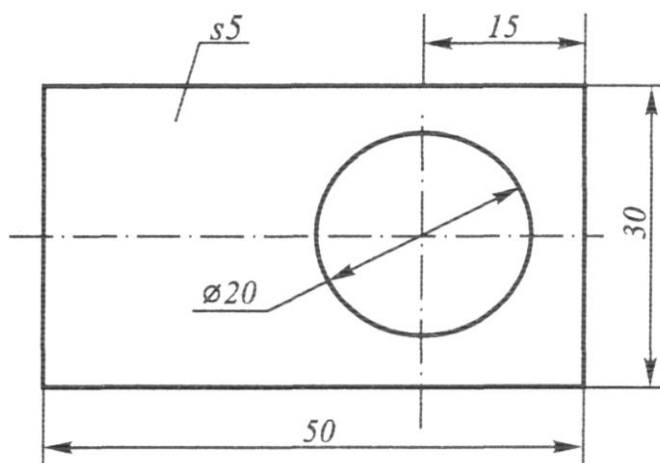


Рис. 8.10. Зображення пластини.

## 8.2. Побудова третьої проекції і аксонометричного зображення предмета за двома заданими проекціями

Для побудови третьої проекції складного об'єкта за двома заданими спочатку потрібно його уявно розчленувати на прості складові геометричні тіла або фігури, уявити форму і побудувати третю проекцію кожної з них. Після цього потрібно вилучити з побудованого зображення зайві лінії з'єднання складових елементів.

На рис. 8.11 показано складну фігуру, яку можна уявно поділити на чотири складові частини:

- I – вертикальний циліндр;
- II – вертикальний циліндр з двома профільними зрізами;
- III – правильна зрізана шестикутна піраміда;
- IV – правильна шестикутна призма, зрізана двома фронтально-проекціюючими площинами.

Побудова профільної проекції кожної із складових частин не викликає труднощів. При наведенні зображень потрібно вилучити граничні лінії між I та II складовими частинами на профільній проекції циліндричної поверхні.

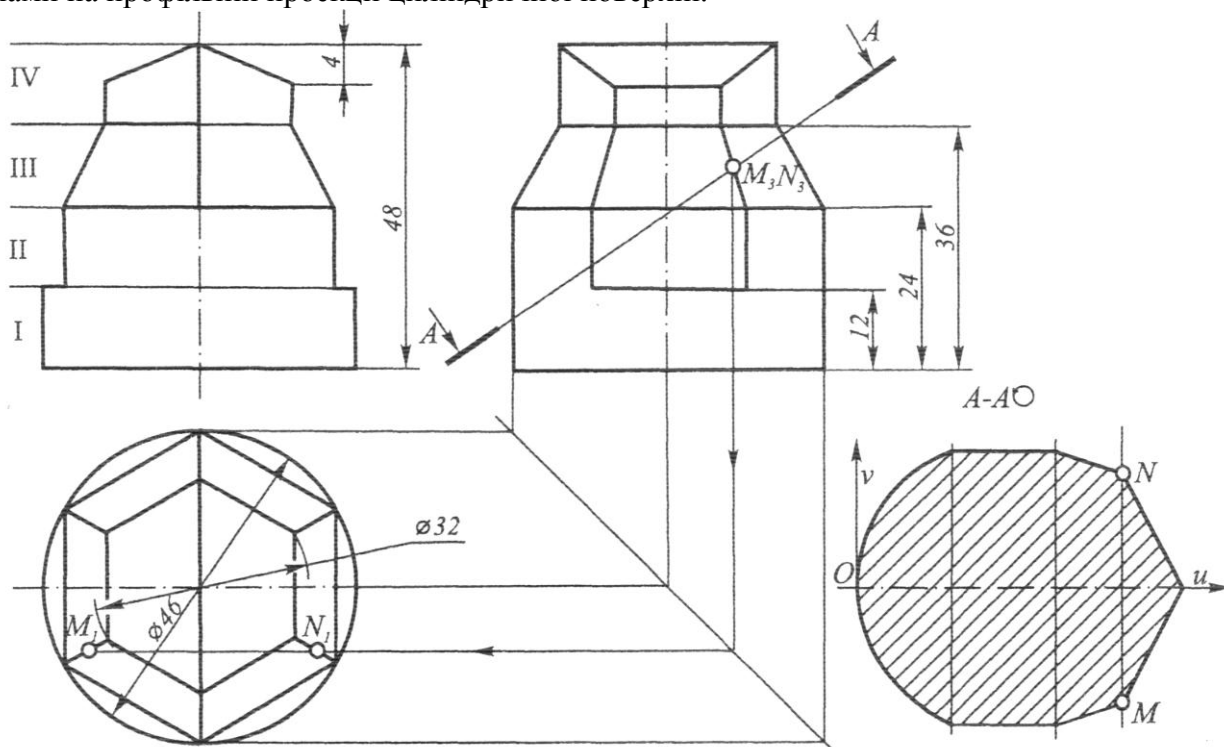


Рис. 8.11. Побудова проекцій складної фігури.

При нанесенні розмірів потрібно обрати розмірні бази (площини або лінії), від яких будуть вимірюватись елементи фігури при її виготовленні. Якщо виріб виготовляється з циліндричної заготовки, то за головну базу слід обрати площину основи цього циліндра. Від цієї площини наносяться вертикальні розміри основних складових частин фігури. Для нанесення розмірів елементів складових частин обираються інші розмірні бази, які належать цим складовим частинам. Від такої бази на вигляді зліва нанесено розмір зрізу шестигранної призми. Правильні багатокутники повністю визначаються діаметром описаного кола. Тому на вигляді зверху нанесено лише два діаметри. Тип аксонометрії обирається з міркувань поєднання наочності з простотою побудов. Найпростішими за побудовою є ізометричні проєкції, де показники спотворення по осях однакові. Наочність зображення зменшується, якщо фігура має елементи (прямі або площини), що збігаються з променями або променевими площинами аксонометричного проєкціювання. Так, наприклад, на рис. 8.12 показано прямокутні аксонометричні проєкції (ізометрію і диметрію) тіла, що складається з двох квадратних призм. Диметрія такого тіла є більш наочною тому, що в ізометрії дві грані верхньої призми збігаються з променевими площинами і зображаються лініями. Прямокутні аксонометричні проєкції мають більшу наочність, ніж косокутні. Останні використовуються лише для зображення предметів, що мають значне число кривих ліній у фронтальних або горизонтальних площинах.

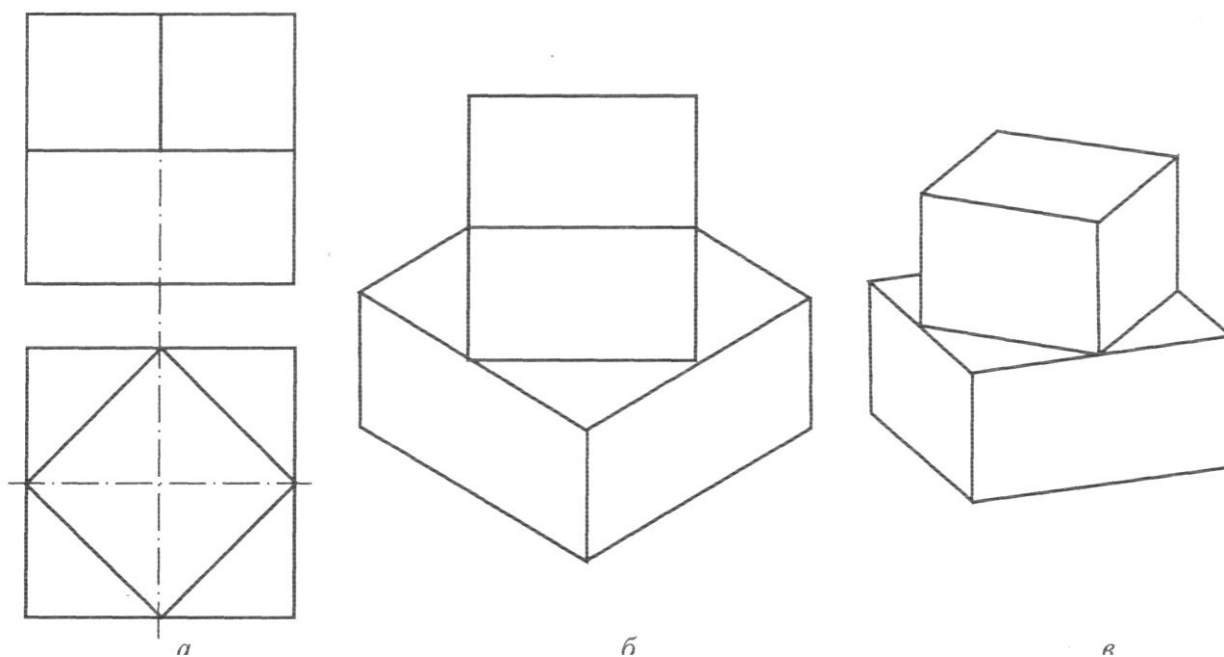


Рис. 8.12. Прямокутні аксонометричні проєкції (ізометрію і диметрію) тіла, що складається з двох квадратних призм.

На рис. 8.13 наведено косокутні аксонометричні проєкції (горизонтальну і фронтальну ізометрію та косокутну диметрію) тіла обертання, де кола, які розміщені у площинах, паралельних координатним площинам, зображаються без спотворення, і це спрощує побудову зображення.

Для фігури, наведеної на рис. 8.11, прямокутна ізометрія є достатньо наочною і простою в побудові проєкцією. Для побудови аксонометрії фігуру прив'язують до осей прямокутної декартової системи координат з міркування зручності виміру розмірів фігури для їх перенесення на аксонометричне зображення. За початок координат найзручніше прийняти центр кола нижньої основи, а за осі – лінії перетину трьох площин рівня (горизонтальної, фронтальної і профільної), які проходять через обраний центр. Дві з цих площин є площинами симетрії фігури, а третя – розмірною базою, і це спрощує побудову зображення.

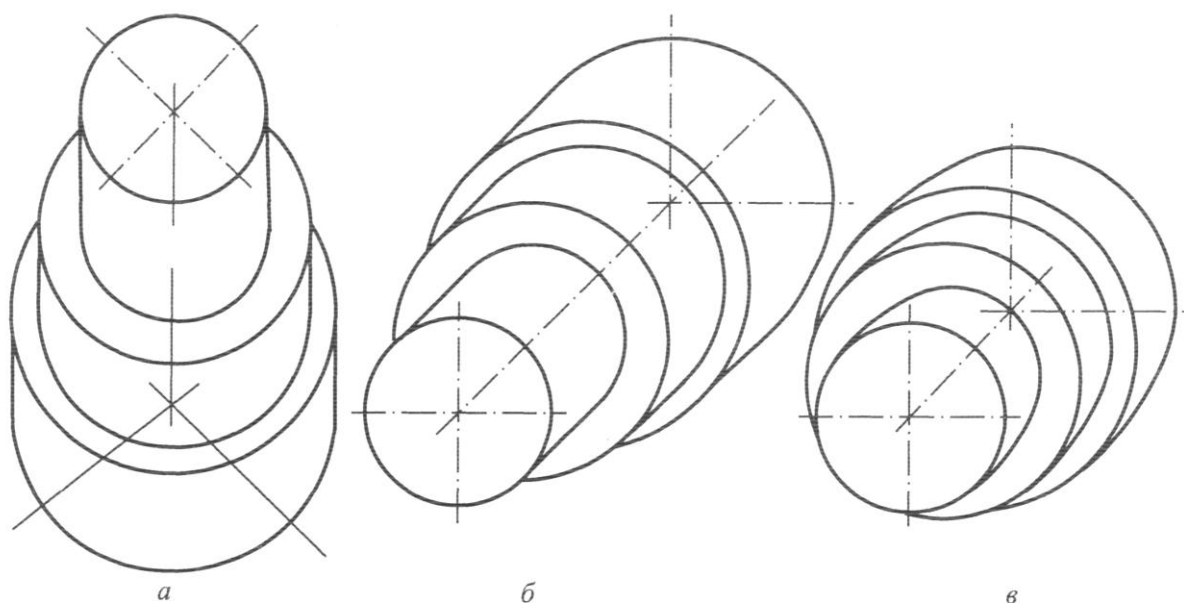


Рис. 8.13. Косокутні аксонометричні проекції (горизонтальну і фронтальну ізометрію та косокутну диметрію) тіла обертання

Побудову аксонометрії починають із поділу вертикальної осі симетрії для визначення положення горизонтальних перерізів, які є границями складових частин фігури (рис. 8.14). Проводять аксонометричні осі кожного перерізу і будують самі перерізи. Ізометрією кола є еліпс, який будується за координатами точок кола. В прямокутній ізометрії допускається заміна еліпса кривою, складеною з дуг кіл, але потрібно пам'ятати, що така заміна є наближеною і веде до появи незначних похибок у зображенні. Так, наприклад, рівні відрізки АС та ВС на зображенні будуть незначно відрізнятися за довжиною. Контури твірні циліндричних елементів будуть дотичними до основ циліндрів. Оскільки аксонометричні зображення на кресленнях призначаються тільки для наочності і, як правило, супроводжують зображення в ортогональних проекціях, то вторинні проекції і лінії невидимого контуру предметів не показують.

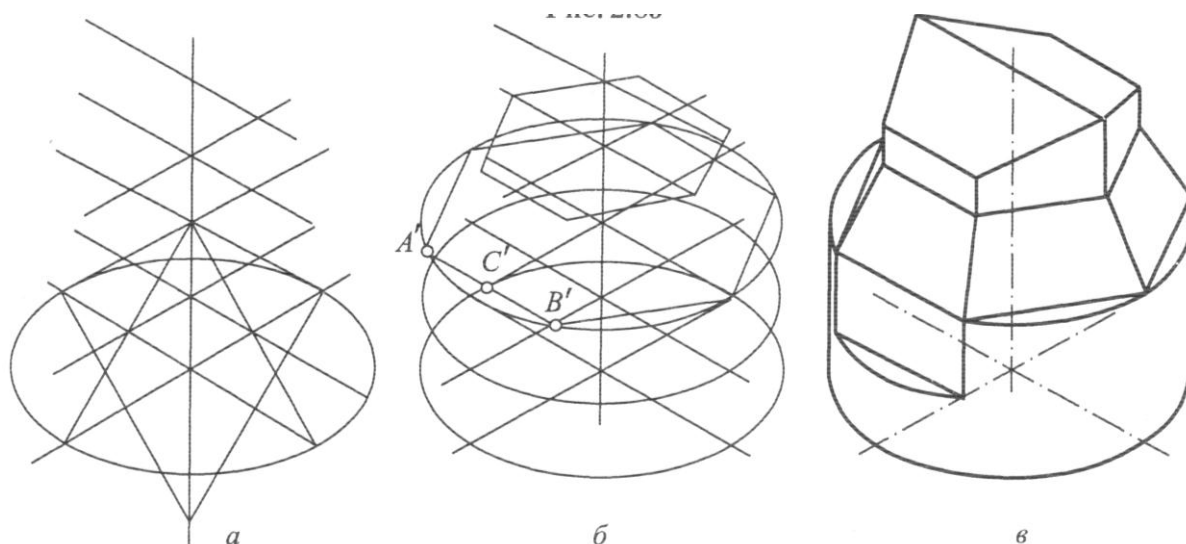


Рис. 8.14. Побудова аксонометрії.

Предмети, які мають порожнини, отвори і т.п., показують умовно розрізаними. Бажано, щоб кожний отвір хоча б один раз був розрізаним площиною, що проходить через його вісь. Порожнини складної форми розрізають двома або більшим числом січних площин. Число розрізів і положення січних площин обирають так, щоб можна було, по можливості, максимально звільнитись від ліній невидимого контуру. Для зменшення числа

зображень для складних деталей застосовують складні розрізи (ступінчасті або ламані), на одній проекції поєднують частину вигляду з частиною розрізу. Розрізи виконують за правилами ГОСТ 2.305-68.

На рис. 2.87 показано зображення технічної деталі з отворами. Всі вертикальні отвори можна показати в одному фронтальному ступінчастому розрізі, якщо три січні площини провести через осі отворів. Перепади січних площин виконуються у таких місцях, щоб їх можна було не показувати на розрізі. Фронтально-проекціюючий отвір показано на профільному розрізі. Оскільки профільна проекція деталі має вертикальну вісь симетрії, то половину профільного розрізу Б-Б суміщено з половиною вигляду зліва. На аксонометричних зображеннях об'єктів з отворами або порожнинами роблять вирізи площинами рівня (рис. 2.87). Кожний виріз виконується двома взаємно перпендикулярними площинами, що перетинаються по осі отвору або по осі симетрії деталі. Вирізи в аксонометрії не пов'язуються з розрізами на ортогональних проекціях і виконуються для наочності. Зображення перерізованих елементів виділяють штриховкою. Кут нахилу штриховки повинен відповідати куту  $45^\circ$  на ортогональних проекціях, і його будують як діагональ квадрата в аксонометрії. Взаємно перпендикулярні перерізи вирізів штрихують у різні боки так, щоб при суміщенні січних площин обертанням навколо лінії їх перетину лінії штриховки збігались.

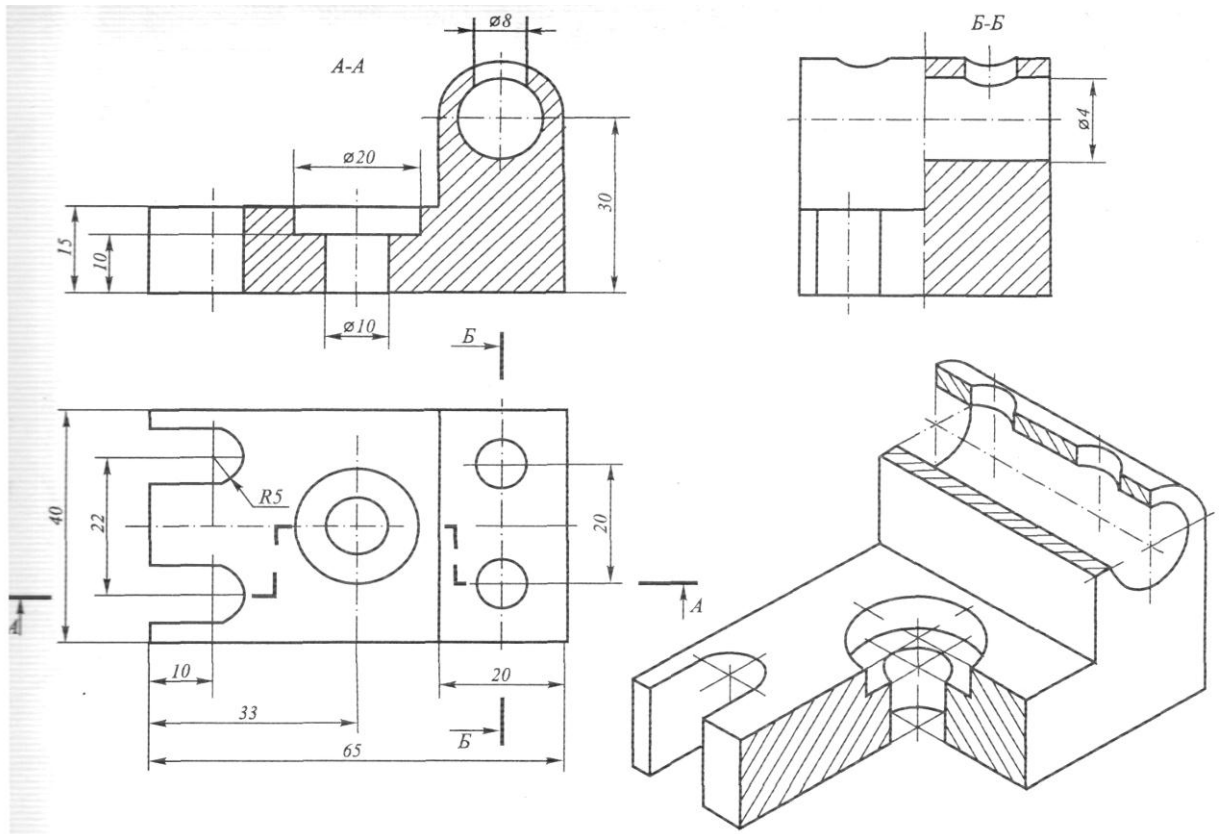


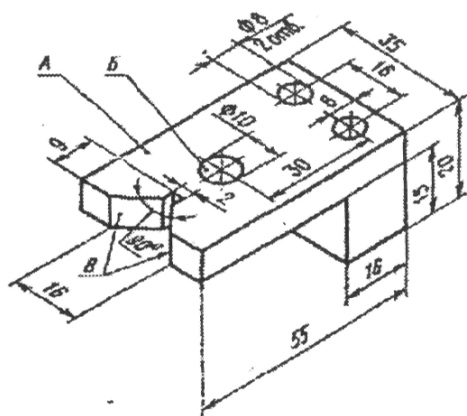
Рис. 8.15. Зображення технічної деталі з отворами.

### 8.3. Похилий переріз

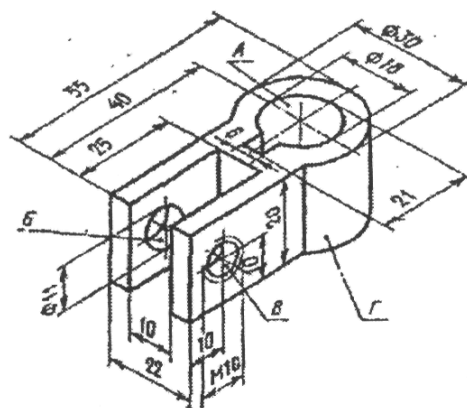
Похилим називається переріз, січна площина якого не паралельна жодній з основних площин проекцій. Як правило, похилі перерізи виконуються проекціюючими площинами. На рис. 8.11 похилий переріз *A-A* виконано профільно-проекціюючою площиною. Задача побудови похилого перерізу полягає у визначенні його натуральної величини і звичайно розв'язується способом заміни площин проекцій. Похилий переріз може розміщуватись як у проекційному зв'язку з основною проекцією, так і без такого зв'язку. На рис. 8.11 вісь перерізу не паралельна профільному сліду січної площини *A-A*, а повернута у горизонтальне положення. Тому для побудови точок перерізу запроваджено місцеву



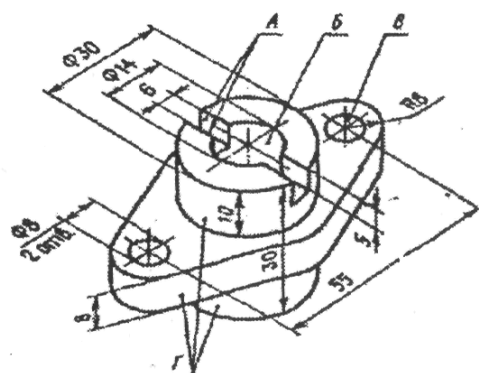




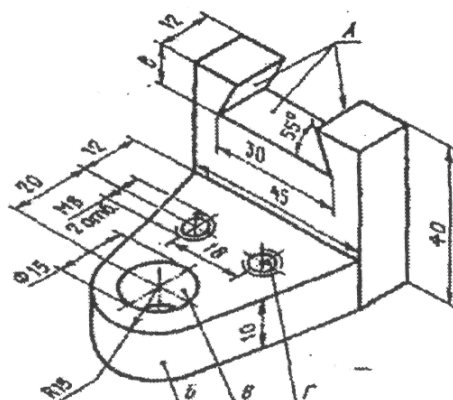
02



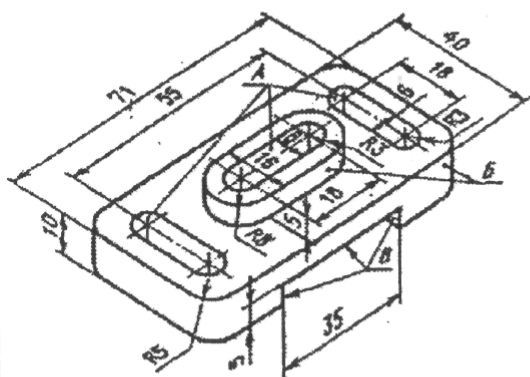
04



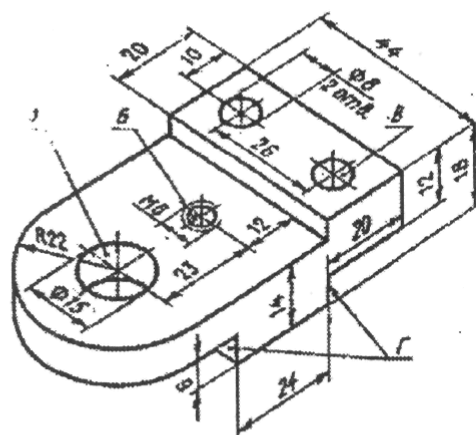
05



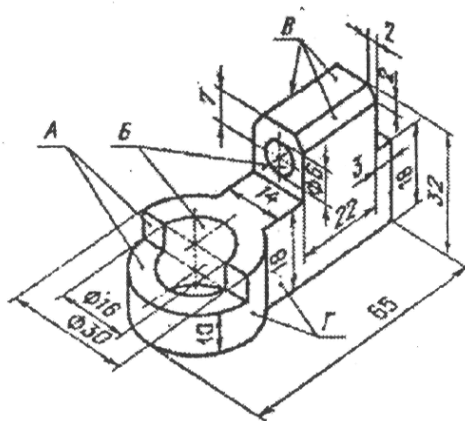
07



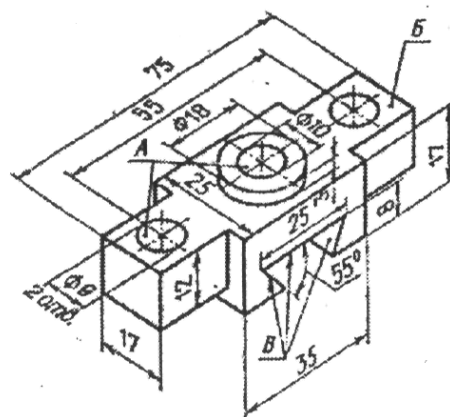
06



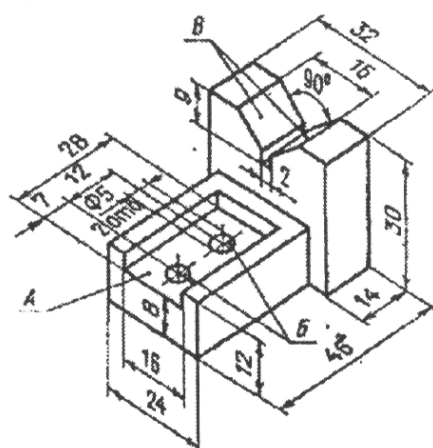
08



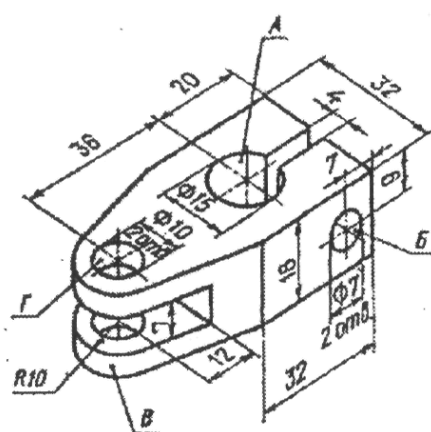
09



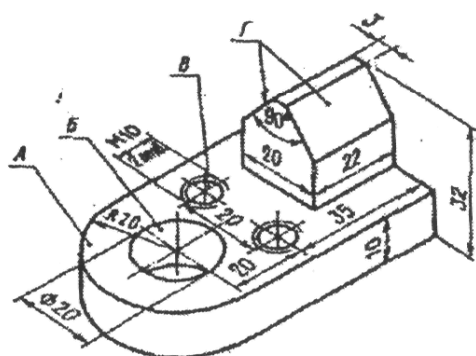
11



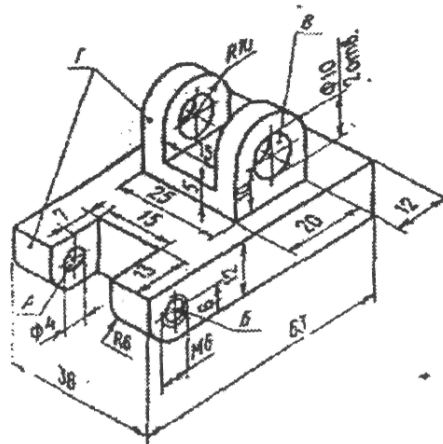
10



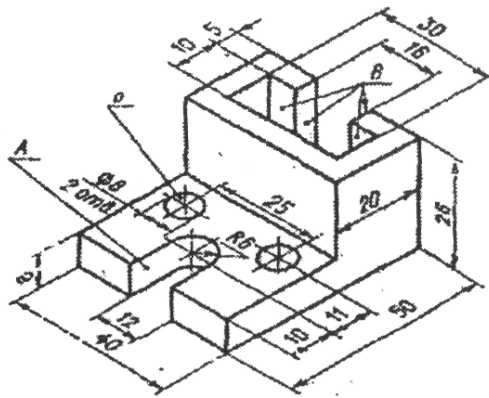
12



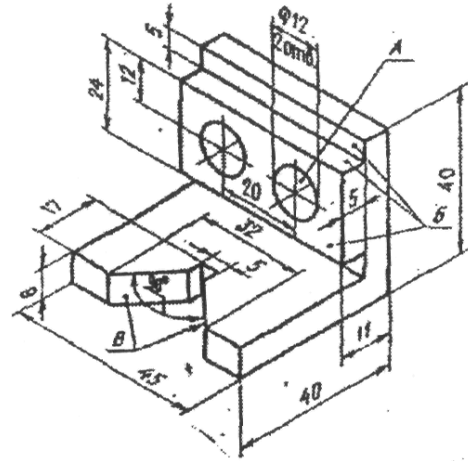
13



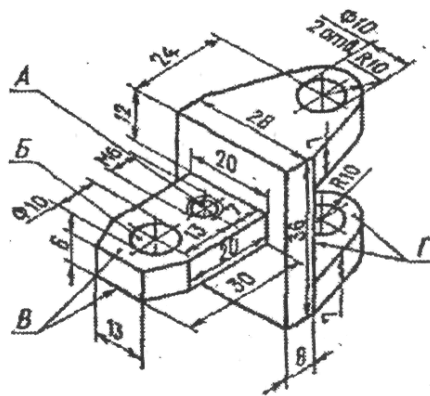
15



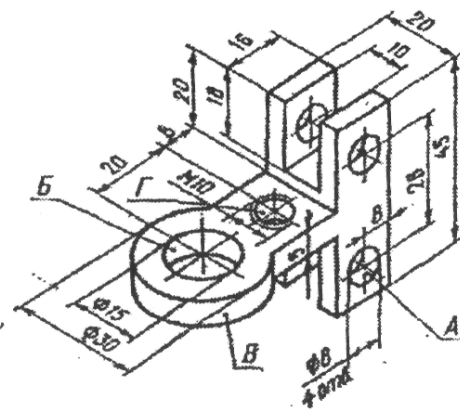
14



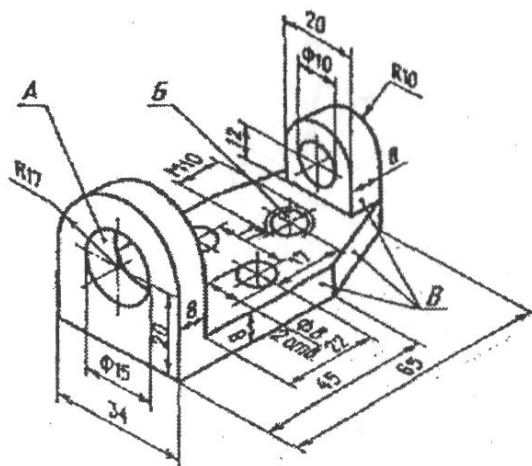
16



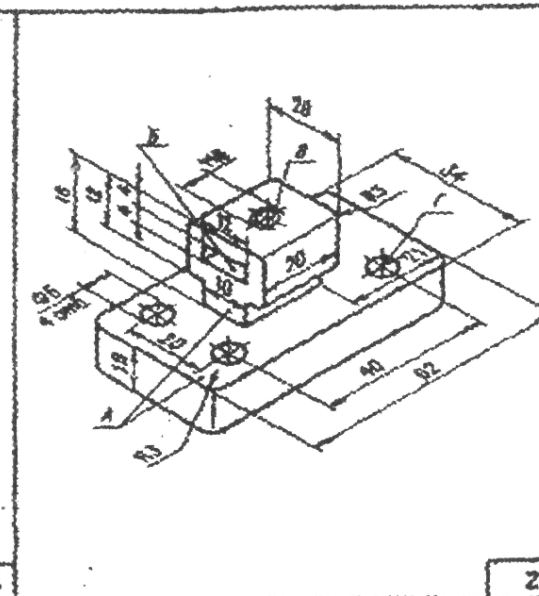
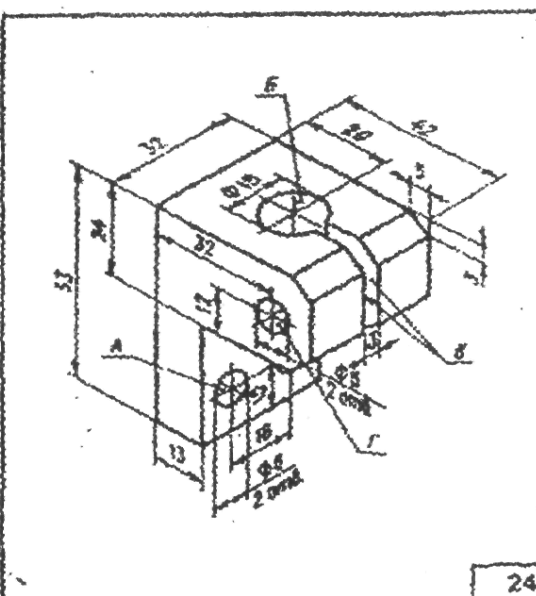
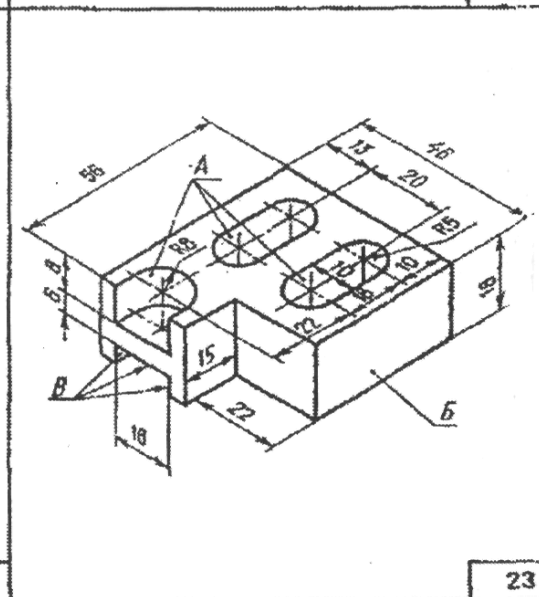
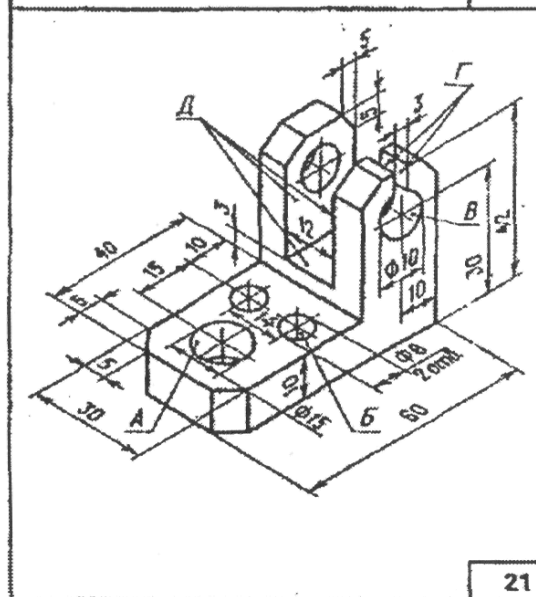
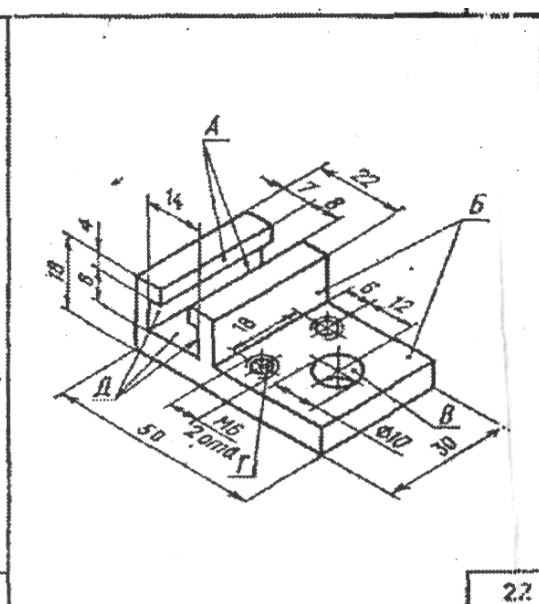
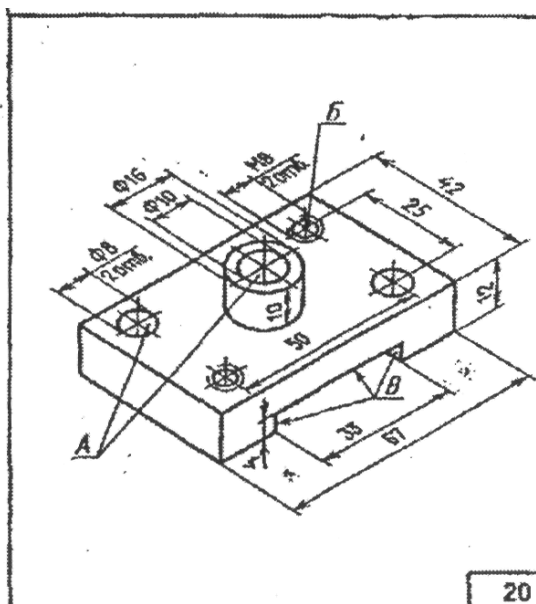
17

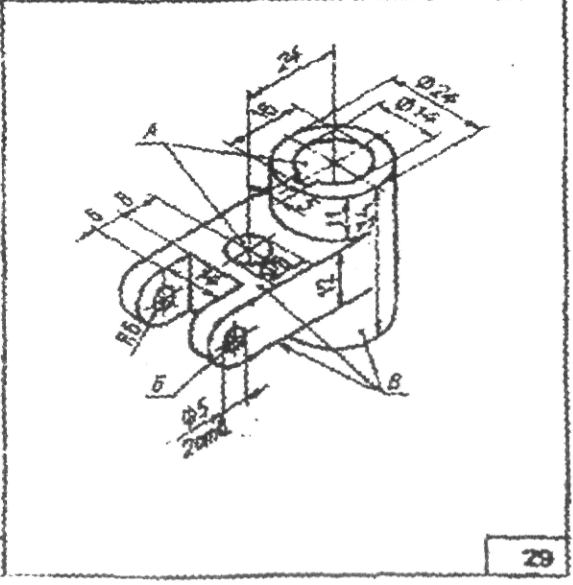
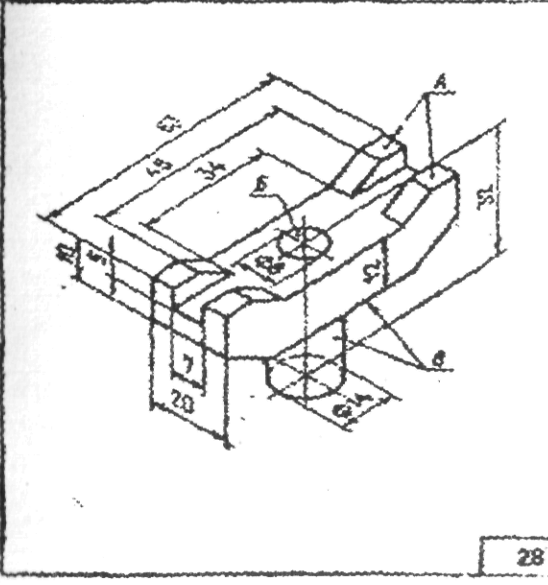
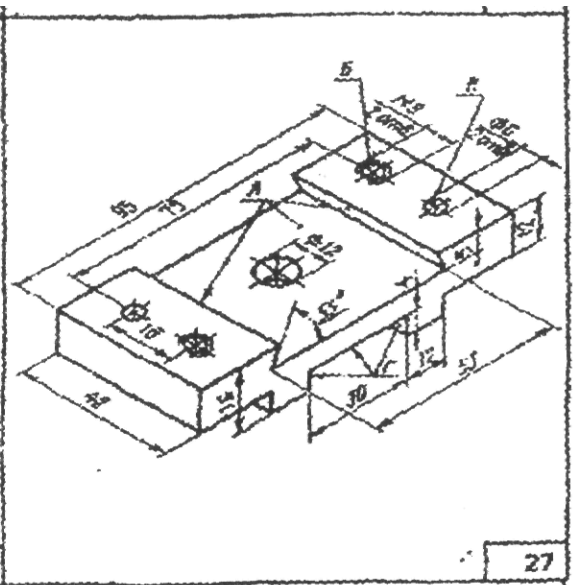
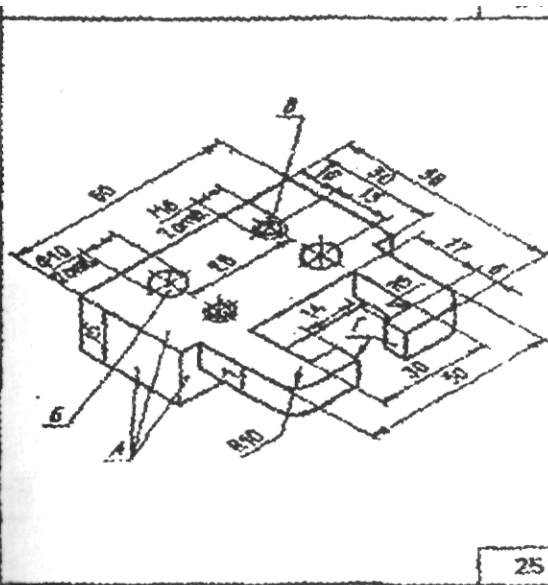


18



19





## Тема: Технічний малюнок

**Мета роботи** – систематизація і закріплення знань щодо побудувати аксинометричних зображень предметів за ортогональними проекціями та виконання технічного малюнка предмету з натури і за заданими ортогональними проекціями.

### Завдання для виконання роботи

1. Побудувати аксинометричні зображення предметів за ортогональними проекціями.
2. Виконати технічний малюнок предмету з натури і за заданими ортогональними проекціями.

### Порядок опрацювання завдань

**Місце проведення занять:** кафедра механізації (ауд.140а).

**Місце та час отримання консультації:** кафедра механізації (згідно з графіком).

**Обладнання та матеріали:** готувальня середніх розмірів, лінійка, косинці із кутами  $45^\circ$  та  $30^\circ$  і  $60^\circ$ , олівці "Конструктор" марки М, 2М, ТМ, Т (іноземного виробництва відповідно В, 2В, НВ, Н), кнопки, гумки.

**Форми підсумкового контролю:** захист практичних робіт.

**Технічним малюнком** називається аксонометричне зображення предмета, яке виконується окомірною від руки. Технічне малювання розвиває просторове мислення, почуття пропорцій, окомір і сприяє кращому розумінню просторової форми предмета. Для технічного малювання використовують загострені олівці підвищеної м'якості (М та 2М) та м'яку гумку. Технічні малюнки відрізняються від художніх як за своїм змістом, так і технікою виконання. На технічному малюнку виконуються деякі спрощення і умовності, наприклад, виконуються вирізи, спрощено показуються такі елементи машинобудівних виробів як різьба, зубчасті колеса та інші. Всі елементи технічного малюнка будуються за геометричними закономірностями.

### 9.1. Малювання ліній та плоских фігур

Лінію у технічному малюнку проводять за кілька разів, поступово удосконалюючи її форму. Горизонтальні, вертикальні і похилі прямі проводять у напрямках, як показано на рис. 9.1. Перед проведенням кривої лінії спочатку намічають кілька її точок. Слід навчитись «на око» поділяти відрізки і кути навпіл і на кілька рівних частин. Кути  $7^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $41^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  для аксонометричних осей будують як гіпотенузи прямокутних трикутників, використовуючи наближені значення тангенсів цих кутів (рис. 9.2.).



Рис. 9.1. Побудова ліній у технічному малюнку.

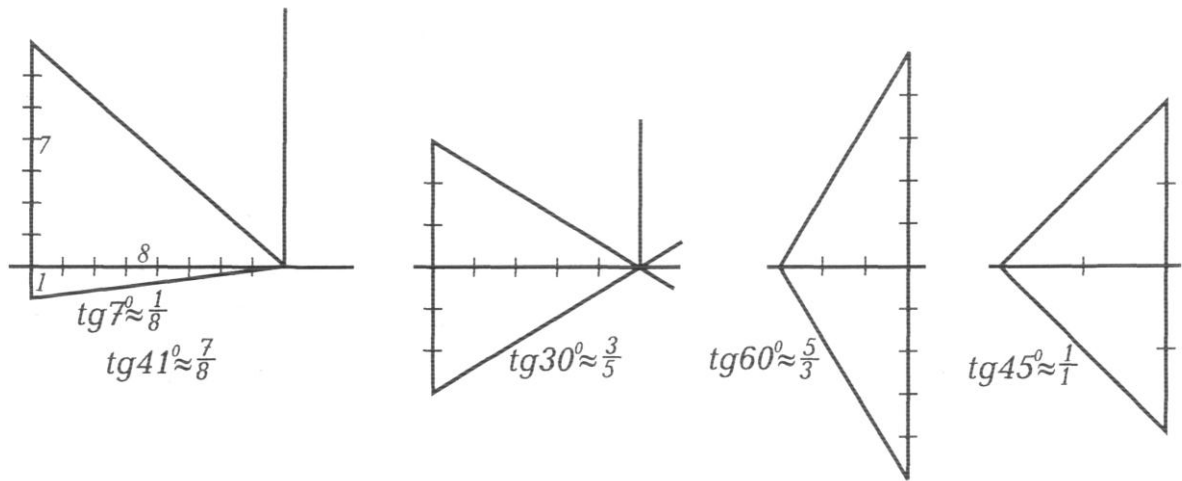


Рис. 9.2. Побудова кутів у технічному малюнку.

Плоскі фігури (багатокутники, кола) на технічних виробках найчастіше зустрічаються у площинах рівня і орієнтуються так, щоб осі симетрії фігури були паралельними координатним осям. Аксонометричні зображення плоских фігур будують за наближеними співвідношеннями координат їх точок.

При малюванні квадрата в аксонометрії потрібно слідкувати за паралельністю його сторін. Правильність побудови квадрата перевіряється положенням його діагоналей (рис. 9.3). Ізометричним зображенням квадрата, сторони якого паралельні аксонометричним осям, є ромб, який меншою діагоналлю поділяється на два рівносторонніх трикутники (рис. 9.3а). Менша діагональ фронтального квадрата паралельна осі  $Oy$  (рис. 9.3б).

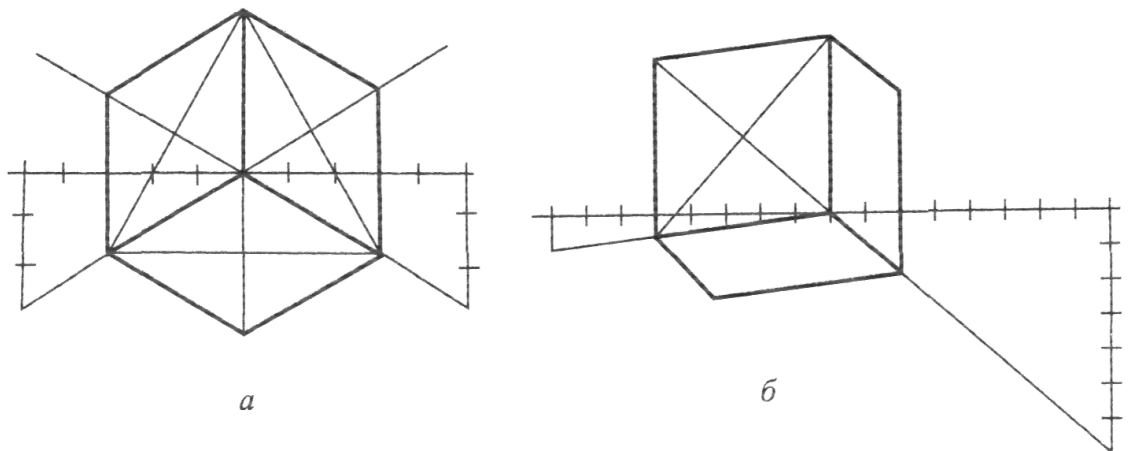


Рис. 9.3. Побудова квадрата в аксинометрії.

При малюванні правильного шестикутника або трикутника (рис. 9.4) використовуються побудови кутів, які було показано на рис. 9.2. Прямокутною аксонометрією кола у площині рівня є еліпс (рис. 9.5), який малюють за вісьмома точками. Чотири точки ( $A, C, E, G$ ) є точками дотику кола до сторін описаного квадрата. Ще чотири точки ( $B, D, F, H$ ) визначаються на чвертях діагоналей квадрата, які наближено поділяються вписаним колом у відношенні 2:3. Слід пам'ятати, що горизонтальне коло у прямокутній аксонометрії зображається еліпсом з горизонтальною і вертикальною осями симетрії.

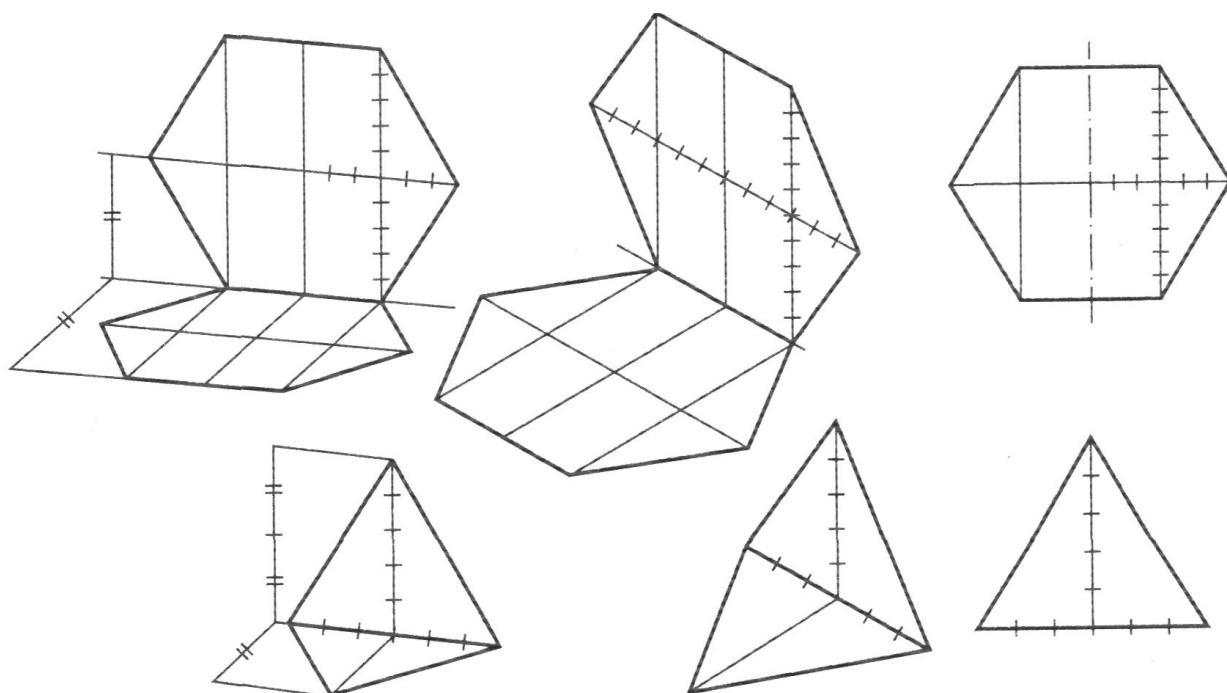


Рис. 9.4. Малювання шестикутника і трикутника.

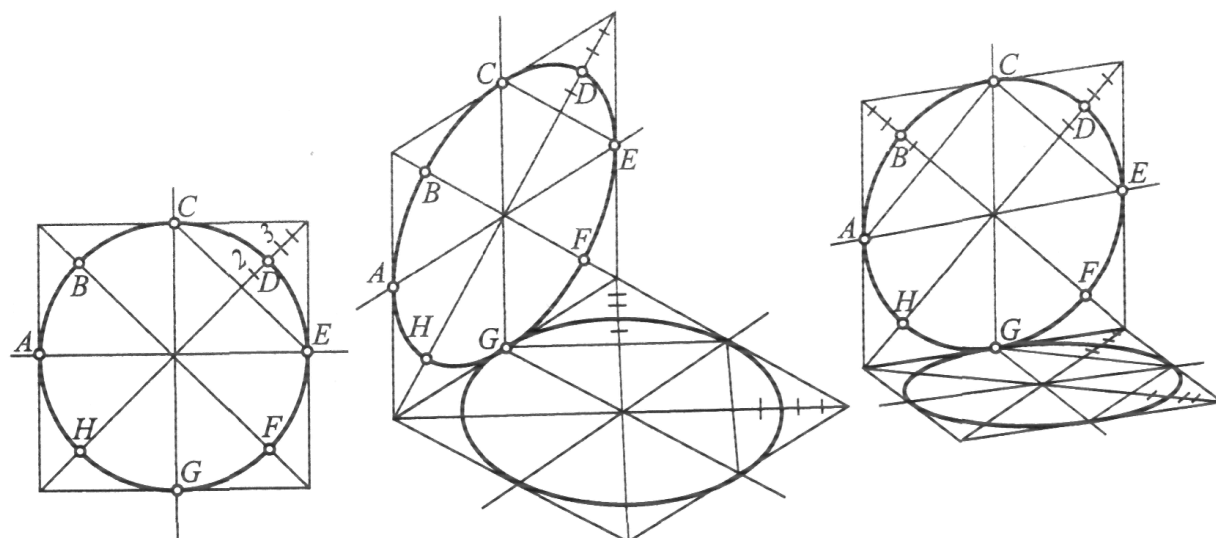


Рис. 9.5. Малювання прямокутної аксиометрії кола.

## 9.2. Малювання геометричних тіл і технічних деталей

Геометричні тіла і технічні деталі малюють з натури або за ортогональними проекціями. На першому етапі досліджують об'єкт малювання:

- ◆ визначають положення об'єкта на малюнку;
- ◆ встановлюють наближене співвідношення розмірів об'єкта і його частин;
- ◆ визначають побудову об'єкта, уявно розчленовуючи його на прості складові геометричні форми;
- ◆ при наявності внутрішніх порожнин або отворів встановлюють форму і положення вирізів;
- ◆ залежно від форми об'єкта і його складових частин, обирають тип аксонометричної проекції.

На другому етапі розв'язують задачу компоновки (розміщення) зображення на форматі. Компоновка зображення є елементом більш широкого поняття «композиції». Під композицією розуміють співвідношення та взаємне розташування частин цілого. В художньому малюванні композиція це упорядкований розподіл елементів зображення на обмеженій площині, приведення окремих компонентів у взаємозв'язок, встановлення між ними



різних відношень – психологічних, пластичних, кольорових. В технічному малюванні вимоги до композиції суттєво спрощуються і зводяться до зорового рівномірного розміщення зображень на форматі. Задача компоновки одного зображення ще простіша і полягає у встановленні співвідношень габаритних розмірів зображення з шириною полів на форматі. Ширина полів призначається в межах  $1/4$ - $1/8$  ширини або висоти зображення. Для несиметричних об'єктів «на око» визначається центр тяжіння зображення, який відповідає центру формату. Зменшення нижнього поля відносно верхнього створює враження усталеності зображення. Існує два способи компоновання зображення на форматі. Перший полягає у тому, що об'єкт уявно вписують в просту геометричну фігуру (куб, паралелепіпед, конус, циліндр), яку і компонують на форматі. При взаємному розміщенні двох геометричних фігур завжди легше компоновати фігуру простої геометричної форми відносно фігури більш складної. Тому прямокутник формату простіше підібрати до зображення, ніж навпаки. Ця обставина використовується для компоновки зображення другим способом. На окремому аркуші зменшено, але з дотриманням пропорційних співвідношень об'єкта, виконується схематичний малюнок, навколо якого підбирають прямокутну рамку (рис. 9.6), після чого основні композиційні співвідношення, збільшуючи, переносять на формат. З наданих на рис. 9.6 трьох варіантів компоновки зображення найбільш вдалим є варіант "а"; у варіанті "б" зображення надто затиснуте з боків і орієнтація формату не відповідає орієнтації зображення. У варіанті "в" зображення затиснуте по вертикалі і справа. Третій етап – побудова дротяного малюнка. Дротяним називається зображення предметів, неначе виконаних з дроту. На початку малювання дуже важливо правильно побудувати аксонометричні осі, для чого використовуються прийоми, показані на рис. 9.2. Малюнок виконується у послідовності від загального і основного до окремого і другорядного. Основні форми предмета уявляють вписаними у прості геометричні фігури (призми, піраміди, циліндри, конуси і т.п.), після чого від цих фігур відокремлюють або нарощують до них окремі дрібні елементи. При технічному малюванні неприпустимим є спотворення форми, і тому положення всіх точок і ліній визначається за допомогою геометричних побудов від руки, для чого малюнок спочатку виконується "прозорим". На рис. 9.7 наведено дротяний малюнок композиції геометричних тіл.

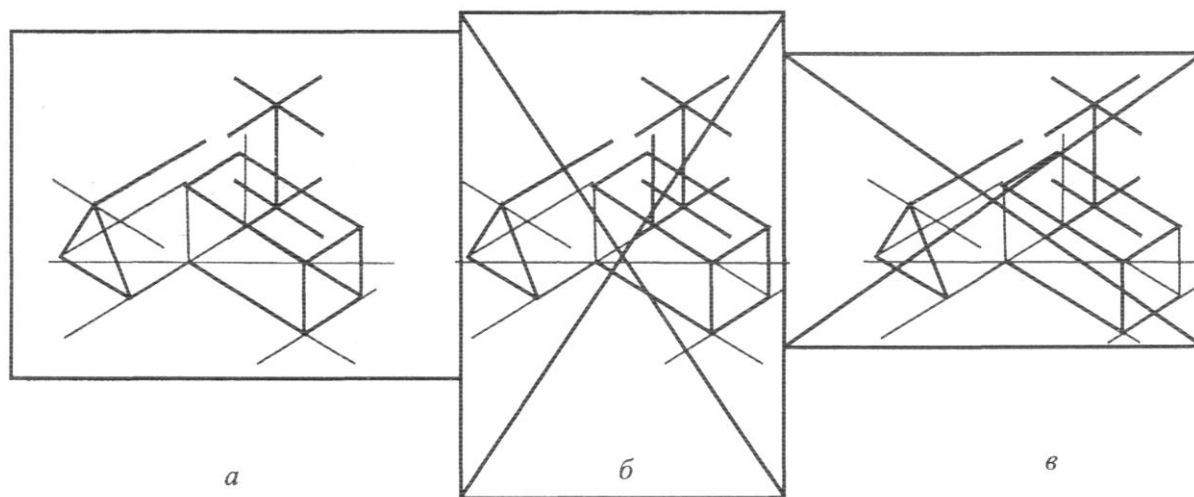


Рис. 9.6. Компоновка зображення.

На четвертому етапі наносять світлотіні на поверхнях предмета, виділяючи її шрафуванням, і остаточно оформлюють малюнок.

На рис. 9.8 показано послідовність виконання технічного малюнка машинобудівної деталі.

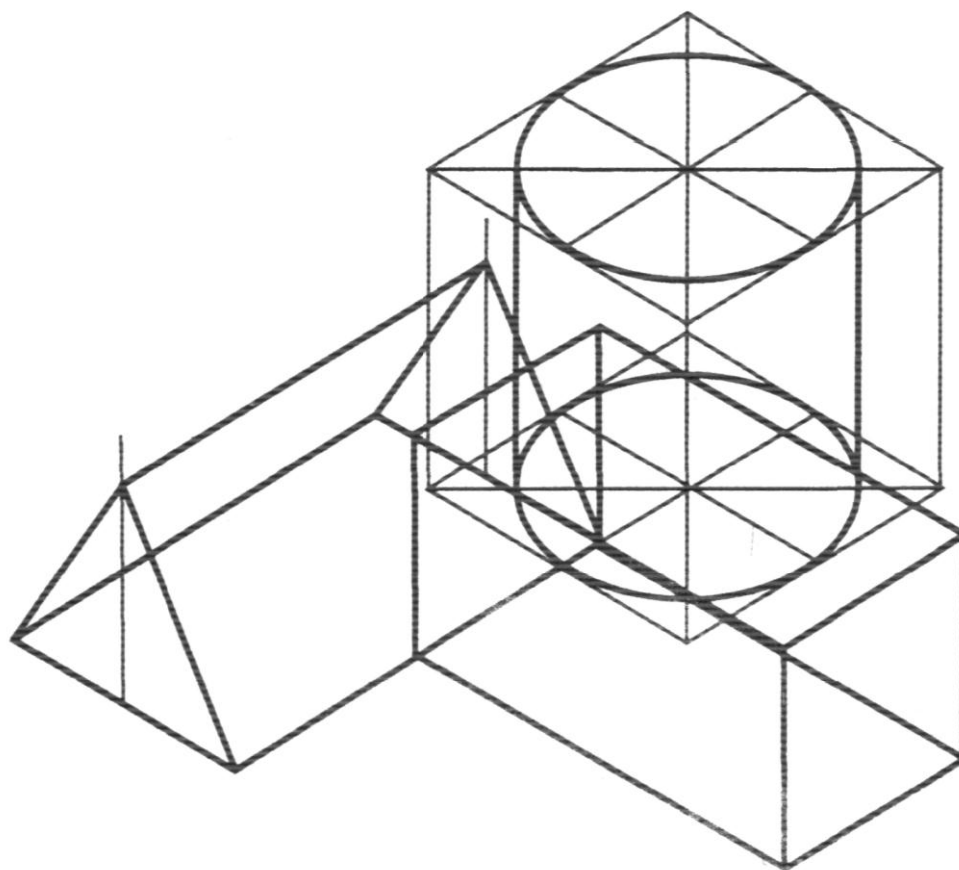


Рис. 9.7. Дротяний малюнок композиції геометричних тіл

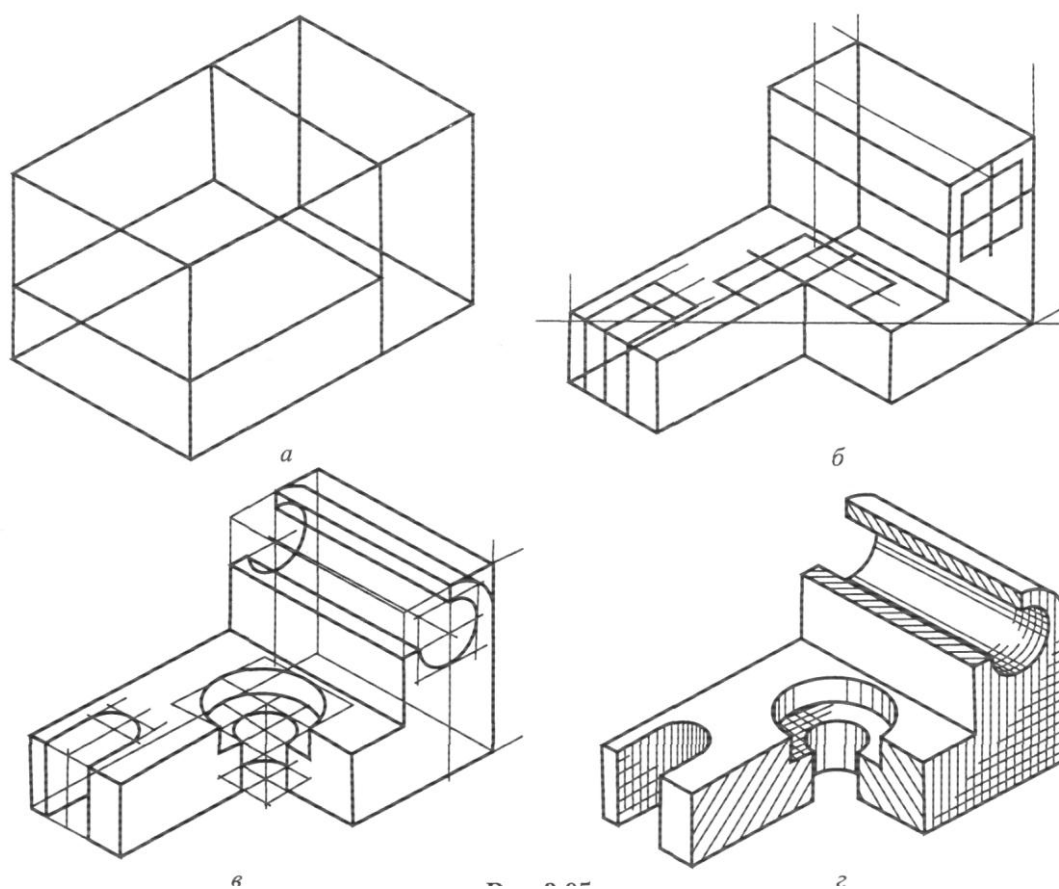


Рис. 9.8. Послідовність виконання технічного малюнка машинобудівної деталі.

### 5.3. Світлотінь на технічному малюнку

**Світлотінню** називається розподіл світла на поверхнях предмета. Освітлення буває розсіяним і спрямованим. В обох випадках джерело освітлення прийнято розмішувати зверху зліва ззаду від того, хто малює. Світлотінь складається з кількох елементів: падаюча тінь, власна тінь, рефлекс, півтінь, світло і відблиск. Падаючою називається тінь, яка утворюється від одних елементів предмета на інших елементах або предметах. Власна тінь – тінь, що знаходиться на неосвітлених поверхнях, які звернуті у бік, протилежний напрямку світлових променів. Півтінь утворюється на границях переходу від світла до тіні. Рефлексом називається відбите світло у зонах власної тіні. Відблиск – найсвітліша пляма освітленої поверхні.

Світлотінь, що утворюється при розсіяному освітленні, наносять на поверхнях без геометричних побудов за допомогою шрафірування, наближено визначаючи зони елементів світлотіні. На рис. 9.8г показано технічний малюнок деталі, а на рис. 9.9 – композицію геометричних тіл з нанесеною світлотінню при розсіяному освітленні.

При спрямованому освітленні тіні будують за алгоритмами розв'язання позиційних задач нарисної геометрії. Для побудови тіней задають напрям  $S$  світлових променів аксонометричною ( $S'$ ) і вторинною ( $S_1'$ ) проекціями (рис. 2.97). Площина, якій належать світлові промені, називається світловою. Горизонтально проекціюючи світлова площина визначається аксонометричною і вторинною проекціями світлового променя.

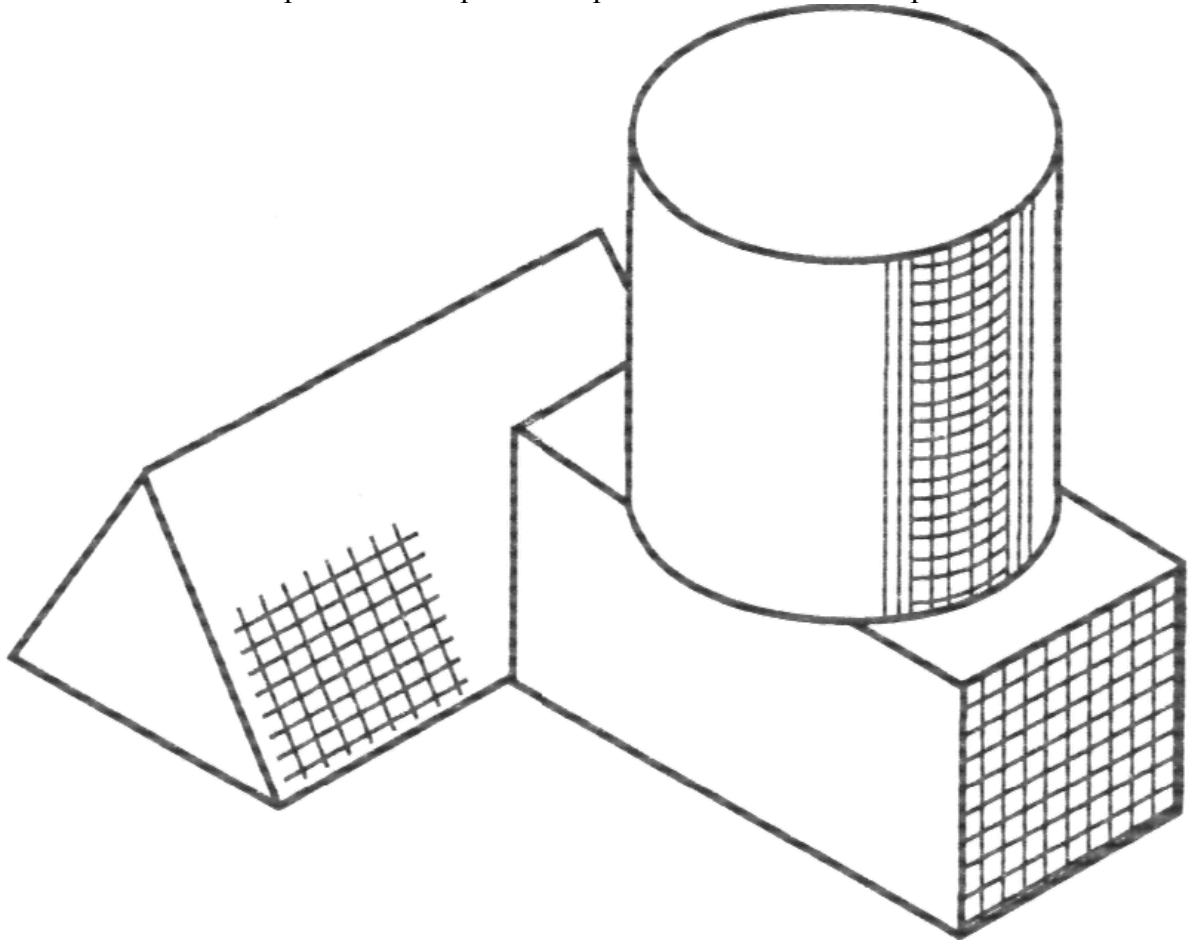


Рис. 9.9. Композиція геометричних тіл з нанесеною світлотінню при розсіяному освітленні.

На рис. 9.10 світловою є площина  $A'A_1'A'_m$ . Лінія перерізу будь-якої поверхні світловою площиною називається слідом світлової площини. На рис. 9.10 слід світлової площини складається з двох ліній –  $a$  та  $b$ , де  $a$  – лінія перетину світлової площини з площиною  $xOy$ , а  $b$  – з  $yOz$ . Падаюча тінь  $A_m$  від точки  $A$  визначається як точка пере-

тину світлового променя, що проходить через точку  $A$ , зі слідом світлової площини. Тінь  $B'_m$  від точки  $B$  падає на площину  $yOz$ . На рис. 9.11 показано побудову падаючої тіні від точки  $C$  на площині  $PQR$  загального положення. Спочатку визначається слід  $DE$  вертикальної світлової площини на площині  $PQR$ , а тоді на ньому будується падаюча тінь  $C'_m$  від точки  $C$ .

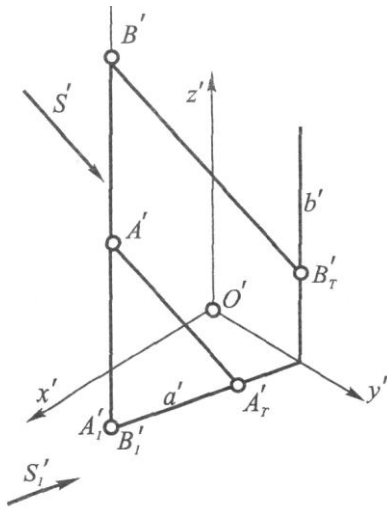


Рис. 9.10. Побудова сліду світлової площини.

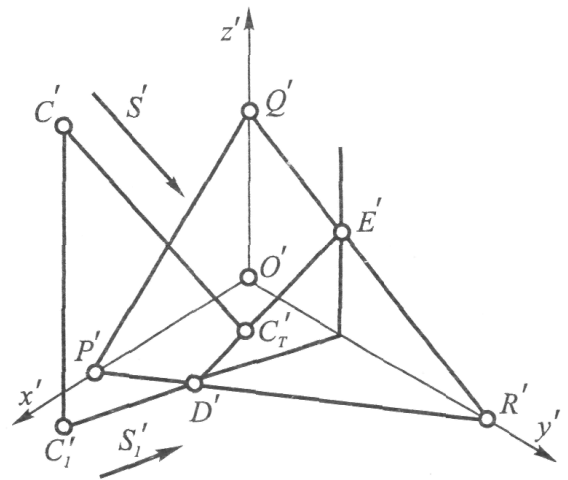


Рис. 9.11. Побудова падаючої тіні від точки.

На гранних поверхнях границі власної тіні збігаються з ребрами багатогранника. Дві грані при такому ребрі повинні бути з одного боку від світлової площини, що проходить через ребро (рис. 9.12). На циліндрі границя власної тіні визначається як лінія дотику світлової площини до поверхні. На рис. 9.13 світлову площину визначено її слідом  $m$  на площині основи циліндра і твірною  $n$  циліндра. Твірна  $n$  і є границею власної тіні.

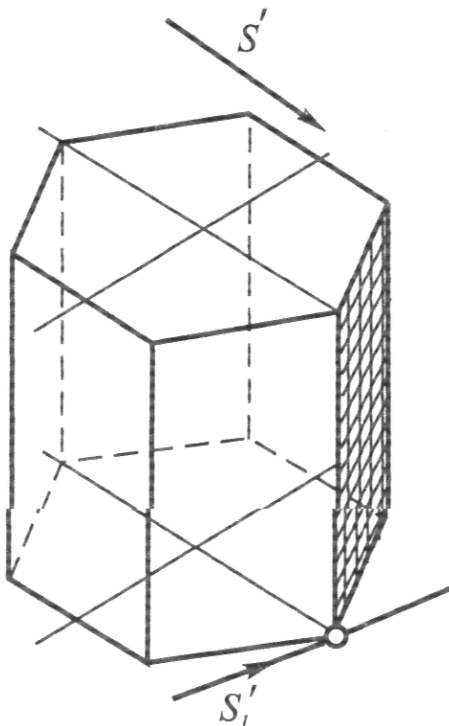


Рис. 9.12. Побудова власної тіні багатогранника.

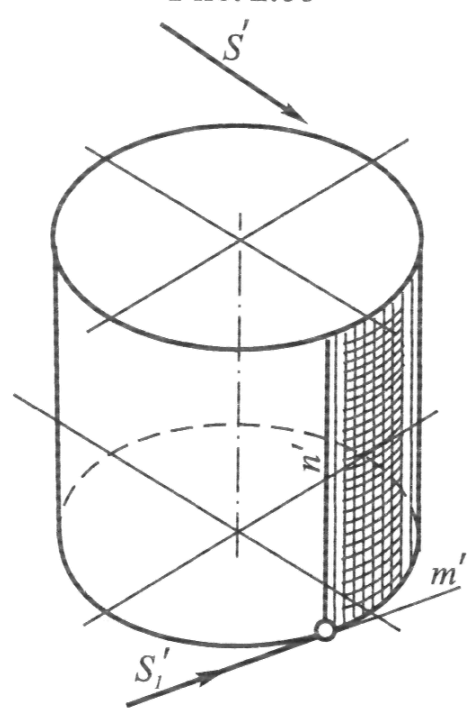


Рис. 9.13. Побудова власної тіні циліндра.

Для визначення границі власної тіні на конусі (рис. 9.14) будують падаючу тінь  $T_m'$  від його вершини  $T$  на площину основи і з точки  $T_m'$  проводять дотичні до основи. Точки  $M'$  і  $N'$  дотику разом з вершиною  $T'$  визначають твірні  $T'M'$  і  $T'N'$  конуса, які є границею власної тіні. Аналогічно визначається границя власної тіні на піраміді (рис. 9.15).

Контур падаючої тіні будується як тінь від контура власної тіні. При побудові падаючих тіней від прямих враховують такі властивості:

- падаюча тінь від прямої є слідом світлової площини, що проходить через пряму;
- падаюча тінь від вертикальної прямої на горизонтальній площині паралельна вторинній проекції світлового променя;
- падаюча тінь від відрізка на паралельній йому площині паралельна самому відрізку і дорівнює йому за довжиною.

На рис. 9.16 показано побудову тіней при спрямованому освітленні на малюнку композиції геометричних тіл.

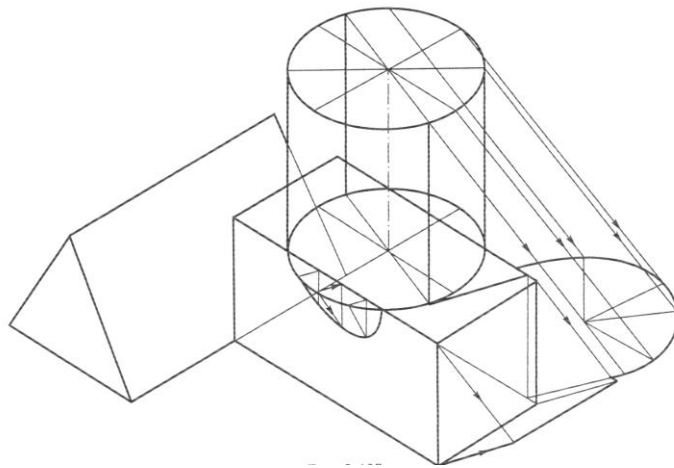
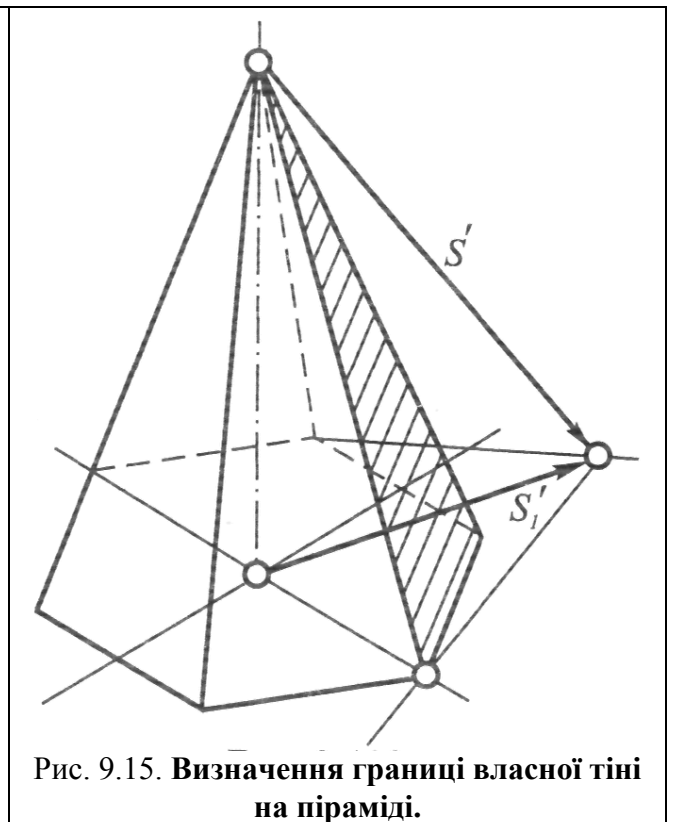
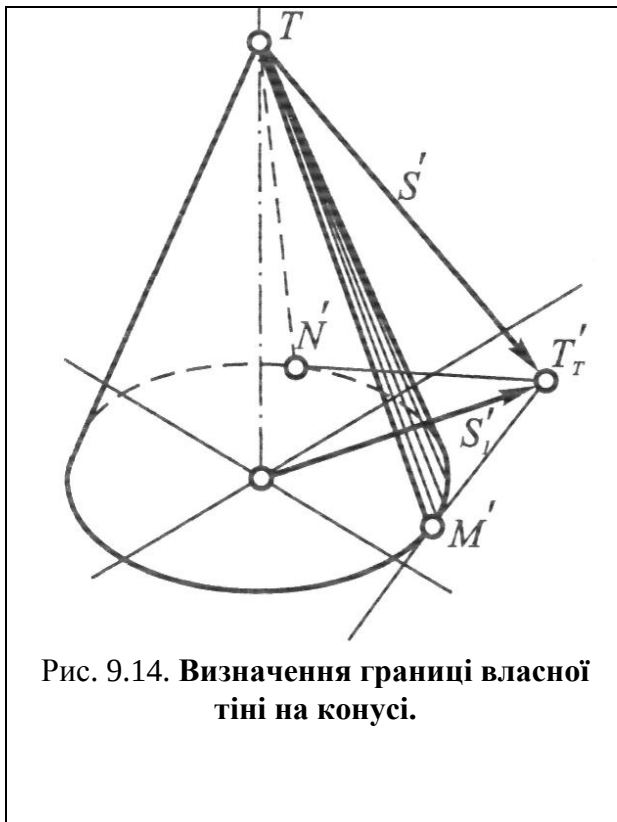


Рис. 9.16 Побудова тіней при спрямованому освітленні на малюнку композиції геометричних тіл.

#### 9.4. Штрихування і шрафірування

Перерізані елементи у вирізах на малюнку перекриваються штрихуванням, а світлотінь виділяють шрафіруванням. Штрихування на малюнку виконується так само, як і на кресленнях, але від руки. Потрібно пам'ятати, що нахил ліній штрихування в аксонометрії будується як діагональ відповідного квадрата.

Шрафіруванням називається штрихування сіткою. Напрямок штрихів шрафірування обирається так, щоб шрафірування підкреслювало форму предмета або поверхні. На циліндрах і конусах обертання лінії шрафірування проводять вздовж твірних і колових перерізів (рис. 9.13, 9.17), на площинах загального положення – вздовж горизонталей і ліній найбільшого ухилу, на площинах рівня – паралельно відповідним аксонометричним осям. Лінії шрафірування можуть бути довгими і короткими, прямими і кривими. Щільність шрафірування на поверхні, як правило, неоднакова. Зміна інтенсивності шрафірування досягається за рахунок багаторазового нанесення штрихів.

При нанесенні на малюнках світлотіні шрафіруванням дотримуються таких основних правил:

- падаюча тінь повинна бути темнішою за власну, оскільки власна тінь частково ослаблюється відбитим світлом;
- за правилами "повітряної перспективи" контрасти між світлом і тінню на передньому плані більші, ніж на задньому.

Тому тіні в міру віддалення поступово ослаблюються, а освітлені поверхні – навпаки, на задньому плані трохи перекриваються шрафіруванням.

На рис. 9.17 шрафіруванням показано світлотіні на малюнку геометричних тіл при спрямованому освітленні.

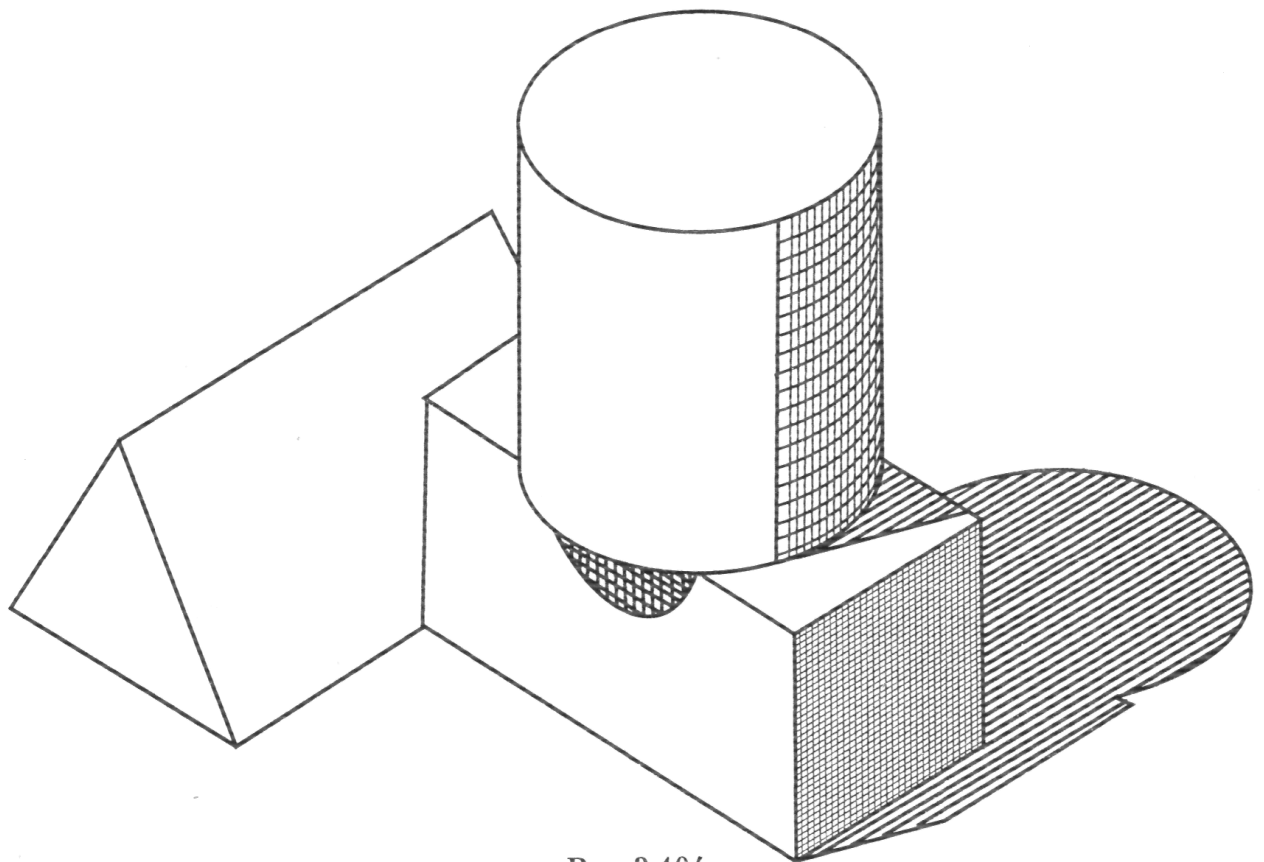


Рис. 9.17. Шрафірування композиції геометричних тіл.

### Запитання та вправи для самоперевірки

1. У чому полягає різниця між технічним і художнім малюнком?
2. Згадайте наближені способи побудови кутів нахилу аксонометричних осей.
3. Поділіть "на око" відрізок прямої завдовжки 100-120 мм на  $n = 3;4;5;6;7;8$  рівних частин. Перевірте точність поділу за допомогою лінійки.
4. Згадайте послідовність виконання технічного малюнка.
5. Які прийоми застосовуються для компоновки зображення на форматі?
6. Намалюйте від руки прямокутний паралелепіпед із співвідношенням ребер 3:4:6 у прямокутній ізометрії. Перевірте правильність побудов за допомогою креслярських інструментів.
7. Який малюнок називається дротяним?
8. Згадайте елементи світлотіні на технічному малюнку у послідовності від найтемнішого до найсвітлішого.
9. У яких напрямках проводять штрихи шрафірування на площинах і поверхнях?

### ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ №9

1. Виконати технічний малюнок композиції геометричних тіл призми і кулі.

### РІВНІ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ

#### *Переведення рейтингових в традиційні оцінки та оцінки ECTS*

| Вимоги до знань                                                                                                     | Рейтинг з дисципліни | Оцінка ECTS                                            | Традиційна оцінка |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------------|-------------------|
| Оформлення звіту згідно із завданням викладача – 60 балів, отримано правильні відповіді на всі запитання – 40 балів | 90 – 100 балів       | <b>A</b> – відмінно                                    | Відмінно          |
|                                                                                                                     | 80 – 89 балів        | <b>B</b> – дуже добре                                  | Добре             |
|                                                                                                                     | 75 – 79 балів        | <b>C</b> – добре                                       |                   |
|                                                                                                                     | 65 – 74 бали         | <b>D</b> – задовільно                                  | Задовільно        |
|                                                                                                                     | 60 – 64 бали         | <b>E</b> – достатньо (задовільняє мінімальні критерії) |                   |
|                                                                                                                     | 50 – 59 балів        | <b>FX</b> – незадовільно                               | Незадовільно      |
|                                                                                                                     | Менше 50 балів       | <b>F</b> – незадовільно (потрібна додаткова робота)    |                   |

### ОСНОВНІ ПРАВИЛА З ОХОРОНИ ПРАЦІ

Стан приміщень і технологічного обладнання має відповідати вимогам, що гарантують безпечне виконання робіт, а також забезпечують потрібний рівень виробничої санітарії та гігієни.

Всі магістралі не повинні створювати перешкод для вільного пересування студентів і науково-педагогічних працівників.

Відповідальність за техніку безпеки при виконанні лабораторно-практичних робіт несе викладач.

Нарисна геометрія.

Навчально-методичний посібник для самостійної роботи та лабораторно-практичних занять за кредитно – модульною системою навчання студентів агрономічного факультету за напрямом – лісове та садово-паркове господарство

**Сенчук** Микола Миколойович, **Рубець** Андрій Миколайович

*Редактор О.О. Грушко*

*Комп'ютерна верстка:*

Завдання до складання 2. 02.2011. Підписано до друку 2.03.2011.  
Формат 60х84 1/8 Ум. друк. арк. 10. Тираж 50. Зам.5100 Ціна 45  
РВІКВ БДАУ Сектор операційної поліграфії  
09117, Біла Церква, Соборна площа 8/1. Тел. 3-11-01