УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З КРУГОВОЮ ПОРОЖНИНОЮ ПРИ ЗАДАНІЙ НА ПОВЕРХНІ РОЗЩІПЛЮЮЧІЙ СИЛІ

Іван Хома, Тетяна Прощенко, Оксана Стригіна

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;

Київський національний університет імені Тараса Шевченка (Україна);

Білоцерківський національний аграрний університет (Україна)

t.proshenco@gmail.com; oks9269@yandex.ua

Методом розвинення в ряди Фур’є за поліномами Лежандра побудовано систему рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропної пластини за змішаних умов на плоских гранях і однорідних умов для нормального переміщення і дотичних напружень. Наведено спосіб побудови загального аналітичного розв’язку такої системи і знайдено розв’язок задачі про напружений стан пластини з круговою циліндричною порожниною, на поверхні якої задано значення розщіплюючої сили (врівноваженої за товщиною пари сил, що працюють на розщеплення або стиск пластини у серединній площині).

Нехай пластину товщини $2h = \text{const}$ віднесено до декартової системи координат x_i, $i = 1,2,3$, причому x_1, x_2 розташовані на серединній площині S, що співпадає з площиною ізотропії, а $x_3 \in [-h, h]$. Пластина послаблена круговою циліндричною порожниною радіуса R, на поверхні $R \times [-h, h]$ якої задано значення розщіплюючої сили:

$$\sigma_{r3}(r, \vartheta, x_3) = -q x_3 / h, \quad q = \text{const},$$

а на плоских гранях $x_3 = \pm h$ виконуються умови ковзного закріплення

$$u_3(r, \vartheta, \pm h) = 0, \quad \sigma_{3\alpha}(r, \vartheta, \pm h) = 0, \quad \alpha = 1,2. \tag{1}$$

Для розв’язання задачі скористаємося методом [1, 2]. Приймемо, враховуючи (1), компоненти вектора переміщень u_j у вигляді

$$u_\alpha = \sum_{k=0}^{N} u_\alpha^{(k)}(x) P_k(\zeta), \quad \alpha = 1,2, \quad u_3 = \sum_{k=0}^{N} u_3^{(k)}(x) \left[P_k(\zeta) - P_{k+2}(\zeta) \right],$$

а тензор напружень σ_{ij} подамо:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^{N} \sigma_{ij}^{(k)}(x) P_k(\zeta),$$

де $x = (x_1, x_2) \in S$, $\zeta = h^{-1} x_3 \in [-1,1]$, $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коефіцієнти (моменти) розвинення, $N = 2n$, $n = 0,1,\ldots$.

Для моментів розвинення, як функцій двох незалежних змінних, побудовано систему диференціальних рівнянь і знайдено її загальний аналітичний розв’язок, виражений через метагармонічні функції V_m і w_s , що є розв’язками рівнянь Гельмгольца. Зі співвідношень пружності знаходимо моменти компонент напружень. В полярній системі координат r, ϑ їх подано в комплексній формі таким чином, звідки отримуємо вирази для граничних умов на контурі кругового отвору на площині S. За заданого навантаження маємо осесиметричну задачу.

Визначивши з граничних умов значення метагармонічних функцій, знаходимо компоненти напружень. Виконано числові розрахунки напруженого стану пластини. В околі порожнини найбільше значення мають поперечні напруження σ_{33} . На рис. 1 наведено криву зміни σ_{33} в залежності від відношення модулів пружності E/E' , а крива на рис. 2 характеризує затухання σ_{33} при віддаленні від поверхні порожнини.

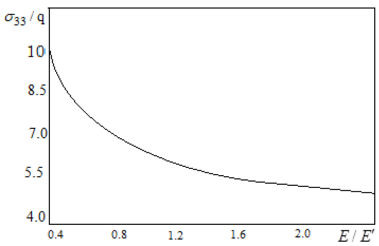

Рис. 1

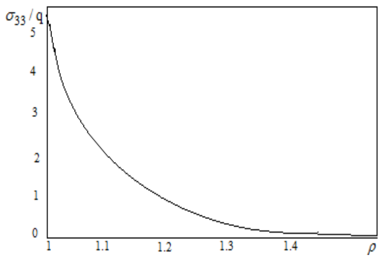

Рис. 2

1. *Векуа И.Н.* Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. матем. ин-та. – 1965. – Вып. 30. – С. 3-102.
2. *Khoma I.Yu.* Representation of the solution of the equilibrium equations for non-thin transversely isotropic plates // J. Math. Sci. – 2000. – **101**, № 6. – P. 3577-3584.

ANALYSIS OF THE STRESS STATE OF A TRANSVERSELY ISOTROPIC PLATE WITH A CIRCULAR CAVITY UNDER A SPLITING FORCE ON THE SURFACE

Making use of a method allowing for the decomposition of unknown functions into Fourier series by the Legendre polynomials, a system of elastic equilibrium equations is constructed for a transversely-isotropic plate with initial stresses and mixed conditions on the plane boundaries. The normal displacement and the tangential stress on the boundary are supposed to be zeros. The proposed method allows for achieving a universal analytical solution of the mentioned equations.