

Навчально-тренінгове заняття **«Формування лінійної математичної моделі методом найменших квадратів»**

Мельниченко Олена Петрівна, доцент кафедри вищої математики і фізики Білоцерківського НАУ, кандидат сільсько-господарських наук, керівник гуртка з математики БНВО «Лицей-МАН», Біла Церква

Скажи мені – і я забуду,
Покажи мені – і я запам'ятаю,
Дай мені діяти самому – і я навчуся...
Китайська народна мудрість

Мета уроку:

- ✓ ознайомити учнів з лінійною математичною моделлю;
- ✓ формувати уміння і навички учнів створювати лінійне рівняння тренду;
- ✓ аналізувати та порівнювати розв'язання; поглибити знання учнів про функціональну залежність;
- ✓ розвивати логічне мислення, вміння аналізувати ситуацію; виробити уміння в учнів самостійно аналізувати умову й знаходити спосіб розв'язання конкретної задачі;
- ✓ виховувати самостійність у роботі, бажання доводити розпочату справу до її завершення.

Тип уроку: формування вмінь і навичок.

У процесі навчально-тренінгового заняття учасники зрозуміють наступне:

- ✓ що називають математичною моделлю;
- ✓ які існують математичні моделі;
- ✓ як можна задати математичну модель;
- ✓ коли ми вдаємося до математичного моделювання.
- ✓ розвивати логічне мислення, вміння виховувати самостійність у роботі, бажання доводити розпочату справу до її завершення.

Учасники навчаться:

- ✓ скласти лінійну математичну модель;
- ✓ формувати лінійне рівняння тренду;
- ✓ аналізувати та порівнювати розв'язання;
- ✓ самостійно аналізувати умову й знаходити спосіб розв'язання конкретної задачі;
- ✓ поглиблюють знання про функціональну залежність.

Учасники опанують:

- ✓ інструментарій методу найменших квадратів;
- ✓ принципи функціональної залежності в статистичних дослідженнях.

План уроку

- I. Організаційний момент (2 хв)
- II. Повідомлення теми, мети й завдань уроку (2 хв)
- III. Актуалізація опорних знань, умінь, навичок (15 хв)
- IV. Формування вмінь і навичок (23 хв)
- V. Підсумки уроку. (2 хв)
- VI. Домашнє завдання (1 хв)

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент

II. Повідомлення теми, мети й завдань уроку

Вчитель: Кожна наша зустріч додає вам не лише знання з математики, вміння розв'язувати складні вправи, а й додає навиків написання самих манівських робіт. Ми вже говорили, щоб написати роботу у секції математика необхідно зробити правильний вибір теми, описати ту інформацію, що є в літературі та сформулювати авторське доведення представлених теорем, оригінальні задачі та їх нестандартні розв'язки.

Сьогодні ми будемо говорити про підходи до формування математичних моделей. І, зрозуміло, що елементи представлених досліджень можуть стати у нагоді при написанні роботи з математичного моделювання. Крім того, цей матеріал може бути доречним і для написання робіт у секції прикладної математики.

Тому темою нашого заняття є:

Формування лінійної математичної моделі методом найменших квадратів.

III. Актуалізація опорних знань, умінь, навичок

Вчитель: Давайте згадаємо, що ми називаємо математичною моделлю?

Учень: Математична модель – система математичних співвідношень, які описують досліджуваній процес або явище.

Вчитель: Як можна задати математичну модель?

Учень: Геометрично (у вигляді фігури); аналітично у вигляді функціональної залежності, рівняння); графічно (у вигляді графіка).

Вчитель: Коли ми вдаємося до математичного моделювання?

Учень: Насамперед, буває так, що можливості спостереження вичерпані, а постановка експерименту, крім його дорожнечу, загрожує небажаними наслідками; так дуже часто буває в соціальному пізнанні (вказемо, наприклад, на проблему раціонального використання ресурсів). В історичних дослідженнях пряме експериментування неможливо вже з-за того, що досліджувані процеси і події відійшли в минуле. Крім того, історик майже ніколи не має відомостей

про генеральної сукупності його цікавлять масових (випадкових) явищ, шляхом вивчення (спостереження) якої можна було б прийти до формулювання певної закономірності. Йому доводиться задовольнятися якийсь вибіркою, так що знову-таки виникає потреба в моделюванні.

Вчитель: А тепер сформуємо проблему. Маючи деяку статистичну інформацію чи то про урожайність певної культури, чи то про забрудненість річки або повітря, чи то про успішність учнів з певних предметів, як ми можемо подати цю інформацію?

Учень: У вигляді таблиці або графіка.

Вчитель: Ця інформація характеризує процес лише в досліджений період. А я б хотіла, щоб з отриманої інформації ви, як справжні науковці, могли зробити певні висновки та спрогнозувати подальший розвиток.

Учень: Тоді нам необхідно скласти функцію, яка описуватиме це явище.

Вчитель: Одним із методів формування такої функції є метод найменших квадратів. Суть методу найменших квадратів полягає в відшукуванні параметрів моделі тренда, яка краще всього описує тенденцію розвитку якого-небудь випадкового явища в часі або в просторі. Що ми розуміємо під трендом?

Учень: Тренд – це лінія, яка й характеризує тенденцію цього розвитку.

Вчитель: Завдання методу найменших квадратів зводиться до знаходження не просто якоїсь моделі тренда, а до знаходження кращої або оптимальної моделі.

Слід пам'ятати, що інформаційною основою методу найменших квадратів може бути тільки достовірний статистичний ряд із достатнім числом спостережень.

Учень: А яке оптимальне число спостережень?

Вчитель: Для кожної галузі це число різне. Наприклад біологічні дослідження обмежують 5-10 показниками. Показники з психології та соціології можуть сягати і 50 показників. Все залежить від масовості явища та експерименту, який формує науковець.

Повернемося до методу найменших квадратів. Інструментарій його зводиться до наступних процедур:

- з'ясувати, чи існує взагалі яка-небудь тенденція зміни результативної ознаки при зміні вибраного чинника-аргументу;
- визначити тип лінії (траєкторія), яка здатна краще всього описати або охарактеризувати цю тенденцію;
- розраховувати параметри регресійного рівняння, що характеризує дану лінію, або іншими словами, визначається аналітична формула, що описує кращу модель тренда.

Нехай залежність між двома змінними x та y задана у вигляді таблиці одержаної дослідним шляхом. Це можуть бути результати досліду або спостережень.

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Треба підібрати таку функцію $y = f(x)$, яка в певному розумінні «найкращим чином» була б вписана в множину даних точок. Нехай дану залежність можна описати лінійною функцією $y = kx + b$. Параметри a та b можна знайти розв'язавши систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot k + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot k + bn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Таку систему називають системою нормальних рівнянь.

Розглянемо приклад. Маємо дані про ціну нафту x (гр. од) і індекс нафтових компаній y (ум. од).

x	17,28	17,05	18,30	18,80	19,20	18,50
y	537	524	550	555	560	552

Припускаючи, що між змінними x та y існує лінійна залежність, знайти емпіричну формулу виду $y = kx + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

Знайдемо необхідні для розрахунків суми:

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
	17,28	529	9279,36	298,598
	17,05	524	9104,70	290,702
	18,30	550	10065,00	334,890
	18,80	555	10434,00	353,440
	19,20	560	10752,00	368,560
	18,50	552	10212,00	342,250
Σ	109,13	3288	59847,06	1988,520

Система нормальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} 1988,52k + 109,13b = 59847,06 \\ 109,13k + 6b = 3288 \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знайдемо $k=12,078$, $b=328,28$.

Тоді $y = 12,078x + 328,28$. Таким чином, із збільшенням ціни нафти на 1 грошову одиницю індекс акцій нафтових компаній в середньому зростає на 12,078 умовних одиниць.

IV. Формування вмінь і навичок

Переходимо до наступного етапу нашого заняття: формування вмінь і навичок. І сьогодні ми це зробимо наступним чином. Ми маємо декілька експертних груп і у кожній групі є своє завдання і свій керівник. Керівник повинен призначити кожному учаснику своє завдання: хтось буде зображати біля дошки експериментальні точки, хтось рахувати суми, а комусь дістанеться знайти розв'язки системи.

Завдання для 1 групи. Динаміка викидів шкідливих речовин в атмосферне повітря деякими стаціонарними джерелами в окремих містах України подана в таблиці:

x , роки	2012	2013	2014	2015	2016	2017
y , т	55	58	57	59	60	63

Побудуйте графік та перевірте чи існує лінійна залежність між змінними x та y . Знайдіть емпіричну формулу виду $y = kx + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

Завдання для 2 групи. Представлено динаміку народжуваності немовлят за певний період в Україні:

x , роки	2000	2001	2002	2003	2004	2005
y , тис	358	378	392	410	428	462

Побудуйте графік та перевірте чи існує лінійна залежність між змінними x та y . Знайдіть емпіричну формулу виду $y = kx + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

Завдання для 3 групи. На вугільних шахтах України середня продуктивність праці задана таблицею:

x , роки	2012	2013	2014	2015	2016	2017
y , млн. грн.	100	156	170	184	194	205

Побудуйте графік та перевірте чи існує лінійна залежність між змінними x та y . Знайдіть емпіричну формулу виду $y = kx + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

Підійшов час оголосити результати роботи експертних груп.

V. Підсумки уроку

Вчитель: Давайте ще раз пригадаємо, коли ми можемо скористатися методом найменших квадратів?

Учень: При статистичних дослідженнях. Коли необхідно сформувати лінійну функціональну залежність між елементами двох множин.

Вчитель: Що необхідно насамперед зробити, коли ми використовуємо даний метод?

Учень: Перевірити, що буде графіком представленої залежності.

Вчитель: Чи для будь-яких досліджень можна застосувати вказаний метод?

Учні: Для будь-яких.

VI. Домашнє завдання

Вчитель: Я б хотіла, щоб елементи ваших досліджень охоплювали коло як можна більшого радіусу. Тому спробуйте сформулювати свою статистичну таблицю: це можуть бути ціни на бензин, рівень успішності учнів вашого класу за останні 5 років, це може бути ціна на ваші улюблені булочки в шкільній їдальні. Створіть рівняння тренду та спробуйте сформулювати прогноз.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

Задача 1. У таблиці подано середню успішність учнів (Y , бали) деякого класу за 10 років:

X , роки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y , бали	8	8	9	9	7	8	8	9	10	9

Побудуйте графік та перевірте чи існує лінійна залежність між змінними x та y . Знайдіть емпіричну формулу виду $y = kx + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

Задача 2. У таблиці подано урожайність соняшнику (Y , т/га) на полях Київської області за 5 років:

X , роки	2014	2015	2016	2017	2018
Y , т/га	2,05	2,20	2,66	2,92	3,03

Побудуйте графік та перевірте чи існує лінійна залежність між змінними x та y . Знайдіть емпіричну формулу виду $y = kx + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

Задача 3. У таблиці представлено довжини X в міліметрах і маса Y в грамах 10 штук яєць однієї курки:

X , мм	60	58	57	55	56	58	55	57	55	59
Y , г	56	53	4	51	54	59	55	55	56	57

Побудуйте графік та перевірте чи існує лінійна залежність між змінними x та y . Знайдіть емпіричну формулу виду $y = kx + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

Задача 4. У таблиці представлені дані щодо вмісту жиру (X , %) і білка (Y , %) в молоці першої лактації корів швейцарської породи:

X , %	3,78	3,63	3,68	3,65	3,70	3,79	3,85	3,92	4,05	4,06
Y , %	3,24	3,10	3,18	3,21	3,25	3,32	3,39	3,40	3,47	3,56

Побудуйте графік та перевірте чи існує лінійна залежність між змінними x та y . Знайдіть емпіричну формулу виду $y = kx + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

Задача 5. У таблиці представлені результати вимірювання діаметра сосни X в сантиметрах і її висоти Y в метрах:

X , см	15	20	25	30	35	40	45
Y , м	18	19	20	21	22	23	24

Побудуйте графік та перевірте чи існує лінійна залежність між змінними x та y . Знайдіть емпіричну формулу виду $y = kx + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

Задача 6. У таблиці подано вік собак певної породи (X , роки) та середній об'єм еритроцитів (Y , од.):

X , роки	2	3	4	5	6	7	8
Y , од.	68	69	68	69	70	72	73

Побудуйте графік та перевірте чи існує лінійна залежність між змінними x та y . Знайдіть емпіричну формулу виду $y = kx + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

Задача 7. У таблиці представлено залежність концентрації парів оцтової кислоти (X , мольн. частки) від концентрації рідини (Y , мольн. частки):

X , мольн. частки	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,6	0,8
Y , мольн. частки	0,79	0,84	0,88	0,91	0,95	0,98	0,99

Побудуйте графік та перевірте чи існує лінійна залежність між змінними x та y . Знайдіть емпіричну формулу виду $y = kx + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

Задача 8. Відома залежність між прибутком банків України (Y , млн. грн.) та величиною їх статутного фонду (X , млн. грн.):

x , млн. грн.	27	14	13	12	11	19	10	9	8
y , млн. грн.	100	102	75	85	70	60	54	52	53

Побудуйте графік та перевірте чи існує лінійна залежність між змінними x та y . Знайдіть емпіричну формулу виду $y = kx + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

Задача 9. У таблиці подано кількість проданих мобільних телефонів у магазині Фокстрот деякого виробника за певний термін:

x , роки	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
y , шт.	100	102	75	85	70	60	54	52	53

Побудуйте графік та перевірте чи існує лінійна залежність між змінними x та y . Знайдіть емпіричну формулу виду $y = kx + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

Задача 10. Відома маса (X , кг) і довжина тіла (Y , см) собаки:

X , кг	49	50	52	54	55	56	57
Y , см	70	81	94	102	120	145	160

Побудуйте графік та перевірте чи існує лінійна залежність між змінними x та y . Знайдіть емпіричну формулу виду $y = kx + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

ВІДПОВІДІ:

Відповіді до завдань при формуванні вмінь і навичок:

1. $y = -2704,08 + 1,37x$; 2. $y = -38958,76 + 19,66x$; 3. $y = -37416,65 + 18,66x$.

Відповіді до задач для самостійного опрацювання:

1. $y = 7,8 + 0,127x$; 2. $y = -717,14 + 0,36x$; 3. $y = 22,43 + 0,57x$;

4. $y = 0,87x$; 5. $y = 15 + 0,2x$; 6. $y = 65,75 + 0,82x$;

7. $y = 0,73 + 0,36x$; 8. $y = 40,63 + 2,56x$; 9. $y = 13666,83 - 6,75x$;

10. $y = -446,74 + 10,45x$.

Використана література

1. Гаркавий В.Г., Ярова В.В. Математична статистика. – К: Професіонал, 2004. – 484 с.
2. Грушко И.М., Сиденко В.М. Основы научных исследований. – 3-е изд., перераб. и доп. – Харьков: Выща шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1983. – 224 с.
3. Кулинич О.І. Економетрія / Кулинич О.І. навч. посіб. – Хмельницький.: Поділля, 1997. – 115 с.
4. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач методом наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986.
5. Турчин В.М. Математична статистика. – К: Академія, 1999. – 240 с.