Похідна

Матеріали для перевірки знань учнів 10-х класів

Авторки цієї статті пропонують на допомогу вчителям-практикам матеріали для перевірки знань учнів із теми «Похідна». Матеріали можна застосувати для організації дистанційного навчання або навчання за методикою «перевернутого класу», оскільки вони містять зразки розв'язування вправ із детальними поясненнями та достатню кількість вправ для перевірки знань учнів. Завдання має п'ять тем — це «Границя функції», «Неперервність», «Правила диференціювання», «Диференціал. Наближене значення функції», «Застосування похідної до дослідження динаміки функцій». Усі теми містять по 30 індивідуальних завдань.

Олена МЕЛЬНИЧЕНКО, кандидат сільськогосподарських наук, доцент кафедри вищої математики і фізики Білоцерківського НАУ, Київська обл.
Уляна РЕВИЦЬКА, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики і фізики

Тема 1 Границі функції. Застосування правил розкриття невизначеностей, утворених алгебраїчними виразами

Приклади розв'язування типових вправ

Приклад 1. Обчислити такі границі

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+6}{7x^2+9x+4}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+5x-8}{3x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x\right)$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+6}{7x^2+9x+4}=\left[\dfrac{3\cdot\infty^2+5\cdot\infty+6}{7\cdot\infty^2+9\cdot\infty+4}\right]=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ **потрібно чисельник і знаменник поділити на** x^n, **де** n **— найбільше значення степеня. Найбільше значення степеня** $n=2$, **тому ділимо чисельник і знаменник на** x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{7x^2}{x^2}+\frac{9x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{7+\frac{9}{x}+\frac{4}{x^2}}=\left[\frac{3+\frac{5}{\infty}+\frac{6}{\infty}}{7+\frac{9}{\infty}+\frac{4}{\infty}}\right]=$$
$$=\frac{3+0+0}{7+0+0}=\frac{3}{7}$$

Зауваження $\dfrac{a}{0}=\infty$, $\dfrac{a}{\infty}=0$.

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+5x-8}{3x^2-5x+2}=\dfrac{3\cdot1^2+5\cdot1-8}{3\cdot1^2-5\cdot1+2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ **потрібно розкласти чисельник і знаменник на множники й однакові — скоротити.**

Розкладаємо квадратні тричлени на множники й отримуємо

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(3x+8)}{(x-1)(3x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{3x+8}{3x-2}=\frac{3\cdot1+8}{3\cdot1-2}=\frac{11}{1}=11.$$

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4-0}-\sqrt{4-0}}{0}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ **потрібно позбутися ірраціональності, помноживши чисельник**

і знаменник на спряжений вираз. Спряженими називають такі ірраціональні вирази, які під час множення один на інший утворюють раціональні вирази:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-x-4-x}{x\cdot(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\cdot(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=\frac{-2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

г) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x\right)=\left[\sqrt{\infty}-\infty\right]=[\infty-\infty]$

Для розкриття невизначеності $[\infty-\infty]$ необхідно вираз представити у вигляді дробу $\frac{a}{1}$, в утвореному дробі помножити чисельник і знаменник на спряжений вираз. Надалі позбутися утвореної невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}-4x}{1}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2+10x+5-16x^2}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Поділимо кожний елемент чисельника і знаменника на x, під коренем — на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}}{x}+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2+10x+5}{x^2}}+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{16+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+4}=$$

$$=\frac{10+\frac{5}{\infty}}{\sqrt{16+\frac{10}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}}+4}=\frac{10+0}{\sqrt{16+0+0}+4}=\frac{10}{\sqrt{16}+4}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}.$$

Індивідуальні завдання для контролю знань *(додаток 1 на с. 35)*

Відповіді до індивідуальних завдань із теми 1

1.	а) $\frac{11}{7}$;	б) $\frac{1}{21}$;	в) 2;	г) 0
2.	а) $\frac{5}{2}$;	б) 0;	в) $\frac{1}{2}$;	г) ∞.
3.	а) 1;	б) $-\frac{1}{4}$;	в) $\frac{2}{3}$;	г) ∞.
4.	а) $\frac{4}{7}$;	б) $\frac{2}{3}$;	в) $\frac{1}{2}$;	г) ∞.
5.	а) $\frac{7}{5}$;	б) $\frac{\sqrt{3}}{6}$;	в) $\frac{1}{2}$;	г) 0.
6.	а) 11;	б) $\frac{\sqrt{2}}{14}$;	в) 3;	г) 0.
7.	а) $\frac{4}{11}$;	б) $\frac{1}{21}$;	в) $\frac{1}{2}$;	г) 0.
8.	а) $\frac{5}{12}$;	б) $\frac{13}{112}$;	в) $\frac{1}{2}$;	г) 0.
9.	а) $-\frac{2}{3}$;	б) $\frac{\sqrt{7}}{84}$;	в) 1;	г) 0.
10.	а) $\frac{1}{2}$;	б) $-\frac{1}{9}$;	в) ∞;	г) 0.
11.	а) $-\frac{5}{2}$;	б) $-\frac{1}{4}$;	в) 0;	г) $-\infty$.
12.	а) $\frac{1}{8}$;	б) $\sqrt{2}$;	в) ∞;	г) $-\infty$.
13.	а) -1;	б) $\frac{\sqrt{2}}{6}$;	в) ∞;	г) $-\infty$.
14.	а) 1;	б) $-\frac{1}{4}$;	в) 0;	г) $\frac{7}{2}$.
15.	а) $\frac{1}{8}$;	б) $\frac{\sqrt{2}}{16}$;	в) 0;	г) ∞.
16.	а) 3;	б) $\sqrt{2}$;	в) 3;	г) $-\infty$.
17.	а) $\frac{5}{14}$;	б) $-\frac{1}{21}$;	в) 3;	г) ∞.
18.	а) $-\frac{1}{4}$;	б) -2;	в) 3;	г) ∞
17.	а) $\frac{5}{14}$;	б) $-\frac{1}{21}$;	в) $\frac{1}{2}$;	г) $-\infty$.
19.	а) $-\frac{1}{5}$;	б) $\frac{7\sqrt{3}}{36}$;	в) $\frac{1}{2}$;	г) ∞.
20.	а) $\frac{7}{4}$;	б) $-\frac{5}{6}$;	в) $\frac{1}{2}$;	г) ∞
21.	а) $\frac{16}{3}$;	б) $-\frac{1}{12}$;	в) 2;	г) ∞.
22.	а) $\frac{9}{14}$;	б) $\frac{1}{12}$;	в) $\frac{7}{3}$;	г) $-\infty$.
23.	а) $\frac{11}{12}$;	б) $\frac{4}{3}$;	в) 0;	г) $-\infty$.
24.	а) -8;	б) $-\frac{1}{27}$;	в) 0;	г) $-\infty$.
25.	а) $\frac{8}{3}$;	б) -2;	в) 0;	г) $-\infty$.
26.	а) $-\frac{9}{7}$;	б) $\frac{\sqrt{2}}{10}$;	в) $\frac{1}{2}$;	г) ∞.
27.	а) $\frac{2}{11}$;	б) $-\frac{11}{24}$;	в) 1;	г) 0.
28.	а) $\frac{7}{5}$;	б) $-\frac{3}{4}$;	в) 1;	г) 0.
29.	а) $\frac{9}{28}$;	б) 0;	в) $\frac{2}{3}$;	г) 0.
30.	а) $\frac{7}{5}$;	б) $\frac{1}{9}$;	в) $\frac{1}{3}$;	г) 0.

Тема 2 Неперервність і розриви функцій

Приклади розв'язування типових вправ

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію та побудувати її графік:

$$y = \begin{cases} x+3, & x<1; \\ x-1, & x\in[1;\,2]; \\ 4x-7, & x>2. \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо границі справа та зліва в точках $x = 1$ та $x = 2$.

Для точки $x = 1$:

$\lim\limits_{x\to 1-0}(x+3) = 4,$

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0}(x-1) = 0.$

Лівостороння та правостороння границі мають різні значення ($4 \ne 1$). Отже, функція має розрив у точці $x = 1$.

Для точки $x = 2$:

$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0}(4x-7) = 1;$

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0}(x-1) = 1.$

Лівостороння та правостороння границі мають однакові значення ($1 = 1$). Отже, функція — неперервна в точці $x = 2$ *(рис. 1)*.

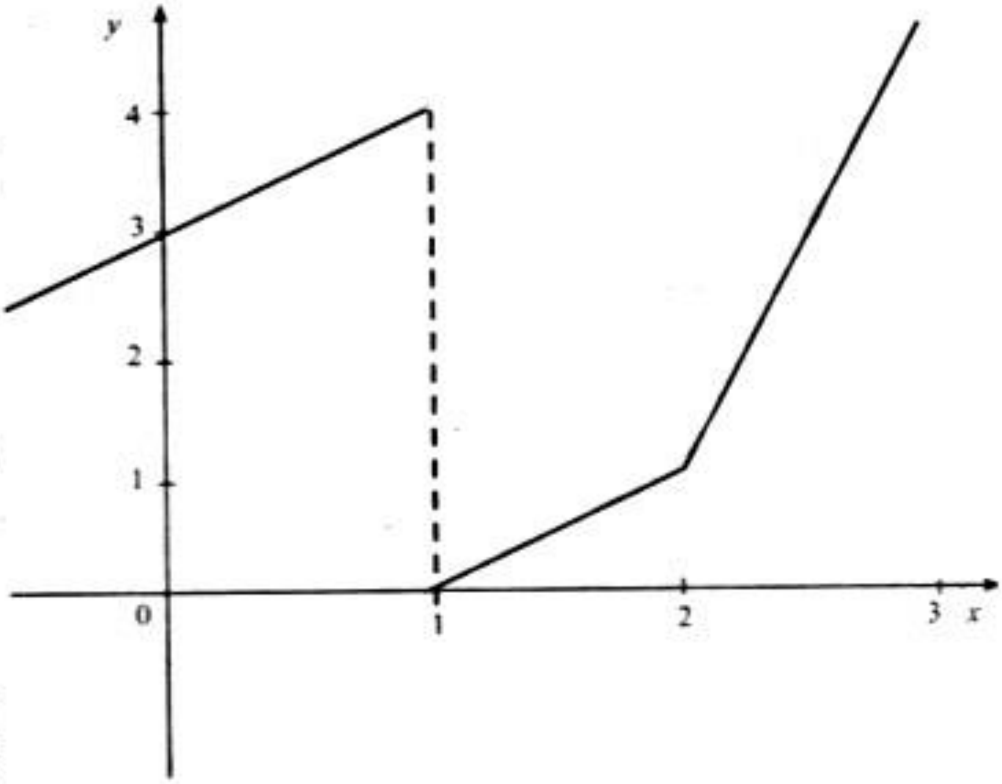

Рис. 1

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію та побудувати її графік:

$y = \dfrac{1}{3+x}$, при $x \in R$.

Розв'язання

Оскільки $x \ne 3$, то знайдемо границі справа та зліва в точці розриву $x' = 3$:

$\lim\limits_{x\to -3+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -3+0}\left(\dfrac{1}{3+x}\right) = \dfrac{1}{0} = \infty;$

$\lim\limits_{x\to -3-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -3+0}\left(\dfrac{1}{3+x}\right) = \dfrac{1}{-0} = -\infty.$

Отже, маємо розрив II роду *(рис. 2)*.

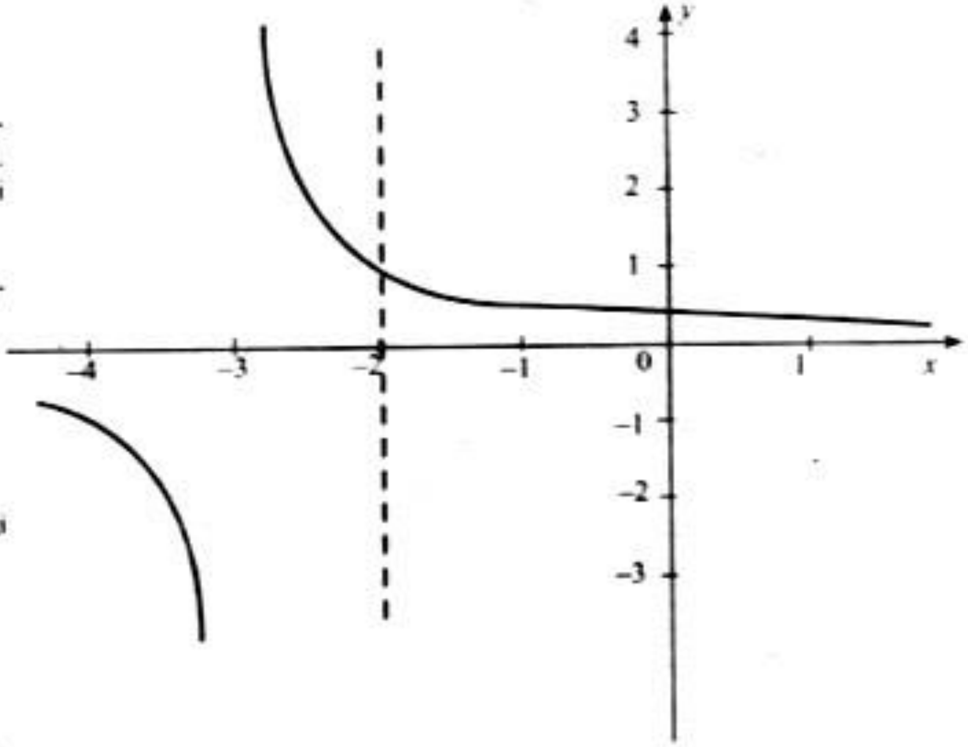

Рис. 2

Тема 3 Основні правила та формули диференціювання

Таблиця 1. Основні правила диференціювання

Функція	Похідна
$y = c \cdot u$	$y' = c \cdot u'$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

Таблиця 2. Основні формули диференціювання

№ з/п	Функція	Похідна	№ з/п	Функція	Похідна
1	$y = C$(const)	$y' = 0$	2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	4	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	6	$y = e^x$	$y' = e^x$
7	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	8	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
9	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	10	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
11	$y = \mathrm{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	12	$y = \mathrm{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
1	$y = \mathrm{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	16	$y = \mathrm{arcctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$

Приклади розв'язування типових вправ

Приклад 1. Знайти похідні вказаних функцій.

а) $y = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7$;

б) $y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}}$;

в) $y = \cos x \cdot \log_9 x$;

г) $y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$;

д) $v = \sqrt{\mathrm{tg}(x^3 + 4x)}$.

Розв'язання

Для знаходження похідних функцій користуємося таблицями 1, 2 основних правил та основних формул диференціювання:

а) $y = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7$; $y' = 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 =$

$= 12x^2 - x$.

б) $y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}}$.

Скористаємося властивостями степеня $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, отримуємо: $y = \sqrt[7]{x^3} + + \frac{4}{5x^{13}} = x^{\frac{3}{7}} + \frac{4}{5}x^{-13}$.

Тоді похідна функції:

$$y' = \frac{3}{7} \cdot x^{\frac{3}{7}-1} + \frac{4}{5} \cdot (-13) \cdot x^{-13-1} = \frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}} - \frac{52}{5}x^{-14} =$$

$$= \frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}} - \frac{52}{5x^{14}}.$$

в) $y = \cos x \cdot \log_9 x$.

Скористаємося формулою похідної добутку: $(uv)' = u'v + uv'$.

$$y' = (\cos x)' \cdot \log_9 x + \cos x \cdot (\log_9 x)' = -\sin x \cdot \log_9 x +$$

$$+ \cos x \cdot \frac{1}{x \ln 9}.$$

г) $y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$.

Скористаємося формулою похідної частки: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, тоді

$$y' = \frac{(\arcsin x)' \cdot \ln x - \arcsin x \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln x - \arcsin x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}.$$

д) $y = \sqrt{\mathrm{tg}(x^3 - 4x)}$.

Враховуючи, що функція складена, то її похідна дорівнюватиме:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{tg}(x^3 - 4x)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^3 - 4x)} \cdot (3x^2 - 4).$$

Індивідуальні завдання

(додаток 3 на с. 38)

Відповіді до індивідуальних завдань із теми 3.

Вказівка: для обчислення похідної скористайтеся основними формулами та правилами диференціювання, поданими у прикладах.

Тема 4 | Диференціал функції. Застосування диференціалу до наближеного обчислення функції

Приклади розв'язування типових вправ

Приклад 1. Знайти наближено значення функції $= \sqrt[3]{5x^2+10x+5}$ при $x = 4{,}03$.

Розв'язання

Значення функції обчислимо за формулою: $= y(x_0) + y'(x_0)\,\Delta x$.

Нехай $x_0 = 4$, тоді $\Delta x = x - x_0 = 0{,}03$.

$y(x_0) = \sqrt[3]{5\cdot 4^2 + 10\cdot 4 + 5} = \sqrt[3]{125} = 5$;

$y' = \dfrac{10x+10}{3\sqrt[3]{(5x^2+10x+5)}}$; $\lim \dfrac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-10}$;

$\lim \dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}{2x^2-5x-3}$

Приклад 2. Знайти наближено $\sin 63^\circ$.

Розв'язання

Значення функції обчислимо за формулою: $= y(x_0) + y'(x_0)\,\Delta x$.

Нехай $y = \sin x$, $x = 63^\circ$, $x = 60^\circ$, тоді $\lim \dfrac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-10}$;

$\lim \left(\sqrt{x} - \sqrt{x-4}\right)$;

$\lim \dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+2x-1}$;

$\sin 60^\circ = y(x_0) + y'(x_0)\ \Delta x = 0{,}866 + 0{,}5\ \ 0{,}052 = 0{,}892$

Індивідуальні завдання

(додаток 4 на с. 39)

Відповіді до індивідуальних завдань із теми 4

1. 1049,6;	**2.** 42,67;	**3.** 0,68;
4. 1,85;	**5.** 7,07;	**6.** 1,04;
7. 0,55;	**8.** 6,6;	**9.** 0,87;
10. 0,89;	**11.** 0,47;	**12.** 1,03;
13. 2,08;	**14.** 0,07;	**15.** 3,87;
16. 1,97;	**17.** 0,69;	**18.** 8,12;
19. 0,91;	**20.** 0,99;	**21.** 8,12;
22. 3,04;	**23.** 1,072;	**24.** 0,81;
25. 3;	**26.** 0,84;	**27.** 10,95;
28. 4,08;	**29.** 0,62;	**30.** 1,104

Тема 5 | Застосування похідної до дослідження динаміки функції

Приклади розв'язування типових вправ

Приклад 1. Дослідити функцію та побудувати її графік: $\lim \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{6x-3}}{x^2-4x-5}$

Розв'язання

1. Елементарні дослідження.

Область визначення функції:

$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$

Точки перетину графіка функції з осями координат: $(0, 0)$ — єдина точка перетину з віссю абсцис і ординат.

Функція є непарною, оскільки $\lim \dfrac{3x^2-7x+2}{6x^2+2x-1}$

Отже, графік функції симетричний відносно початку координат.

2. Дослідження точок розриву:

$\lim \left(x - \sqrt{4x^2 - x}\right)$; $\lim \dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$;

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{2x+2}-1}{4x^2-1}$; $\lim \dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$.

Отже, $x = -1$ і $x = 1$ — вертикальні асимптоти.

3. Знаходження похилих асимптот.

Похилі асимптоти визначатимемо за формулою:

$y = kx + b$. Для цього знайдемо невідомі коефіцієнти k і b:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{4x^2-x}\right);$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+5x-3}$$

Тоді рівняння асимптоти набуватиме такого вигляду: $y = 0$.

4. Дослідження функції на монотонність.

Знайдемо першу похідну функції:

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{6x-1}-\sqrt{12x-3}}{3x^2-4x+1}.$$

Прирівнюємо першу похідну до нуля: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+5x-3}$.

Оскільки рівняння не має розв'язків, то критичних точок I роду не має. Тому на числовій осі $0X$ позначаємо лише точки розриву функції *(рис. 1)*:

Рис. 1

Отже, функція спадає на всій області визначення.

5. Дослідження на опуклість і вгнутість.

Знайдемо другу похідну функції:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{36x^2-4}\right).$$

Прирівнюємо другу похідну до нуля: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-7x+3}$; $x = 0$ — критична точка II роду. Визначимо знаки другої похідної на отриманих інтервалах *(рис. 2)*:

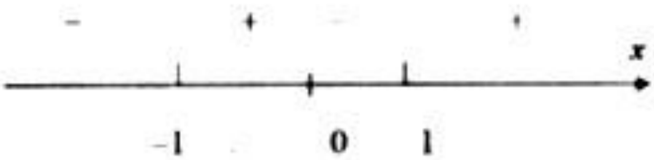

Рис. 2

Отже, функція опукла вниз на проміжках: $x\in(-1;0)\cup(1;\infty)$, опукла вгору — $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$. Точка (0; 0) — точка перегину.

6. Побудова графіка функції *(рис. 3)*.

Індивідуальні завдання
(додаток 5 на с. 39)

Вказівка. Побудувати графіки, використавши дані із схеми повного дослідження функцій за допомогою похідної.

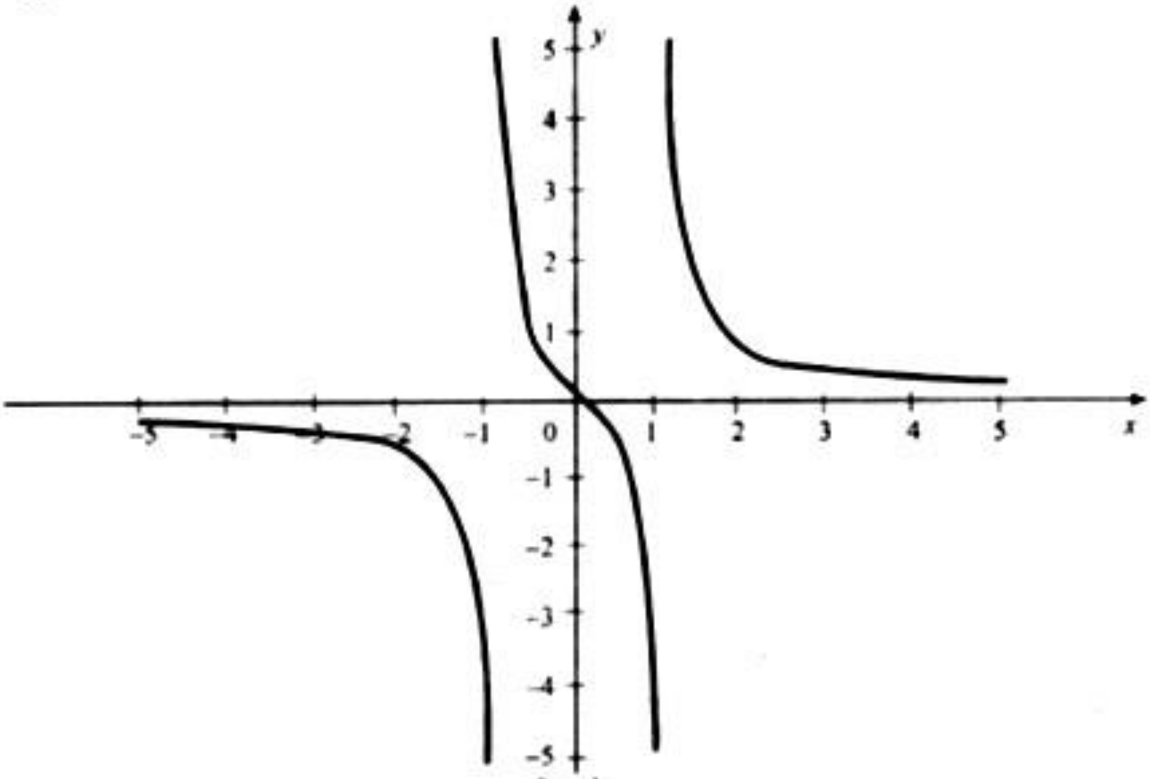

Рис. 3

Додаток 1

Обчислити границі.

1. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-10}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}{2x^2-5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-10}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-4}\right)$.

2. а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+2x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{6x-3}}{x^2-4x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{6x^2+2x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{4x^2-x}\right)$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{2x+2}-1}{4x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{4x^2-x}\right)$.

4. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+5x-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{\sqrt{6x-1}-\sqrt{12x-3}}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+5x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{36x^2-4}\right)$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-7x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x-5}-\sqrt{x+1}}{2x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-7x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(6x-\sqrt{36x^2-4}\right)$.

6. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{6x^2-5x-4}{2x^2+3x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-4}-\sqrt{x}}{2x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^2-5x-4}{2x^2+3x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-4}\right)$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-9x-5}$;

б) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{6(x+1)}-1}{27x^3+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-9x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(5x-\sqrt{25x^2-4}\right)$.

8. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{2x^2+x-3}{4x^2-9}$;

б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{3x-8}}{x^2-9x+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+x-3}{4x^2-9}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1x-\sqrt{121x^2-4x}\right)$.

9. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{5}}\dfrac{5x^2+8x+3}{5x^2-7x-6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+3}}{x^2+2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2+8x+3}{5x^2-7x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(8x-\sqrt{64x^2-7x}\right)$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-}{5x^2-4x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{2x+9}}{4x^2-3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(7x-\sqrt{49x^2+x}\right)$.

11. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{25x^2-3}-\sqrt{49x^2+x}\right)$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{12x^2-1}-\sqrt{4x^2+1}}{2x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{9x^2+x}\right)$.

13. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$;

б) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{6x+6}}{9x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{6x+6}}{9x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-3x-2}{11x^3+7}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{5x}-\sqrt{2x+7}\right)$.

Додаток 2

Дослідити на неперервність функції та побудувати їх графіки.

1. а) $y(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; б) $y(x)=\dfrac{3}{2+5^{\frac{1}{x+2}}}$.

2. а) $y(x)=\dfrac{5x^2-3x-2}{x^2+x-2}$; б) $y(x)=7^{\frac{2}{x+1}}$.

3. а) $y(x)=\dfrac{5x^2-x-4}{x^2+2x-3}$; б) $y(x)=\dfrac{5}{1+3^{\frac{1}{x-2}}}$.

4. а) $y(x)=\dfrac{3x^2+5x-8}{x^2+4x-5}$; б) $y(x)=3^{\frac{2}{x-1}}$.

5. а) $y(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2+x-3}$; б) $y(x)=\dfrac{3}{2-5^{\frac{2}{x+2}}}$.

6. а) $y(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2+5x-7}$; б) $y(x)=4^{\frac{1}{x+2}}$.

7. а) $y(x)=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2+5x-6}$; б) $y(x)=\dfrac{1}{5^{\frac{1}{x}}-4}$.

8. а) $y(x)=\dfrac{2x^2+7x-9}{x^2+3x-4}$; б) $y(x)=7^{\frac{5}{x+5}}$.

9. а) $y(x)=\dfrac{4x^2-3x-1}{2x^2+3x-5}$; б) $y(x)=\dfrac{3}{2+5^{\frac{1}{x^2-4}}}$.

10. а) $y(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-3x+2}$; б) $y(x)=8^{\frac{2}{x+4}}$.

11. а) $y(x)=\dfrac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-10}$; б) $y(x)=\dfrac{9}{2+2^{\frac{1}{x^2-4}}}$.

12. а) $y(x)=\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+2x-1}$; б) $y(x)=8^{\frac{2}{x-4}}$.

13. а) $y(x)=\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$; б) $y(x)=\dfrac{2-2^{\frac{1}{x-1}}}{2+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

14. а) $y(x)=\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^2+1}$; б) $y(x)=2^{\frac{x}{x^2-4}}$.

15. а) $y(x)=\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-7x+3}$; б) $y(x)=\dfrac{2+2^{\frac{1}{x+1}}}{2+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

16. а) $y(x)=\dfrac{6x^2-5x-4}{2x^2+3x+1}$; б) $y(x)=2^{\frac{x}{x^2-1}}$.

17. а) $y(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-9x-5}$; б) $y(x)=\dfrac{2-2^{\frac{1}{x-2}}}{2+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

18. а) $y(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{4x^2-9}$; б) $y(x)=3^{\frac{x}{x^2-9}}$.

19. а) $y(x)=\dfrac{5x^2+8x+3}{5x^2-7x-6}$; б) $y(x)=\dfrac{1-2^{\frac{1}{x-2}}}{1+2^{\frac{1}{x-2}}}$.

20. а) $y(x)=\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x1}$; б) $y(x)=2^{\frac{2}{4x^2-1}}$.

21. а) $y(x)=\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$; б) $y(x)=\dfrac{4-2^{\frac{1}{x-4}}}{4+2^{\frac{1}{x-4}}}$.

22. а) $y(x)=\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$; б) $y(x)=4^{\frac{1}{9x^2-1}}$.

23. а) $y(x)=\dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$; б) $y(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}}{2+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^2+1}$; б) $y(x)=3^{\frac{1}{4x^2-9}}$.

25. а) $y(x)=\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$; б) $y(x)=\dfrac{-2}{2+2^{\frac{1}{x-4}}}$.

26. а) $y(x)=\dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$; б) $y(x)=13^{\frac{2}{x^2-25}}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{2x^2-x-3}{8x^2-10x-3}$; б) $y(x)=\dfrac{2}{2+2^{\frac{1}{x-2}}}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+5x+3}{4x^2+3x-1}$; б) $y(x)=2^{\frac{1}{25x^2-1}}$.

29. а) $y(x)=\dfrac{2x^2+5x+3}{4x^2+3x-1}$; б) $y(x)=\dfrac{1}{3+2^{\frac{1}{x-3}}}$.

30. а) $y(x)=\dfrac{6x^2-x-2}{3x^2+x-2}$; б) $y(x)=2^{\frac{-2}{x^2-1}}$.

Додаток 3

Знайти похідні вказаних функцій.

1. а) $y=4x^3-\frac{1}{2}x^2+2x$; б) $y=e^x\cdot\ln x$;

в) $y=\frac{x^2}{\sin x}$; г) $y=\sqrt[3]{\log_{12}(6x+5)}$.

2. а) $y=4x^3-\frac{1}{4}x^2+12x$; б) $y=\mathrm{ctg}x\cdot\sqrt{x}$;

в) $y=\frac{e^x-5}{\arccos x}$; г) $y=\sqrt{\ln\arccos 2^x}$.

3. а) $y=\frac{1}{4}x^8-7x^3+2\sqrt{x}$; б) $y=\arccos x\cdot\log_9 x$;

в) $y=\frac{4x^4-9x^2}{\sqrt{x}}$; г) $y=\frac{3}{\ln^4\left(2x^3+x\right)}$.

4. а) $y=4x^4-\frac{1}{14}x^7+3x$; б) $y=\cos x\cdot\log_2 x$;

в) $y=\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{tg}x}$; г) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

5. а) $y=7+x^2-\frac{1}{5}x^3$; б) $y=\mathrm{tg}x\cdot\sqrt[3]{x}$;

в) $y=\frac{5x}{\cos x}$; г) $y=\frac{4x^4-25}{\sqrt{x^4+2x+5}}$.

6. а) $y=2x^3-\frac{1}{4}x^2-4x$; б) $y=2^x\cdot\sin x$;

в) $y=\frac{e^x}{\cos x}$; г) $y=\sin\sqrt{\ln 8^x}$.

7. а) $y=4x^3-\frac{2}{3}x^3+2$; б) $y=e^x\cdot\arcsin x$;

в) $y=\frac{6+x^2}{\sqrt{x}}$; г) $y=\sqrt{\frac{x}{x+4}}$.

8. а) $y=2x^3-x^2+\frac{1}{x}$; б) $y=\sin x\cdot 3^x$;

в) $y=\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{x}}$; г) $y=\ln\mathrm{arctg}x^3$.

9. а) $y=2x^7-\frac{1}{6}x^6-2$; б) $y=x\cdot\log_3 x$;

в) $y=\frac{\mathrm{arctg}x}{x}$; г) $y=\ln\mathrm{arctg}\sqrt{x^2+4}$.

10. а) $y=x^3-\frac{1}{7}x^7$; б) $y=\cos x\cdot\ln x$;

в) $y=\frac{x^4-25}{\sqrt{x}}$; г) $y=7^{\mathrm{tg}(x-3)}$.

11. а) $y=x^3-\frac{1}{7}x^7+7$; б) $y=e^x\cdot\sqrt[3]{x}$;

в) $y=\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{tg}x}$; г) $y=\frac{4x^4-25}{\sqrt{x^4+2x+5}}$.

12. а) $y=\sqrt{x^3}-\frac{1}{7}x^3+2$; б) $y=7^x\cdot\sqrt[3]{x}$;

в) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{\mathrm{arctg}x}$; г) $y=\sqrt{\frac{\ln^2 x-x}{4x}}$.

13. а) $y=\frac{1}{8}x^8-2x^3+2\sqrt{x}$; б) $y=\arccos x\cdot\log_9 x$;

в) $y=\frac{3x^4-9x^2}{\sqrt{x^2-4}}$; г) $y=\frac{3}{\ln^3\left(4x^2+2x\right)}$.

14. а) $y=3x^4-\frac{1}{21}x^7-9x$; б) $y=\mathrm{arcctg}x\cdot\log_9 x$;

в) $y=\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{tg}x}$; г) $y=\frac{9x^2-16}{\sqrt{x^3+x^2-2x+4}}$.

15. а) $y=7x+3x^2-\frac{1}{10}x^5$; б) $y=\mathrm{tg}x\cdot\sqrt[3]{x}$;

в) $y=\frac{5x^2-x}{\cos x}$; г) $y=\frac{4x^4-25}{\sqrt{x^4+2x+5}}$.

16. а) $y=2x^3-\frac{1}{4}x^2-4x$; б) $y=x^2\cdot\sin x$;

в) $y=\frac{e^{2x}}{\cos(2x)}$; г) $y=\frac{4x^4-9x^2}{\sqrt{x^3-6x-9}}$.

17. а) $y=\sqrt{2}x^3-\frac{2}{3}x^4+2x$; б) $y=e^x\cdot\arccos x$;

в) $y=\frac{8^x}{\cos(8x-8)}$; г) $y=\sqrt{\frac{x}{x+4}}$.

18. а) $y=2x^3-7x^2+\frac{3}{x}$; б) $y=\sin x\cdot 7^{x+1}$;

в) $y=\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{x^3-5}}$; г) $y=\frac{(3x-2)^2(3x+2)}{\ln\sqrt{x-8}}$.

19. а) $y=2x^7-\frac{1}{6}x^3-2x^2$; б) $y=(x^2+2x-1)\cdot\log_5 x$;

в) $y=\frac{\mathrm{arctg}x}{x-7}$; г) $y=\ln\mathrm{arctg}\sqrt{x^2+4}$.

20. а) $y=4x^3-\frac{1}{7}x^7+3\sqrt{x}$; б) $y=(x+1)\cdot\ln x$;

в) $y=\frac{3x^4-2x}{\sqrt{x}}$; г) $y=\frac{25x^4-16}{\sqrt{3x^2-8x+4}}$.

21. а) $y=3x^5-\frac{1}{\sqrt{2}}x^2+2x$; б) $y=(3x^3+3)\cdot\ln x$;

в) $y=\frac{3x^2-3}{\sin x}$; г) $y=\sqrt[3]{\log_2(2x+5)}$.

22. а) $y=3x^3-\frac{1}{3}x^2+11x$; б) $y=\mathrm{tg}x\cdot\sqrt{4x}$;

в) $y=\frac{5^x-x^3}{\arcsin x}$; г) $y=\sqrt{\ln\cos 5^x}$.

23. а) $y=\frac{1}{4}x^8-5x^3+4\sqrt{x}$; б) $y=\arccos(4x)\cdot\log_9 x$;

в) $y=\frac{2x^4-9x^2}{\sqrt{4-x}}$; г) $y=\frac{3}{\log^3\left(2x^2+4x\right)}$.

Закінчення

24. а) $y = 7x^5 - \frac{1}{4}x^4 + 3x$; б) $y = \cos x \cdot \ln x$; в) $y = \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{tg}(x^2 2x)}$; г) $y = \sqrt{\sin\sqrt[3]{x-1}}$.

25. а) $y = 7x + x^2 - \frac{1}{5}x^3$; б) $y = \mathrm{tg}x \cdot \sqrt[4]{x-3x^2}$; в) $y = \frac{5-x}{\cos(5x)}$; г) $y = \frac{x^4-5}{\sqrt{x^3+2x-5}}$.

26. а) $y = 2x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{7}x$; б) $y = 2^x \cdot \sin(x-2)$; в) $y = \frac{e^x}{\cos x}$; г) $y = \sin\sqrt{\ln(8^x - x^8)}$.

27. а) $y = 4x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 2$; б) $y = e^x \cdot \arcsin(e^x)$; в) $y = \frac{\mathrm{ctg}x}{x}$; г) $y = \sqrt{\frac{x+4}{x-4}}$.

28. а) $y = 2x^3 - x^2 + \frac{2}{x}$; б) $y = x^3 \cdot 3^x$; в) $y = \frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{3-x}}$; г) $y = \ln(\mathrm{tg}x^3)$.

29. а) $y = 2x^7 - \frac{1}{6}x^6 - 2$; б) $y = (x^3 - 9) \cdot \log_x x$; в) $y = \frac{\mathrm{arctg}x}{x}$; г) $y = \ln\left(\mathrm{tg}\sqrt{x^2+4}\right)$.

30. а) $y = x^3 - \frac{1}{7}x^7$; б) $y = \cos x \cdot \ln x$; в) $y = \frac{x^4-25}{\sqrt{x-25}}$; г) $y = 7^{\mathrm{tg}(x-3)}$.

Додаток 4

Обчислити наближено значення функцій за допомогою диференціала.

1. $4{,}02^3$;	**2.** $\sqrt[3]{128}$;	**3.** $\sin 43^\circ$;
4. $1{,}02^4$;	**5.** $\sqrt{50}$;	**6.** $\mathrm{tg}46^\circ$;
7. $\mathrm{ctg}61^\circ$;	**8.** $\sqrt[3]{33}$;	**9.** $\cos 29^\circ$;
10. $\sin 64^\circ$;	**11.** $\cos 62^\circ$;	**12.** $1{,}01^3$;
13. $\sqrt[3]{9}$;	**14.** $\cos 86^\circ$;	**15.** $\sqrt{15}$;
16. $\sqrt[4]{15}$;	**17.** co46°;	**18.** $2{,}01^3$;
19. $0{,}97^3$;	**20.** $\cos 2^\circ$;	**21.** $\sqrt{66}$;
22. $\sqrt[3]{28}$;	**23.** $\mathrm{tg}47^\circ$;	**24.** $0{,}96^3$;
25. $\sqrt[4]{81}$;	**26.** $\mathrm{tg}40^\circ$;	**27.** $\sqrt{120}$;
28. $\sqrt[3]{68}$;	**29.** $\mathrm{tg}32^\circ$;	**30.** $1{,}02^3$.

Додаток 5

Дослідити функцію та побудувати її графік.

1. $y = \frac{x}{x+2}$; **2.** $y = \frac{4x}{x+2}$; **3.** $y = \frac{x}{x+2}$;

4. $y = \frac{x}{(x-2)^2}$; **5.** $y = \frac{x}{x^2-9}$; **6.** $y = \frac{x}{x^2+9}$;

7. $y = \frac{x^2-1}{x^2}$; **8.** $y = \frac{x^2-1}{x}$; **9.** $y = \frac{3x}{x^2-4}$;

10. $y = \frac{x+2}{x^2-1}$; **11.** $y = \frac{x}{(x-2)^2}$; **12.** $y = \frac{x^2+4}{x^2-4}$;

13. $y = \frac{x+2}{x-1}$; **14.** $y = \frac{x-1}{x^2}$; **15.** $y = \frac{2x}{x^2-1}$;

16. $y = \frac{x-1}{x^2}$; **17.** $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$; **18.** $y = \frac{5x}{x+5}$;

19. $y = \frac{x-2}{x^2}$; **20.** $y = \frac{x^2+9}{x^2-9}$; **21.** $y = \frac{4+x}{x+1}$;

22. $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$; **23.** $y = \frac{x-1}{(x-2)x}$; **24.** $y = \frac{4}{x+x^2}$;

25. $y = \frac{x-1}{x^2}$; **26.** $y = \frac{x}{(x-2)(x-1)}$; **27.** $y = \frac{4-x}{x+2}$;

28. $y = \frac{x+1}{x(x-1)}$; **29.** $y = \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}$; **30.** $y = \frac{1}{x(x-2)}$.