ХАРАКТЕРИЗАЦІЙНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ВЛАСТИВОСТІ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЇ ІНВАРІАНТНОСТІ ІНДИВІДУАЛЬНИХ МЕТОДІВ ПІДРАХУНКУ ВАРТОСТІ СТРАХОВИХ КОНТРАКТІВ

В. О. Дрозденко

Білоцерківський національний аграрний університет, Біла Церква, Україна

drozdenko@yandex.ru

Розглянемо випадкову величину X, з функцією розподілу $F(x)$, яка відображає розмір грошової компенсації пов'язаної з певною страховою угодою. Страхову премію, тобто суму, яку клієнт платить страховій компанії при укладанні угоди за покриття ризику X, позначатимемо $\pi[X]$.

У більшості випадків величина X вважається невід'ємною, проте від'ємні значення величини X інколи допускаються та трактуються як штрафні санкції, що надходять від застрахованого до страхової компанії за невиконання умов страхової угоди.

Означимо декілька методів індивідуального страхового оцінювання, які ми збираємось аналізувати.

Нетто-премія означається як математичне сподівання розміру грошової компенсації пов'язаної з ризиком X, тобто

$$\pi_{нетто}[X] = E[X].$$

Премія середнього значення, асоційована з ризиком X, котру в публікації позначатимемо як $\pi_{с.з.}[X]$, основана на функції $v(x) \in C^2(\mathbb{R})$, такій, що $v'(x) > 0$ та $v''(x) \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$, означається як розв'язок рівняння

$$v\left(\pi_{с.з.}[X]\right) = E\left[v\left(X\right)\right].$$

Премія еквівалентної корисності страховика для ризику X, яку позначатимемо $\pi_{е.к.с.}[X]$, означається як розв'язок рівняння

$$U(W) = E\left[U\left(W + \pi_{е.к.с.}[X] - X\right)\right], \tag{1}$$

де W — це початковий капітал страховика на момент укладання страхової угоди, а функція $U \in C^2(\mathbb{R})$ — це функція корисності капіталу страховика, яка задовольняє умови $U'(x) > 0$ та $U''(x) \leq 0$, для $x \in \mathbb{R}$.

У випадках, коли функція корисності капіталу страховика обрана таким чином, що величина $U(0)$ відображає корисність капіталу страховика на момент укладання страхової угоди, рівняння (1) замінюють рівнянням

$$U(0) = E\left[U\left(\pi[X] - X\right)\right],$$

а відповідний спосіб оцінювання називають *принципом нульової корисності страховика*; в даному випадку отриману премію позначатимемо $\pi_{н.к.с.}[X]$.

Премія еквівалентної корисності клієнта для ризику X, яку позначатимемо $\pi_{е.к.к.}\left[X\right]$, означається як розв'язок рівняння

$$u\left(\omega - \pi_{е.к.к.}\left[X\right]\right) = E\left[u\left(\omega - X\right)\right], \tag{2}$$

де ω — це початковий капітал клієнта на момент укладання страхової угоди, а функція $u(x) \in C^2(\mathbb{R})$ — це функція корисності капіталу клієнта, яка задовольняє умови $u'(x) > 0$ та $u''(x) \leq 0$, для $x \in \mathbb{R}$.

У випадках, коли функція корисності капіталу клієнта обрана таким чином, що величина $u(0)$ відображає корисність капіталу клієнта на момент укладання страхової угоди, рівняння (2) замінюють рівнянням

$$u\left(-\pi\left[X\right]\right) = E\left[u\left(-X\right)\right],$$

а відповідний спосіб страхового оцінювання називають *принципом нульової корисності клієнта*; отриману в такий спосіб премію позначатимемо $\pi_{н.к.к.}\left[X\right]$.

Швейцарська премія для ризику X, яку позначатимемо $\pi_{швейц.}\left[X\right]$, залежна від параметра $\Delta \in \left[0, 1\right]$ та основана на функції $V(x) \in C^2(\mathbb{R})$ такій, що $V'(x) > 0$ та $V''(x) \leq 0$, для $x \in \mathbb{R}$, означається як розв'язок рівняння

$$V\left(\left(1 - \Delta\right)\pi_{швейц.}\left[X\right]\right) = E\left[V\left(X - \Delta\pi_{швейц.}\left[X\right]\right)\right].$$

Звернемо увагу на те, що у випадку $\Delta = 0$, швейцарський принцип страхового оцінювання еквівалентний принципу середнього значення з функцією $v(x) := V(x)$, а у випадку $\Delta = 1$, він еквівалентний принципу нульової корисності страховика з функцією корисності $U(x) := -V(-x)$.

Трапляється, що вищеописані методи страхового оцінювання застосовують до деяких спеціальних класів ризиків; у якості прикладу можна згадати клас усіх невід'ємних ризиків, або клас ризиків обмежених зверху певним дійсним значення. У таких випадках функції $v(x)$, $U(x)$, $u(x)$, $V(x)$ достатньо означати на підмножинах $\mathbb{R}$ зі збереженням властивостей монотонності та опуклості вгору/вниз так, що рівняння, яке задає той чи інший принцип зберігає коректний математичний зміст для всіх ризиків зі згаданого класу.

Говоритимемо, що той чи інший метод індивідуального страхового оцінювання володіє *властивістю мультиплікативної інваріантності*, якщо для довільного допустимого ризику X та довільного $\Theta \in \mathbb{R}^+$ виконується $\pi\left[\Theta X\right] = \Theta\pi\left[X\right]$.

Детальніше про індивідуальні методи страхового оцінювання, а також властивості, які може мати або не мати окремо обраний спосіб підрахунку вартості страхових контрактів можна почитати, наприклад, в роботах Asmussen & Albrecher (2010), Bühlmann (1970), Dickson (2005), Gerber (1979), Kaas et al. (2008), Kremer (1999), Rolski et al. (1999), Straub (1988).

Теорема 1. *Принцип середнього значення підрахунку вартості страхових контрактів має властивість мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $v(x) = ax + b$, *для* $a > 0$, *тобто, лише у випадку збігу з нетто-принципом.*

Користуючись простою технікою від противного, твердження теореми 1 може бути використане для демонстрації того, що випадок $v(x) = ax + b$, при $a > 0$, є єдиним можливим випадком повного збігу принципу середнього значення з нетто-принципом; використавши відповідні нижче-представлені твердження можна показати, що випадок $U(x) = ax + b$, для $a > 0$, є єдиним можливим випадком повного збігу принципу еквівалентної/нульової корисності страховика з нетто-принципом; випадок $u(x) = ax + b$, при $a > 0$, є єдиним можливим випадком повного збігу принципу еквівалентної/нульової корисності клієнта з нетто-принципом; для будь-якого $\Delta \in \left[0, 1\right]$, випадок $V(x) = ax + b$, при $a > 0$, є єдиним можливим випадком повного збігу швейцарського принципу з нетто-принципом.

Стосовно нижче-представлених методів індивідуального страхового оцінювання згенерованих функціями $v(x) = ax^k + b$, для $a > 0$ та $k > 1$, $u(x) = -a(-x)^k + b$, для $a > 0$ та $k > 1$, $V(x) = ax^k + b$, для $a > 0$ та $k > 1$, зауважимо, що прямого еквівалентного аналогу для них немає серед «загальновживаних» принципів індивідуального страхового оцінювання.

Теорема 2. *Принцип середнього значення, звужений до оцінювання лише строго позитивних ризиків, має властивість мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $v(x) = ax^k + b$, *для* $a > 0$ *та* $k \geq 1$, *означеній для* $x \in (0, +\infty)$.

Звернемо увагу на те, що для функції $v(x) = ax^k + b$, при $a > 0$ та $k > 1$, умова $v'(x) > 0$ порушується в точці $x = 0$, отже, твердження теореми 2 не суперечить твердженню теореми 1.

Теорема 3. *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика має властивість мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $U(x) = ax + b$, *при* $a > 0$, *тобто, лише у випадку збігу з нетто-принципом.*

Звернемо увагу на те, що аналогу теорем 2 та 5 не існує для принципу еквівалентної/нульової корисності страховика.

Теорема 4. *Принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта має властивість мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $u(x) = ax + b$, *для* $a > 0$, *тобто, лише у випадку збігу з нетто-принципом.*

Наступна теорема справедлива лише для принципу нульової корисності клієнта, і, взагалі кажучи, не справедлива для принципу еквівалентної корисності клієнта.

Теорема 5. *Принцип нульової корисності страховика, звужений до оцінювання лише строго позитивних ризиків, має властивість мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $u(x) = -a(-x)^k + b$, *для* $a > 0$ *та* $k \geq 1$, *означеній для* $x \in (-\infty, 0)$.

Звернемо увагу на те, що для функції $u(x) = -a(-x)^k + b$, при $a > 0$ та $k > 1$, умова $u'(x) > 0$ порушується в точці $x = 0$, отже, твердження теореми 5 не суперечить твердженню теореми 4.

Теорема 6. *Для будь-якого* $\Delta \in \left[0, 1\right]$, *швейцарський принцип підрахунку вартості страхових контрактів має властивість мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $V(x) = ax + b$, *для* $a > 0$, *тобто лише у випадку збігу з нетто-принципом.*

Так як, у випадку $\Delta = 0$, швейцарський принцип страхового оцінювання еквівалентний принципу середнього значення, то, на нашу думку, вартий уваги наступний наслідок до теореми 1.

Наслідок (до теореми 2) *У випадку* $\Delta = 0$, *швейцарський принцип підрахунку вартості страхових контрактів, звужений до оцінювання лише строго позитивних ризиків, має властивість мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $V(x) = ax^k + b$, *для* $a > 0$ *та* $k \geq 1$, *означеній на* $x \in (0, +\infty)$.

З доведенням анонсованих в публікації результатів можна ознайомитись е роботі Pratsiovytyi & Drozdenko (2014).

Список літератури

Asmussen, S., & Albrecher, H. (2010). *Ruin probabilities* (2nd ed.). Singapore: World Scientific.

Bühlmann, H. (1970). *Mathematical methods in Risk theory.* Berlin: Springer.

Dickson, D. C. M. (2005). *Insurance risk and ruin.* Cambridge: Cambridge University Publishing.

Gerber, H.-U. (1979). *An introduction to Mathematical risk theory.* Philadelphia: S. S. Huebner Foundation for Insurance Education.

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., & Denuit, M. (2008). *Modern Actuarial risk theory using R.* Berlin: Springer.

Kremer, E. (1999). *Applied Risk Theory*. Aachen: Shaker.

Pratsiovytyi, M. V., & Drozdenko, V. O. (2014). Characterization theorems for scale invariance property of insurance premium calculation principles. *European Journal of Pure and Applied Mathematics, 7*(3), 267–288.

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. (1999). *Stochastic processes for insurance and finance.* Chichester: John Wiley & Sons.

Straub, E. (1988). *Non-life insurance mathematics*. Berlin: Springer.