МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЕКОНОМІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ І ФІЗИКИ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Збірник завдань для виконання індивідуальних та самостійних робіт
для студентів 1 курсу денної форми навчання

Частина 1
(Модуль 1. Модуль 2.)

Біла Церква-2017

УДК 517(075.8)

Затверджено методичною
комісією економічного факультету
Протокол №11 від 19.06.2017 р.

Вища математика: Збірник завдань для виконання індивідуальних та самостійних робіт для студентів 1 курсу денної форми навчання економічних спеціальностей. Частина 1. / О.П. Мельниченко − Біла Церква. – 2017. − 37с.

Збірник завдань для виконання індивідуальних та самостійних робіт розроблений для студентів 1 курсу економічного факультету. Збірник вміщує задачі і приклади до основних розділів вищої математики відповідно до програми загального курсу вищої математики для студентів економічного профілю денної форми навчання, що включено до 1 та 2 модуля. Кожний тип завдань доповнено методичними рекомендаціями для їх виконання. Наведено необхідний довідковий матеріал, розв’язування типових прикладів та задач і набори завдань для індивідуальної роботи студентів.

Рецензент: Арбузова Т.В., кандидат економічних наук

ВСТУП

Збірник завдань для виконання індивідуальних та самостійних робіт для студентів денної форми навчання економічних спеціальностей створено з огляду на сучасні вимоги щодо істотного підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки таких фахівців і посилення прикладної її спрямованості.

Збірник завдань ставить за мету – допомогти студенту оволодіти розв'язуванням задач та прикладів з курсу вищої математики і виконати самостійно індивідуальні завдання. Це визначило структуру посібника. У збірнику задач подано формули та таблиці, необхідні для розв'язку завдань, та наводиться достатня кількість детально розібраних задач із вказаними методами їх розв'язку та пропонується ряд задач для самостійного розв'язання.

Для написання збірника завдань для виконання індивідуальних робіт та методичних рекомендацій для їх виконання студентами денної форми навчання економічних спеціальностей було використано ряд задач та прикладів, взятих із відомих задачників та навчальних посібників, які, як правило, використовуються на практичних заняттях зі студентами.

«Вища математика» є нормативною дисципліною циклу природничо-наукової підготовки бакалавра за спеціальністю: «Економіка», «Облік і оподаткування», «Фінанси, банківська справа та страхування», «Менеджмент», «Публічне управління та адміністрування», спеціалізації: «Економіка підприємства», «Облік і аудит», «Фінанси і кредит», «Менеджмент організацій і адміністрування», «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності», «Публічне управління та адміністрування».

Мета вивчення дисципліни – засвоєння студентами базових математичних знань, необхідних під час професійної діяльності, формування логічного мислення та вироблення навичок математичного дослідження прикладних економічних задач.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен

знати: основи вищої математики, що є фундаментом математичної освіти спеціалістів агрономічного профілю; роль та місце математичних методів у розв'язуванні низки практичних задач;

вміти: формулювати прикладну задачу в математичних термінах і знаходити шляхи розв'язку цієї задачі; аналізувати одержані результати і на їх основі створювати практичні рекомендації.

Завдання курсу вищої математики для студентів економічного факультету полягає у відновленні у студентів набутих знань та навичок за курс середньої школи та формування нових знань та вмінь їх практичного застосування. Студент повинен:

- засвоїти основні поняття вищої математики;
- опанувати визначення основних математичних понять;
- навчитися використовувати набуті теоретичні знання на практиці;
- поглибити та закріпити теоретичні знання, одержані на лекціях.

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ ВИЩА МАТЕМАТИКА

Тематичний план аудиторної роботи

Модуль 1. **Лінійна алгебра**

1.Матриці та дії над ними
2.Визначники. Мінори. Алгебраїчні доповнення
3.Системи лінійних рівнянь
4.Економічні застосування лінійної алгебри

Модуль 2. **Аналітична геометрія**

5.Прямокутні координати на площині
6.Пряма і площина в просторі
7.Криві лінії другого порядку
8.Поверхні обертання

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ВИЩА МАТЕМАТИКА (1семестр)

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин									
	Денна форма					Заочна форма				
	Усього	у тому числі				Усього	у тому числі			
		л	п	інд	ср		л	п	інд	ср
Модуль 1										
Змістовий модуль 1. Лінійна алгебра										
Тема 1. Матриці та дії над ними	7	2	2	1	2	7	1			6
Тема 2. Визначники. Мінори. Алгебраїчні доповнення	7	2	2	1	2	7				7
Тема 3. Системи лінійних рівнянь	8	2	2	2	2	9		2		7
Тема 4. Економічні застосування	8	2	2	2	2	7				7
Разом модуль 1	30	8	8	6	8	31	2	2		27
Модуль 2										
Змістовий модуль 2. Аналітична геометрія										
Тема 5. Прямокутні координати на площині	7	2	2	1	2	7	1			6
Тема 6. Пряма і площина в просторі	7	2	2	1	2	7				7
Тема 7. Криві лінії другого порядку	8	2	2	2	2	9		2		7
Тема 8. Поверхні обертання	8	2	2	2	2	7				7
Разом модуль 2	30	8	8	6	8	30	2	2		27

ТЕМАТИКА САМОСТІЙНОЇ ТА ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ – 28 ГОД

№ модуля		Теми	К-сть годин
Модуль 1.		**Лінійна алгебра**	
	1.	Ранг матриці	2
	2.	Системи лінійних рівнянь. Метод Гауса	4
	3.	Прямокутні системи рівнянь	4
	4.	Власні вектори та власні числа матриці	4
Всього за 1 модуль			14
Модуль 2.		**Аналітична геометрія**	
	5.	Нерівності та їх геометричний зміст	2
	7.	Поверхні другого порядку. Циліндричні поверхні	4
	8.	Поверхні другого порядку. Конічні поверхні	4
	9.	Поверхні другого порядку. Поверхні обертання	4
Всього за 2 модуль			14

ІНДИВІДУАЛЬНЕ НАУКОВО-ДОСЛІДНЕ ЗАВДАННЯ

Індивідуальне завдання з дисципліни „Вища математика” виконується самостійно кожним студентом на основі вибраної теми і оформляється у окремому зошиті. Охоплює основні теми дисципліни. Індивідуальне завдання оформлюється у відповідності з встановленими вимогами. При виконанні індивідуального завдання студент може використовувати комп’ютерну техніку. Виконання індивідуальних завдань є одним із обов’язкових складових модулів залікового кредиту з ”Вища математика”.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ РОБІТ

Індивідуальні завдання необхідно виконувати в окремому зошиті. Для зауважень рецензента потрібно залишити поля шириною 4-6 см. Виконувати роботу необхідно точно за варіантом, який призначено викладачем. Робота виконана не за своїм варіантом не перевіряється і не зараховується.

Задачі треба виконувати у порядку збільшення номерів завдань. Умови завдань необхідно записувати повністю, після приводити докладне розв’язання. Якщо до поданої задачі необхідний малюнок, то його розміщують перед розв’язанням і роблять на ньому всі потрібні позначення. В кінці кожної задачі записується відповідь.

Після повернення перевіреної роботи студент виправляє помилки, які були допущені. Якщо завдання не потребує доопрацювання, тобто виконана правильно, студент зобов’язаний пройти співбесіду з викладачем.

Підписати роботу потрібно за зазначеним нижче зразком:

Індивідуальне домашнє завдання
з курсу «Вища математика»
студента І курсу 1 групи економічного факультету
спеціальність «публічне управління та адміністрування»
Сизоненка Антона Борисовича
Завдання №1.1.13, 1.2.13, 1.3.13, 1.4.13, 1.5.13, 1.5.13, 1.7.13, 1.8.13.

МОДУЛЬ 1. ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1.1. Матриці та дії над ними.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Дано матриці A та B: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -11 & 4 & 5\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}$,

знайти матриці а) $A+B$; б) $-4A$; в) A^T; г) $A\cdot B$; д) $B\cdot A$; е) A^2.

а) $$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -11 & 4 & 5\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & -2+1 & 0+0\\ 3+(-11) & 5+4 & -3+5\\ 2+(-3) & 0+(-1) & -1+2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -8 & 9 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix};$$

б) $$-4A=4\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\cdot 1 & -4\cdot(-2) & -4\cdot 0\\ -4\cdot 3 & -4\cdot 5 & -4\cdot(-3)\\ -4\cdot 2 & -4\cdot 0 & -4\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 8 & 0\\ -12 & -20 & 12\\ -8 & 0 & 4\end{pmatrix};$$

в) $$A^T=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -2 & 5 & 0\\ 0 & -3 & -1\end{pmatrix};$$

г) $$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -11 & 4 & 5\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1\cdot 0+(-2)\cdot(-11)+0\cdot(-3) & 1\cdot 1+(-2)\cdot 4+0\cdot(-1) & 1\cdot 0+(-2)\cdot 5+0\cdot 2\\ 3\cdot 0+5\cdot(-11)+(-3)\cdot(-3) & 3\cdot 1+5\cdot 4+(-3)\cdot(-1) & 3\cdot 0+5\cdot 5+(-3)\cdot 2\\ 2\cdot 0+0\cdot(-11)+(-1)\cdot(-3) & 2\cdot 1+0\cdot 4+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot 0+0\cdot 5+(-1)\cdot 2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}22 & -7 & -10\\ -46 & 26 & 19\\ 3 & 3 & -2\end{pmatrix};$$

д) $$B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -11 & 4 & 5\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0\cdot 1+1\cdot 3+0\cdot 2 & 0\cdot(-2)+1\cdot 5+0\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot(-3)+0\cdot(-1)\\ -11\cdot 1+4\cdot 3+5\cdot 2 & -11\cdot(-2)+4\cdot 5+5\cdot 0 & -11\cdot 0+4\cdot(-3)+5\cdot(-1)\\ -3\cdot 1-1\cdot 3+2\cdot 2 & -3\cdot(-2)-1\cdot 5+2\cdot 0 & -3\cdot 0-1\cdot(-3)+2\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 5 & -3\\ 11 & 42 & -17\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

е) $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1-2\cdot3+0\cdot2 & 1\cdot(-2)-2\cdot5+0\cdot0 & 1\cdot0-2\cdot(-3)+0\cdot(-1)\\ 3\cdot1+5\cdot3-3\cdot2 & 3\cdot(-2)+5\cdot5-3\cdot0 & 3\cdot0+5\cdot(-3)-3\cdot(-1)\\ 2\cdot1+0\cdot3-1\cdot2 & 2\cdot(-2)+0\cdot5-1\cdot0 & 2\cdot0+0\cdot(-3)-1\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-5 & -12 & 6\\ 12 & 19 & -12\\ 0 & -4 & 1\end{pmatrix}.$$

Індивідуальні завдання

1.1. Знайти *f(A)*, якщо:

1.1.1. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & 4 & -1\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix},\ f(x)=2x^2+3x+1.$

1.1.2. $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 1 & 4 & 3\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix},\ f(x)=x^2+5x+2.$

1.1.3. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ f(x)=x^3+x^2-7x+3.$

1.1.4. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix},\ f(x)=3x^2-2x+6.$

1.1.5. $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix},\ f(x)=2x^3-x^2+5x+3.$

1.1.6. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix},\ f(x)=x^2-2x-1.$

1.1.7. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 1 & 2\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix},\ f(x)=-2x^2+8x-3.$

1.1.8. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix},\ f(x)=2x^2+6x-1.$

1.1.9. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $f(x)=-x^3+3x^2-5x-3$.

1.1.10. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $f(x)=-3x^2+5x-3$.

1.1.11. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $f(x)=-2x^2+9x-3$.

1.1.12. $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $f(x)=-5x^3+3x^2+4x-1$.

1.1.13. $A=\begin{pmatrix}7 & 0 & -1\\ 1 & 6 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $f(x)=-x^2-4x-11$.

1.1.14. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $f(x)=5x^2+2x-8$.

1.1.15. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 7\end{pmatrix}$, $f(x)=2x^3-3x^2+5x-3$.

1.1.16. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $f(x)=5x^2+3x-4$.

1.1.17. $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $f(x)=x^3-4x^2+3$.

1.1.18. $A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 2\\ -1 & 4 & 5\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $f(x)=2x^2-6x+7$.

1.1.19. $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $f(x)=(x^2-2x)(2x+1)$.

1.1.20. $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 5\\ -1 & 4 & -2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $f(x)=(4-2x)(x+6)$.

1.1.21. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 5\end{pmatrix}$, $f(x)=(x^2+2x)(2x-1)$.

1.1.22. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $f(x)=(3-x)(x+1)$.

1.1.23. $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 6 & 2\end{pmatrix}$, $f(x)=2x^3+4x^2-2$.

1.1.24. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - x + 9$.

1.1.25. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 13$.

1.1.26. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 5x + 1$.

1.1.27. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = (x + 2x^2)(x - 13)$.

1.1.28. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $f(x) = (1 - x)(x + 1)$.

1.1.29. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 3x$.

1.1.30. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $f(x) = (2 - x)(x + 5)$.

1.2. Визначники. Мінори. Алгебраїчні доповнення.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1 : Обчислити визначники другого та третього порядку:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 22 \end{vmatrix} = 3 \cdot 22 - 1(-4) = 70$.

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 \cdot 6 -$

$-(-2) \cdot 5 \cdot 6 - (-3) \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 5 = 100 + 12 - 54 + 60 + 36 + 30 = 184.$

П р и к л а д 2 : Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Обчислити мінори M_{12} і M_{22} та алгебраїчні доповнення A_{12} і A_{22}.

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8$; $M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 20 - (-12) = 32$;

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (2 \cdot 5 - 3 \cdot 6) = -(10 - 18) = 8$;

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (4 \cdot 5 - 6 \cdot (-2)) = 20 - (-12) = 32.$$

П р и к л а д 3: Обчислити визначник розкладаючи його за елементами третього рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -11 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-11) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 1 \cdot (-7 \cdot 3 - 5 \cdot (-2)) + 2 \cdot (-1) \cdot (3 \cdot 3 - 5 \cdot 1) + (-11) \cdot 1 \cdot (3 \cdot (-2) - (-7) \cdot 1) = -44 - $$
$$- 8 - 11 = 63.$$

П р и к л а д 4 : Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Додамо перший рядок до другого і четвертого, утворивши визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Переставимо місцями перший і третій стовпчики:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Додамо другий рядок до третього і четвертого рядків і винесемо спільний множник елементів третього та четвертого рядків:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{vmatrix} = -5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Віднявши третій рядок від четвертого, одержимо:

$$\Delta = -5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = -90.$$

Індивідуальне завдання

1.2. Обчислити визначники в наступних завданнях:

1.2.1. $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.2. $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ -1 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.3. $\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.4. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.5. $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 12 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ -1 & -4 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.6. $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 12 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.7. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 11 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.8. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.9. $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.10. $\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.11. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 9 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.12. $\begin{vmatrix} 12 & -1 \\ -4 & 11 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.13. $\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 13 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 11 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.14. $\begin{vmatrix} 18 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 13 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.15. $\begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$.

1.2.16. $\begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & 9 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$.

1.2.17. $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$.

1.2.18. $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -22 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

1.2.19. $\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 5 & -21 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

1.2.20. $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 8 & -20 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

1.2.21. $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & -10 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -3 \end{vmatrix}$.

1.2.22. $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 15 & -1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 9 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -3 \end{vmatrix}$.

1.2.23. $\begin{vmatrix} 17 & 1 \\ 15 & -4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 8 & 7 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 & -1 \\ 9 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & -3 \end{vmatrix}$.

1.2.24. $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 8 & -3 \end{vmatrix}$.

1.2.25. $\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 6 & -7 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$.

1.2.26. $\begin{vmatrix} 13 & 4 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5- & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 13 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.27. $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.28. $\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 15 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.29. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 14 & 11 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 13 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & -3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2.30. $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 21 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 6 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ -1 & -4 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

1.3. Обернена матриця

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1: Знайти матрицю, обернену до заданої: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці А і алгебраїчні доповнення всіх елементів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -68.$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$;

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 32 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 17$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -11$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -21$.

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} знайдена правильно, тому що $A \cdot A^{-1} = E$, тобто:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{68}\right) \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{68}\begin{pmatrix} 2\cdot(-17)+5\cdot(-5)-1\cdot 9 & 2\cdot(-17)+5\cdot 7-1\cdot 1 & 2\cdot 17+5\cdot(-11)-1\cdot(-21) \\ 3\cdot(-17)-3\cdot(-5)+4\cdot 9 & 3\cdot(-17)-3\cdot 7+4\cdot 1 & 3\cdot 17-3\cdot(-11)+4\cdot(-21) \\ 1\cdot(-17)+2\cdot(-5)+3\cdot 9 & 1\cdot(-17)+2\cdot 7+3\cdot 1 & 1\cdot 17+2\cdot(-11)+3\cdot(-21) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{68}\cdot\begin{pmatrix} -68 & 0 & 0 \\ 0 & -68 & 0 \\ 0 & 0 & -68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

П р и к л а д 2 : Розв’язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1};$$

Обчислимо обернену матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -3-10 = -13;$$

$A_{11} = -3$; $\quad A_{12} = -5 \quad A_{21} = -2 \quad A_{22} = 1$

Тоді обернена матриця матиме вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-13}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-13}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix} 5\cdot(-3)+9\cdot(-5) & 5\cdot(-2)+9\cdot 1 \\ 4\cdot(-3)+7\cdot(-5) & 4\cdot(-2)+7\cdot 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix} -60 & -1 \\ -47 & -1 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} \frac{60}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{47}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

Індивідуальне завдання

1.3. Знайти обернену матрицю A^{-1}, якщо:

1.3.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. **1.3.2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **1.3.3.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3.4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.3.5.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 2 & -7 & -9 \end{pmatrix}$. **1.3.6.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

1.3.7. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -7 & -3\\ 3 & 3 & -4\end{pmatrix}$. **1.3.8.** $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}$. **1.3.9.** $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -3 & -3 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.3.10. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$. **1.3.11**. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 4 & 7 & -11\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. **1.3.12.** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 4 & 7 & 3\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

1.3.13. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$. **1.3.14.** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 4 & 7 & -11\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. **1.3.15.** $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & -6 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

1.3.16. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 4 & -4 & 0\end{pmatrix}$. **1.3.17.** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 11\\ 4 & -3 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. **1.3.18.** $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ -5 & 6 & 1\\ -3 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

1.3.19. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix}$. **1.3.20.** $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$. **1.3.21.** $A=\begin{pmatrix}-1 & 7 & 0\\ 1 & 9 & 2\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix}$.

1.3.22. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 9\\ 2 & -3 & 4\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$. **1.3.23.** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & -3 & 5\\ 4 & 4 & 0\end{pmatrix}$. **1.3.24.** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 6 & -3 & 1\\ 1 & -4 & 0\end{pmatrix}$.

1.3.25. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -5\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$. **1.3.26.** $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & -4 & 0\end{pmatrix}$. **1.3.27.** $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 6 & -5\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

1.3.28. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$. **1.3.29.** $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$. **1.3.30.** $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix}$.

1.4. Розв'язати матричне рівняння:

1.4.1. $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 0 & 4 & 8\end{pmatrix}$. **1.4.2.** $\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ -1 & 4 & 8\end{pmatrix}$.

1.4.3. $X\cdot\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. **1.4.4.** $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

1.4.5. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 8 & 1 & 2\end{pmatrix}$. **1.4.6.** $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 0 & 4 & 8\end{pmatrix}$

1.4.7. $\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 7\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 1 & 13\end{pmatrix}$. **1.4.8.** $\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 1 & -7\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}10 & 9\\ 6 & -1\end{pmatrix}$.

1.4.9. $\begin{pmatrix}1&3&2\\3&8&5\\2&7&6\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\\3&-4\end{pmatrix}.$

1.4.10. $\begin{pmatrix}1&1&2\\2&-1&2\\4&1&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&5\\4&-1\\2&7\end{pmatrix}.$

1.4.11. $X\cdot\begin{pmatrix}1&3&2\\3&8&5\\2&7&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&4&6\\0&3&-5\end{pmatrix}.$

1.4.12. $X\cdot\begin{pmatrix}3&3&2\\4&5&3\\5&4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&4\\2&6&7\end{pmatrix}.$

1.4.13. $X\cdot\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&0\\1&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&2&0\\1&4&5\end{pmatrix}.$

1.4.14. $\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\1&0&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&-3&1\\4&1&5\end{pmatrix}.$

1.4.15. $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\3&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&0&7\\8&1&2\end{pmatrix}.$

1.4.16. $\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&7\\0&4&8\end{pmatrix}.$

1.4.17. $X\cdot\begin{pmatrix}4&3&6\\5&4&7\\6&5&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&5\\0&0&-1\end{pmatrix}.$

1.4.18. $X\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\1&-2&5\end{pmatrix}.$

1.4.19. $\begin{pmatrix}4&3&6\\5&4&7\\6&5&7\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}.$

1.4.20. $X\cdot\begin{pmatrix}2&2\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&4\\2&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\end{pmatrix}$

.

1.4.21. $\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&1&5\\1&1&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-3\\1&3&2\end{pmatrix}.$

1.4.22. $\begin{pmatrix}2&0&2\\1&2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-3&2&1\\-4&0&5\\1&3&2\end{pmatrix}.$

1.4.23. $\begin{pmatrix}5&11\\1&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-3&7\\5&2\end{pmatrix}.$

1.4.24. $\begin{pmatrix}4&7\\1&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}11&10\\5&12\end{pmatrix}.$

1.4.25. $\begin{pmatrix}3&2\\-1&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&-2&7\\1&4&3\end{pmatrix}.$

1.4.26. $\begin{pmatrix}4&3\\-1&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&-2&7\\1&-4&9\end{pmatrix}.$

1.4.27. $X\cdot\begin{pmatrix}4&3\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8\\-1&1\\7&-1\end{pmatrix}.$

1.4.28. $X\cdot\begin{pmatrix}3&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&7\\4&1\\-2&3\end{pmatrix}.$

1.4.29. $X\cdot\begin{pmatrix}3&2\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2&1\\4&-3\end{pmatrix}$

1.4.30. $\begin{pmatrix}-4&5\\1&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&-2&7\\1&4&5\end{pmatrix}.$

1.4. Системи лінійних рівнянь. Метод Крамера. Матричний метод.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Розв'язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера та матричним методом: $\begin{cases} 2x+7y+z=-17, \\ 7x+3y+5z=8, \\ 3x+2y+6z=9. \end{cases}$

Розв'язання:

а) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за правилом Крамера. Для цього обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 6 + 1\cdot 7\cdot 2 + 7\cdot 5\cdot 3 - 1\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot 5\cdot 2 - 7\cdot 7\cdot 6 =$$

$$= 36+14+105-9-20-294=-168.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Обчислимо додаткові визначники, замінюючи по черзі перший, другий та третій стовбець головного визначника стовбцем вільних елементів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -17 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-17)\cdot 3\cdot 6 + 8\cdot 2\cdot 1 + 7\cdot 5\cdot 9 - 1\cdot 3\cdot 9 - 2\cdot 5\cdot (-17) - 8\cdot 7\cdot 6 =$$

$$= -306+16+315-27+170-336=-168;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -17 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 8\cdot 6 + 7\cdot 9\cdot 1 + 3\cdot (-17)\cdot 5 - 1\cdot 8\cdot 3 - 2\cdot 5\cdot 9 - 7\cdot 6\cdot (-17) =$$

$$= 96+63-255-24-90+714=504;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -17 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 9 + 7\cdot 8\cdot 3 + 7\cdot 2\cdot (-17) - (-17)\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 8 - 7\cdot 7\cdot 9 =$$

$$= 54+168-238+153-32-441=-336.$$

Визначимо корені системи рівнянь за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-168}{-168} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{504}{-168} = -3; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-336}{-168} = 2.$$

Отже, {1; –3; 2} – шуканий розв'язок системи лінійних рівнянь.

б) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь матричним методом, скориставшись формулою: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$,

де Δ – головний визначник системи,

A^* – зведена матриця, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – стовбець вільних елементів.

З попередніх обчислень головний визначник системи дорівнює $\Delta = -168$.
Обчислимо математичні доповнення до кожного елемента матриці за формулою: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = -(42 - 15) = -27;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 14 - 9 = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 1 \cdot 2) = -(42 - 2) = -40;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 12 - 3 = 9;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 7 \cdot 3) = -(4 - 21) = 17;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 35 - 3 = 32;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 1 \cdot 7) = -(10 - 7) = -3;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 7 \cdot 7 = 6 - 49 = -43.$$

Запишемо зведену матрицю: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix}$.

Тоді стовбець невідомих елементів $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ дорівнює: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot (-17) - 40 \cdot 8 + 32 \cdot 9 \\ (-27) \cdot (-17) + 9 \cdot 8 + (-3) \cdot 9 \\ 5 \cdot (-17) + 17 \cdot 8 + (-43) \cdot 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -136 - 320 + 288 \\ 459 + 72 - 27 \\ -85 + 136 - 387 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -168 \\ 504 \\ -336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, {1; –3; 2} – шуканий розв’язок системи лінійних рівнянь.

Відповідь: {1; –3; 2}.

Індивідуальне завдання

1. 5. Розв’язати систему лінійних рівнянь
а) за правилом Крамера; б) матричним методом:

1.5.1. $\begin{cases} 2x-3y+z=-6, \\ 3x+3y-2z=20, \\ 5x-6y+4z=-12. \end{cases}$

1.5.2. $\begin{cases} 2x+3y+z=0, \\ 2x+y+3z=4, \\ 3x+2y+z=2. \end{cases}$

1.5.3. $\begin{cases} 2x+5y+9z=-20, \\ 9x-7y+3z=1, \\ 6x+4y+7z=-2. \end{cases}$

1.5.4. $\begin{cases} 4x-2y+3z=-9, \\ 3x+5y-4z=25, \\ 7x+2y+3z=2. \end{cases}$

1.5.5. $\begin{cases} x+y+z=-2, \\ 2x+3y-z=1, \\ x-y+2z=-7. \end{cases}$

1.5.6. $\begin{cases} 3x+4y+2z=-5, \\ 2x-4y+3z=20, \\ 4x-3y-5z=3. \end{cases}$

1.5.7. $\begin{cases} 3x+2y+4z=-3, \\ 2x-3y+z=-4, \\ 4x-5y-2z=10. \end{cases}$

1.5.8. $\begin{cases} x+2y+3z=-2, \\ 3x+4y-2z=-17, \\ 2x+3y+z=-9. \end{cases}$

1.5.9. $\begin{cases} 2x+5y-2z=9, \\ 4x+y-4z=9, \\ x+y-4z=9. \end{cases}$

1.5.10. $\begin{cases} x-y+z=3, \\ 2x+y+z=1, \\ x+y+2z=8. \end{cases}$

1.5.11. $\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ x+y-z=-2, \\ 4x-y+5z=3. \end{cases}$

1.5.12. $\begin{cases} 3x-y-4z=-2, \\ 6x+2y+z=9, \\ 2x+4y-3z=3. \end{cases}$

1.5.13. $\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x+y+2z=10, \\ x-3y+z=-2. \end{cases}$

1.5.14. $\begin{cases} 2x+y+z=2, \\ x+2y+z=3, \\ x+y+2z=-1. \end{cases}$

1.5.15. $\begin{cases} x+2y+3z=-1, \\ 2x+y-4z=-3, \\ 3x+2y+z=1. \end{cases}$

1.5.16. $\begin{cases} 3x+4y-z=-2, \\ 5x+3y-4z=-2, \\ 4x+2y+3z=5. \end{cases}$

1.5.17. $\begin{cases} 2x-y+3z=-4, \\ x+2y-4z=19, \\ -3x+4y+2z=3. \end{cases}$

1.5.18. $\begin{cases} 3x-2y+4z=-17, \\ 4x+3y-2z=18, \\ 3x+y+3z=-7. \end{cases}$

1.5.19. $\begin{cases} x+y-z=-4, \\ 2x+y+2z=2, \\ 3x-y+z=0. \end{cases}$

1.5.20. $\begin{cases} 2x+2y+z=1, \\ 3x+y+2z=-2, \\ 4x-y-7z=7. \end{cases}$

1.5.21. $\begin{cases} x+3y-z=0, \\ 2x-4y+4z=6, \\ 3x+2y+z=4. \end{cases}$

1.5.22. $\begin{cases} x-8y+3z=1, \\ 2x-6y+z=4, \\ 0{,}1x-2y+z=0. \end{cases}$

1.5.23. $\begin{cases} 3x+4y+3z=3, \\ 4x+5y-3z=4, \\ 2x+3y-4z=2. \end{cases}$ **1.5.24.** $\begin{cases} x-5y+z=4, \\ 2x-y+3z=14, \\ 3x+5y+z=8. \end{cases}$

1.5.25. $\begin{cases} 3x+y+2z=-2, \\ x+3y+2z=2, \\ 2x+y-z=-1. \end{cases}$ **1.5.26.** $\begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x+y+z=8, \\ x-y-z=-2. \end{cases}$

1.5.27. $\begin{cases} 3x+y+2z=6, \\ x+3y+2z=2, \\ 2x+y-z=-2. \end{cases}$ **1.5.28.** $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x+y+z=3, \\ x-y-z=0. \end{cases}$

1.5.29. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ x-2y+z=-6, \\ 2x-3y-4z=-8. \end{cases}$ **1.5.30.** $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x-2y+z=0, \\ 2x-3y-4z=-11. \end{cases}$

1.5. Елементи векторної алгебри

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1: Дано точки $A(3;\ -1;\ 0)$ та $B(1;\ 2;\ -4)$. Знайдіть координати та довжину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання:

Координати вектора: $\overrightarrow{AB}(1-3;\ 2-(-1);\ -4-0)$, тобто $\overrightarrow{AB}(-2;\ 3;\ -4)$.

Довжина вектора $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(1-3)^2+(2-(-1))^2+(-4-0)^2} = \sqrt{(-2)^2+3^2+(-4)^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$.

П р и к л а д 2: Вектори $\vec{a}(-2;\ a_y;\ -1)$ та $\vec{b}(3;\ -6;\ b_z)$ колінеарні. Знайти координати цих векторів.

Розв'язання: За умовою: $\frac{-2}{3} = \frac{a_y}{-6} = \frac{-1}{b_z}$. Звідси: $a_y = \frac{-2\cdot(-6)}{3} = 4$, а $b_z = -\frac{2}{3}$. Тобто вектори мають координати $\vec{a}(-2;\ 4;\ -1)$ та $\vec{b}\left(3;\ -6;\ -\frac{2}{3}\right)$.

П р и к л а д 3: Дано два вектори $\vec{a}(2;\ -1;\ 3)$ та $\vec{b}(3;\ 4;\ 5)$. Знайти координати векторів $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язання: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2+3;\ -1+4;\ 3+5) = (5;\ 3;\ 8)$,

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (2-3;\ -1-4;\ 3-5) = (-1;\ -5;\ -2)$.

П р и к л а д 4: Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та косинус кута між ними, якщо $\vec{a}(3;\ 4;\ 5)$ та $\vec{b}(2;\ 4;\ 6)$.

Розв'язання: Скалярний добуток обчислимо згідно формули: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$, тобто $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 2 + 4\cdot 4 + 5\cdot 6 = 6+16+30 = 52$.

Тоді косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\cos\alpha = \frac{52}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2+6^2}} = \frac{52}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{56}} = \frac{13}{5\sqrt{7}} = \frac{13\sqrt{7}}{35} \approx 0{,}9827 .$$

Індивідуальне завдання

1. 6. Дано точки *A* та *B*. Знайдіть координати та довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо

1.6.1. $A(1;\ \ 2;\ \ 3)$ та $B(-13;\ \ 2;\ \ 4)$.

1.6.2. $A(-1;\ \ 2;\ \ 3)$ та $B(-3;\ \ -2;\ \ 4)$.

1.6.3. $A(-2;\ \ 2;\ \ 4)$ та $B(13;\ \ 2;\ \ -6)$.

1.6.4. $A(-3;\ \ 2;\ \ 5)$ та $B(12;\ \ 2;\ \ -5)$.

1.6.5. $A(-4;\ \ 2;\ \ 6)$ та $B(11;\ \ 2;\ \ -4)$.

1.6.6. $A(-5;\ \ 2;\ \ 7)$ та $B(10;\ \ 2;\ \ -3)$.

1.6.7. $A(-6;\ \ 2;\ \ 8)$ та $B(9;\ \ 2;\ \ -2)$.

1.6.8. $A(-7;\ \ 2;\ \ 9)$ та $B(8;\ \ 2;\ \ -1)$.

1.6.9. $A(-8;\ \ 2;\ \ 10)$ та $B(7;\ \ 2;\ \ 0)$.

1.6.10. $A(-9;\ \ 2;\ \ 11)$ та $B(6;\ \ 2;\ \ 3)$.

1.6.11. $A(-10;\ \ 2;\ \ 12)$ та $B(5;\ \ 2;\ \ 2)$.

1.6.12. $A(-11;\ \ 2;\ \ 13)$ та $B(4;\ \ 2;\ \ 3)$.

1.6.13. $A(-12;\ \ 2;\ \ 14)$ та $B(3;\ \ 2;\ \ 2)$.

1.6.14. $A(-13;\ \ 2;\ \ 15)$ та $B(2;\ \ 2;\ \ 3)$.

1.6.15. $A(-15;\ \ 2;\ \ 16)$ та $B(1;\ \ 2;\ \ 4)$.

1.6.16. $A(1;\ \ 2;\ \ -3)$ та $B(0;\ \ 14;\ \ 4)$.

1.6.17. $A(2;\ \ 3;\ \ -3)$ та $B(-1;\ \ 13;\ \ 4)$.

1.6.18. $A(3;\ \ 4;\ \ -3)$ та $B(-2;\ \ 12;\ \ 4)$.

1.6.19. $A(4;\ \ 5;\ \ -3)$ та $B(-3;\ \ 11;\ \ 4)$.

1.6.20. $A(5;\ \ 6;\ \ -3)$ та $B(-4;\ \ 10;\ \ 4)$.

1.6.21. $A(6;\ \ 7;\ \ -3)$ та $B(-5;\ \ 9;\ \ 4)$.

1.6.22. $A(7;\ \ 8;\ \ -3)$ та $B(-6;\ \ 8;\ \ 4)$.

1.6.23. $A(8;\ \ 9;\ \ 3)$ та $B(-7;\ \ 7;\ \ 4)$.

1.6.24. $A(9;\ \ 10;\ \ 3)$ та $B(-8;\ \ 6;\ \ 4)$.

1.6.25. $A(10;\ \ 11;\ \ -3)$ та $B(-9;\ \ 5;\ \ 4)$.

1.6.26. $A(11;\ \ -2;\ \ -3)$ та $B(-10;\ \ 4;\ \ -4)$.

1.6.27. $A(12;\ \ -2;\ \ -3)$ та $B(-11;\ \ 3;\ \ -4)$.

1.6.28. $A(13;\ \ -2;\ \ 0)$ та $B(-12;\ \ 2;\ \ 7)$.

1.6.29. $A(11;\ \ -12;\ \ 3)$ та $B(-3;\ \ 2;\ \ 4)$.

1.6.30. $A(-21;\ \ 2;\ \ 6)$ та $B(3;\ \ 0;\ \ -4)$.

1. 7. Чи колінеарні вектори $\overrightarrow{c_1}$ і $\overrightarrow{c_2}$, побудовані на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$?

1.7.1. $\vec{a}(1;\ \ 2;\ \ 3)$, $\vec{b}(3;\ \ 0;\ \ -1)$, $\overrightarrow{c_1} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2} = -\vec{a} + 3\vec{b}$.

1.7.2. $\vec{a}(1;\quad 0;\quad 1)$, $\vec{b}(-2;\quad 3;\quad 5)$, $\vec{c_1}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c_2}=3\vec{a}-\vec{b}$.

1.7.3. $\vec{a}(-2;\quad 4;\quad 1)$, $\vec{b}(1;\quad -2;\quad 7)$, $\vec{c_1}=5\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c_2}=2\vec{a}-\vec{b}$.

1.7.4. $\vec{a}(1;\quad 2;\quad -3)$, $\vec{b}(2;\quad -1;\quad -1)$, $\vec{c_1}=4\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c_2}=8\vec{a}-\vec{b}$.

1.7.5. $\vec{a}(3;\quad 5;\quad 4)$, $\vec{b}(5;\quad 9;\quad 7)$, $\vec{c_1}=-2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c_2}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

1.7.6. $\vec{a}(1;\quad 4;\quad -2)$, $\vec{b}(1;\quad 1;\quad -1)$, $\vec{c_1}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c_2}=4\vec{a}+2\vec{b}$.

1.7.7. $\vec{a}(1;\quad -2;\quad 5)$, $\vec{b}(3;\quad -1;\quad 0)$, $\vec{c_1}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=\vec{a}-2\vec{b}$.

1.7.8. $\vec{a}(3;\quad 4;\quad -1)$, $\vec{b}(2;\quad -1;\quad 1)$, $\vec{c_1}=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c_2}=-2\vec{a}+\vec{b}$.

1.7.9. $\vec{a}(-2;\quad -3;\quad -2)$, $\vec{b}(1;\quad 0;\quad 5)$, $\vec{c_1}=3\vec{a}-9\vec{b}$, $\vec{c_2}=-\vec{a}-3\vec{b}$.

1.7.10. $\vec{a}(-1;\quad 4;\quad 2)$, $\vec{b}(3;\quad -2;\quad 6)$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c_2}=-6\vec{a}+3\vec{b}$.

1.7.11. $\vec{a}(5;\quad 0;\quad -1)$, $\vec{b}(7;\quad 2;\quad 3)$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c_2}=6\vec{a}+3\vec{b}$.

1.7.12. $\vec{a}(0;\quad 3;\quad -2)$, $\vec{b}(1;\quad -2;\quad 1)$, $\vec{c_1}=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=3\vec{a}+5\vec{b}$.

1.7.13. $\vec{a}(-2;\quad 7;\quad -1)$, $\vec{b}(-3;\quad 5;\quad 2)$, $\vec{c_1}=5\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c_2}=3\vec{a}+2\vec{b}$.

1.7.14. $\vec{a}(-2;\quad 7;\quad -1)$, $\vec{b}(-3;\quad 5;\quad 2)$, $\vec{c_1}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c_2}=-2\vec{a}+\vec{b}$.

1.7.15. $\vec{a}(3;\quad 7;\quad 0)$, $\vec{b}(1;\quad -3;\quad 4)$, $\vec{c_1}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=2\vec{a}+\vec{b}$.

1.7.16. $\vec{a}(3;\quad -2;\quad 0)$, $\vec{b}(3;\quad 0;\quad -4)$, $\vec{c_1}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c_2}=-\vec{a}+4\vec{b}$.

1.7.17. $\vec{a}(2;\quad 0;\quad 1)$, $\vec{b}(-2;\quad 3;\quad -5)$, $\vec{c_1}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=3\vec{a}+4\vec{b}$.

1.7.18. $\vec{a}(-3;\quad 4;\quad -1)$, $\vec{b}(1;\quad -2;\quad 6)$, $\vec{c_1}=4\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c_2}=3\vec{a}-\vec{b}$.

1.7.19. $\vec{a}(1;\quad 4;\quad -3)$, $\vec{b}(2;\quad 1;\quad -1)$, $\vec{c_1}=4\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c_2}=6\vec{a}-\vec{b}$.

1.7.20. $\vec{a}(3;\quad 5;\quad 2)$, $\vec{b}(5;\quad 0;\quad 7)$, $\vec{c_1}=-2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c_2}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

1.7.21. $\vec{a}(0;\quad 4;\quad -3)$, $\vec{b}(4;\quad 1;\quad -1)$, $\vec{c_1}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c_2}=5\vec{a}+2\vec{b}$.

1.7.22. $\vec{a}(1;\quad -2;\quad 3)$, $\vec{b}(3;\quad -1;\quad 1)$, $\vec{c_1}=4\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c_2}=-3\vec{a}+\vec{b}$.

1.7.23. $\vec{a}(4;\quad 4;\quad -1)$, $\vec{b}(2;\quad -1;\quad 3)$, $\vec{c_1}=5\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c_2}=-4\vec{a}+\vec{b}$.

1.7.24. $\vec{a}(2;\quad 3;\quad -2)$, $\vec{b}(1;\quad 0;\quad 3)$, $\vec{c_1}=3\vec{a}-7\vec{b}$, $\vec{c_2}=-\vec{a}-2\vec{b}$.

1.7.25. $\vec{a}(-1;\quad 4;\quad 3)$, $\vec{b}(3;\quad -2;\quad 1)$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c_2}=-4\vec{a}+3\vec{b}$.

1.7.26. $\vec{a}(3;\quad 0;\quad -1)$, $\vec{b}(7;\quad 2;\quad 3)$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c_2}=2\vec{a}+3\vec{b}$.

1.7.27. $\vec{a}(1;\quad 3;\quad -2)$, $\vec{b}(1;\quad -2;\quad 2)$, $\vec{c_1}=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=3\vec{a}+4\vec{b}$.

1.7.28. $\vec{a}(-2;\quad 4;\quad -1)$, $\vec{b}(-3;\quad 1;\quad 2)$, $\vec{c_1}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c_2}=\vec{a}+2\vec{b}$.

1.7.29. $\vec{a}(3;\quad 3;\quad 0)$, $\vec{b}(1;\quad -3;\quad 1)$, $\vec{c_1}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=2\vec{a}-\vec{b}$.

1.7.30. $\vec{a}(3;\quad 2;\quad 1)$, $\vec{b}(1;\quad -3;\quad 2)$, $\vec{c_1}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=6\vec{a}+\vec{b}$.

1.8. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та косинус кута між ними, якщо:

1.8.1. $\vec{a}(1;\quad 2;\quad 3)$, $\vec{b}(3;\quad 0;\quad -1)$.

1.8.2. $\vec{a}(1;\ \ 0;\ \ 1)$, $\vec{b}(-2;\ \ 3;\ \ 5)$.

1.8.3. $\vec{a}(-2;\ \ 4;\ \ 1)$, $\vec{b}(1;\ \ -2;\ \ 7)$.

1.8.4. $\vec{a}(1;\ \ 2;\ \ -3)$, $\vec{b}(2;\ \ -1;\ \ -1)$.

1.8.5. $\vec{a}(3;\ \ 5;\ \ 4)$, $\vec{b}(5;\ \ 9;\ \ 7)$.

1.8.6. $\vec{a}(1;\ \ 4;\ \ -2)$, $\vec{b}(1;\ \ 1;\ \ -1)$.

1.8.7. $\vec{a}(1;\ \ -2;\ \ 5)$, $\vec{b}(3;\ \ -1;\ \ 0)$.

1.8.8. $\vec{a}(3;\ \ 4;\ \ -1)$, $\vec{b}(2;\ \ -1;\ \ 1)$.

1.8.9. $\vec{a}(-2;\ \ -3;\ \ -2)$, $\vec{b}(1;\ \ 0;\ \ 5)$.

1.8.10. $\vec{a}(-1;\ \ 4;\ \ 2)$, $\vec{b}(3;\ \ -2;\ \ 6)$.

1.8.11. $\vec{a}(5;\ \ 0;\ \ -1)$, $\vec{b}(7;\ \ 2;\ \ 3)$.

1.8.12. $\vec{a}(0;\ \ 3;\ \ -2)$, $\vec{b}(1;\ \ -2;\ \ 1)$.

1.8.13. $\vec{a}(-2;\ \ 7;\ \ -1)$, $\vec{b}(-3;\ \ 5;\ \ 2)$.

1.8.14. $\vec{a}(-2;\ \ 7;\ \ -1)$, $\vec{b}(-3;\ \ 5;\ \ 2)$.

1.8.15. $\vec{a}(3;\ \ 7;\ \ 0)$, $\vec{b}(1;\ \ -3;\ \ 4)$.

1.8.16. $\vec{a}(3;\ \ -2;\ \ 0)$, $\vec{b}(3;\ \ 0;\ \ -4)$.

1.8.17. $\vec{a}(2;\ \ 0;\ \ 1)$, $\vec{b}(-2;\ \ 3;\ \ -5)$.

1.8.18. $\vec{a}(-3;\ \ 4;\ \ -1)$, $\vec{b}(1;\ \ -2;\ \ 6)$.

1.8.19. $\vec{a}(1;\ \ 4;\ \ -3)$, $\vec{b}(2;\ \ 1;\ \ -1)$.

1.8.20. $\vec{a}(3;\ \ 5;\ \ 2)$, $\vec{b}(5;\ \ 0;\ \ 7)$.

1.8.21. $\vec{a}(0;\ \ 4;\ \ -3)$, $\vec{b}(4;\ \ 1;\ \ -1)$.

1.7.22. $\vec{a}(1;\ \ -2;\ \ 3)$, $\vec{b}(3;\ \ -1;\ \ 1)$.

1.8.23. $\vec{a}(4;\ \ 4;\ \ -1)$, $\vec{b}(2;\ \ -1;\ \ 3)$.

1.8.24. $\vec{a}(2;\ \ 3;\ \ -2)$, $\vec{b}(1;\ \ 0;\ \ 3)$.

1.8.25. $\vec{a}(-1;\ \ 4;\ \ 3)$, $\vec{b}(3;\ \ -2;\ \ 1)$.

1.8.26. $\vec{a}(3;\ \ 0;\ \ -1)$, $\vec{b}(7;\ \ 2;\ \ 3)$.

1.8.27. $\vec{a}(1;\ \ 3;\ \ -2)$, $\vec{b}(1;\ \ -2;\ \ 2)$.

1.8.28. $\vec{a}(-2;\ \ 4;\ \ -1)$, $\vec{b}(-3;\ \ 1;\ \ 2)$.

1.8.29. $\vec{a}(3;\ \ 3;\ \ 0)$, $\vec{b}(1;\ \ -3;\ \ 1)$.

1.8.30. $\vec{a}(3;\ \ 2;\ \ 1)$, $\vec{b}(1;\ \ -3;\ \ 2)$.

Модуль 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

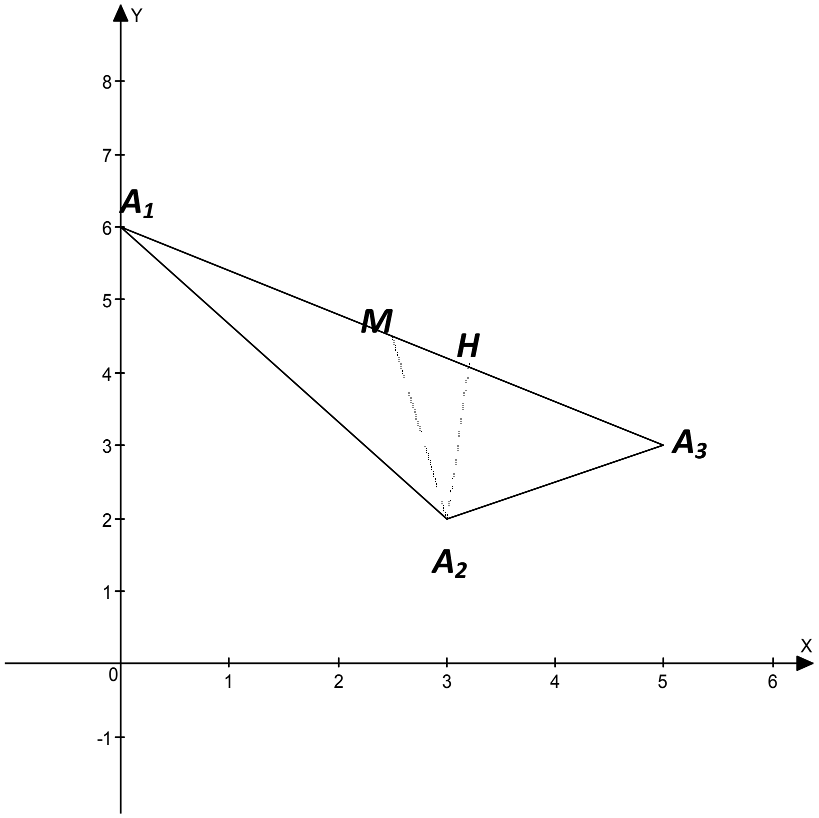
2.1. Прямокутні координати на площині.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Дано координати вершин трикутника $\Delta A_1A_2A_3$: A_1 *(0; 6); A_2 (3; 2);* A_3 *(5; 3)* і точку A_4 *(2; 1)*. Побудувати рисунок в системі координат. Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2; б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2; в) тангенс кута A_2; г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$; д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

Розв'язання:

Побудуємо рисунок в системі координат:



а) Запишемо <u>рівняння прямої A_1A_2</u>:

Рівняння прямої, що проходить через дві точки, має вигляд: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Координати точок A_1 *(0; 6) і* A_2 *(3; 2)* відомі, тому рівняння набуватиме вигляду: $\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-6}{2-6}$, або після спрощення: $4x+3y+18=0$.

б) Запишемо <u>рівняння висоти та медіани</u> $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2: Для запису рівняння висоти A_2H, що перпендикулярна стороні A_1A_3, запишемо рівняння сторони A_1A_3, користуючись попередньою формулою: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Координати точок A_1 *(0; 6)* і A_3 *(5; 3)* відомі, тому рівняння набуватиме вигляду: $\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-6}{3-6}$, або після спрощення: $3x+5y-30=0$.

Кутовий коефіцієнт цієї прямої дорівнює: $k_{A_1A_3}=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{5}$. Кутовий коефіцієнт перпендикулярної прямої: $k_{A_1A_3}=-\frac{1}{k_{A_1A_3}}=-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$.

Рівняння прямої, що проходить через точку *A₂ (3; 2*) з кутовим коефіцієнтом $k_{A_2H}=\frac{5}{3}$ має вигляд: $y-y_2=k(x-x_2)$, або $y-2=\frac{5}{3}\cdot(x-3)$. Після перетворення рівняння висоти набуває вигляду: $5x-3y-9=0$.

Для запису рівняння медіани A_2M знайдемо координати точки *M*, як середини сторони A_1A_3: $x_м=\frac{x_{A_1}+x_{A_3}}{2}=\frac{0+5}{2}=2{,}5$, $y_м=\frac{y_{A_1}+y_{A_3}}{2}=\frac{6+3}{2}=4{,}5$.

Запишемо рівняння медіани, як рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Так як координати точок A_2 і *M* відомо, то: $\frac{x-3}{2{,}5-3}=\frac{y-2}{4{,}5-2}$. Після спрощення рівняння медіани: $5x+y-17=0$.

в) Знайдемо <u>тангенс кута A_2</u>, обчисливши кутові коефіцієнти прямих A_1A_2 і A_2A_3. Рівняння прямої A_1A_2, з попередніх обчислень: $4x+3y+18=0$, тоді $k_{A_1A_2}=-\frac{A}{B}=-\frac{4}{3}$. Кутовий коефіцієнт прямої A_2A_3 обчислимо за формулою: $k_{A_2A_3}=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=\frac{2-3}{3-5}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$.

Кут між прямими знаходимо за годинниковою стрілкою, користуючись формулою: $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}=\frac{11}{6}:\frac{1}{3}=\frac{11}{2}=5{,}5$. Тоді, користуючись чотиризначними таблицями маємо: $\varphi=78^\circ42'$.

г) Визначимо <u>площу трикутника $A_1A_2A_3$:</u>

$$S=\pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 6\\ 3 & 2\\ 5 & 3\\ 0 & 6\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}(0\cdot2+3\cdot3+5\cdot6-3\cdot6-5\cdot2-0\cdot6)=\frac{11}{2}=5{,}5\,кв.од.$$

д) <u>Відстань від точки A_4 *(2; 1)* до прямої A_1A_2, $4x+3y+18=0$</u>:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\cdot2+3\cdot1+18|}{\sqrt{16+9}}=\frac{29}{5}=5{,}8\,од.$$

Індивідуальне завдання

2.1. Дано координати вершин трикутника $\Delta A_1A_2A_3$ і точку A_4. Знайти:

а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;
в) тангенс кута A_2;
г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;
д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2;
е) побудувати рисунок в системі координат.
2.1.1. $A_1\ (1;\ 2);\ A_2\ (-3;\ 2);\ A_3\ (-5;-3);\ A_4\ (2;\ -1).$
2.1.2. $A_1\ (2;\ 1);\ A_2\ (-1;\ 2);\ A_3\ (-2;\ -3);\ A_4\ (1;\ -6).$
2.1.3. $A_1\ (2;\ 2);\ A_2\ (-2;\ 2);\ A_3\ (-3;\ -3);\ A_4\ (2;\ -4).$
2.1.4. $A_1\ (1;\ 1);\ A_2\ (-4;\ 2);\ A_3\ (-4;-3);\ A_4\ (2;\ -7).$
2.1.5. $A_1\ (1;\ 6);\ A_2\ (-3;-2);\ A_3\ (-5;\ 3);\ A_4\ (2;\ -1).$
2.1.6. $A_1\ (2;\ 6);\ A_2\ (-3;\ -1);\ A_3\ (-5;\ 2);\ A_4\ (1;\ -6).$
2.1.7. $A_1\ (3;\ 6);\ A_2\ (-2;\ -2);\ A_3\ (-5;\ 1);\ A_4\ (2;\ -3).$
2.1.8. $A_1\ (4;\ 6);\ A_2\ (-4;\ -2);\ A_3\ (-5;\ 4);\ A_4\ (2;\ -4).$
2.1.9. $A_1\ (6;\ 6);\ A_2\ (-3;\ -5);\ A_3\ (-2;\ 3);\ A_4\ (2;\ -7).$
2.1.10. $A_1\ (7;\ 6);\ A_2\ (-5;\ -2);\ A_3\ (-4;\ 3);\ A_4\ (2;\ -8).$
2.1.11. $A_1\ (0;\ 1);\ A_2\ (6;\ 3);\ A_3\ (-1;0);\ A_4\ (2;\ -1).$
2.1.12. $A_1\ (0;\ 6);\ A_2\ (1;\ -3);\ A_3\ (-2;\ 3);\ A_4\ (1;\ -6).$
2.1.13. $A_1\ (6;\ -2);\ A_2\ (-4;\ -1);\ A_3\ (0;\ -2);\ A_4\ (2;\ -4).$
2.1.14. $A_1\ (2;\ 2);\ A_2\ (-1;\ 7);\ A_3\ (1;4);\ A_4\ (2;\ -7).$
2.1.15. $A_1\ (1;\ 8);\ A_2\ (0;\ -3);\ A_3\ (-1;\ 5);\ A_4\ (2;\ -1).$
2.1.16. $A_1\ (-5;\ -1);\ A_2\ (-3;\ 0);\ A_3\ (1;\ -2);\ A_4\ (1;\ -6).$
2.1.17. $A_1\ (0;\ -2);\ A_2\ (-3;\ 6);\ A_3\ (5;\ 3);\ A_4\ (2;\ -3).$
2.1.18. $A_1\ (0;\ 5);\ A_2\ (11;\ -5);\ A_3\ (-1;\ -1);\ A_4\ (2;\ -4).$
2.1.19. $A_1\ (1;\ 0);\ A_2\ (6;\ 1);\ A_3\ (3;\ -2);\ A_4\ (2;\ -7).$
2.1.20. $A_1\ (-1;\ 4);\ A_2\ (11;\ 5);\ A_3\ (0;\ 1);\ A_4\ (2;\ -8).$
2.1.21. $A_1\ (4;\ 6);\ A_2\ (-6;\ 3);\ A_3\ (-2;\ 0);\ A_4\ (2;\ -1).$
2.1.22. $A_1\ (2;\ -1);\ A_2\ (5;\ 0);\ A_3\ (-2;\ -2);\ A_4\ (1;\ -6).$
2.1.23. $A_1\ (2;\ -1);\ A_2\ (5;\ 0);\ A_3\ (-2;\ -2);\ A_4\ (2;\ -4).$
2.1.24. $A_1\ (-4;\ 5);\ A_2\ (2;\ 0);\ A_3\ (-1;\ 2);\ A_4\ (2;\ -7).$
2.1.25. $A_1\ (3;\ 2);\ A_2\ (3;\ 5);\ A_3\ (1;\ -1);\ A_4\ (2;\ -1).$
2.1.26. $A_1\ (-3;\ 9);\ A_2\ (7;\ -2);\ A_3\ (3;\ 3);\ A_4\ (1;\ -6).$
2.1.27. $A_1\ (0;\ 1);\ A_2\ (6;\ 4);\ A_3\ (-1;\ 0);\ A_4\ (2;\ -3).$
2.1.28. $A_1\ (2;\ -4);\ A_2\ (4;\ -2);\ A_3\ (0;\ 2);\ A_4\ (2;\ -4).$
2.1.29. $A_1\ (1;\ 3);\ A_2\ (3;\ 2);\ A_3\ (5;\ 0);\ A_4\ (2;\ -7).$
2.1.30. $A_1\ (-1;\ -2);\ A_2\ (2;\ -1);\ A_3\ (0;\ -1);\ A_4\ (2;\ -8).$

2.2. Доведіть, що прямі паралельні і знайдіть відстань між ними:
2.2.1. $2x+5y-12=0$ та $2x+5y-12=0$.
2.2.2. $3x-4y-7=0$ та $-6x+8y-15=0$.
2.2.3. $2x-5y-11=0$ та $-6x+15y-17=0$.
2.2.4. $3x-7y-7=0$ та $12x-28y-25=0$.
2.2.5. $2x+5y-12=0$ та $2x+5y-14=0$.
2.2.6. $x-7y-32=0$ та $2x-14y+13=0$.
2.2.7. $3x-8y-27=0$ та $6x+16y+11=0$.
2.2.8. $3x+5y+5=0$ та $9x+15y-17=0$.

2.2.9. $2x-9y-37=0$ та $6x+27y-10=0$.
2.2.10. $3x-4y-18=0$ та $15x-20y-41=0$.
2.2.11. $x+6y-14=0$ та $4x+24y-23=0$.
2.2.12. $3x-7y-8=0$ та $9x-21y-16=0$.
2.2.13. $3x-5y-19=0$ та $6x-10y-21=0$.
2.2.14. $3x+4y+28=0$ та $-9x-12y-7=0$.
2.2.15. $4x-3y+7=0$ та $8x-6y-11=0$.
2.2.16. $5x-4y-48=0$ та $15x-12y-5=0$.
2.2.17. $5x+3y-43=0$ та $20x+15y+22=0$.
2.2.18. $7x-2y-15=0$ та $14x-4y-5=0$.
2.2.19. $3x-y-6=0$ та $5x-5y-32=0$.
2.2.20. $3x+7y+42=0$ та $12x+28y-61=0$.
2.2.21. $6x+7y+16=0$ та $12x+14y-21=0$.
2.2.22. $8x-5y+32=0$ та $16x-10y+32=0$.
2.2.23. $6x+11y+22=0$ та $18x+33y-43=0$.
2.2.24. $3x+10y+27=0$ та $9x+30y-11=0$.
2.2.25. $4x-7y+35=0$ та $12x-21y-62=0$.
2.2.26. $-3x+5y+4=0$ та $18x-30y-1=0$.
2.2.27. $2x+5y+12=0$ та $10x+25y-13=0$.
2.2.28. $4x-7y+35=0$ та $12x-21y-62=0$.
2.2.29. $5x+7y+35=0$ та $15x+21y-62=0$.
2.2.30. $-4x+3y+17=0$ та $12x-9y-22=0$.

2.3. Знайдіть площу трикутника, який відтинається від осей координат прямою:
2.3.1. $-4x+3y+12=0$. **2.3.2.** $4x+5y-40=0$. **2.3.3.** $5x+7y+35=0$.
2.3.4. $2x+5y+10=0$ **2.3.5.** $-3x+5y+30=0$ **2.3.6.** $4x-7y+28=0$
2.3.7. $9x+30y-90=0$ **2.3.8.** $6x+7y+21=0$ **2.3.9.** $5x-5y-30=0$
2.3.10. $3x-4y-24=0$. **2.3.11.** $2x+5y-12=0$. **2.3.12.** $2x+5y-12=0$.
2.3.13. $-6x+8y-15=0$. **2.3.14.** $2x-5y-11=0$. **2.3.15.** $3x-7y-42=0$.
2.3.16. $2x+5y-12=0$. **2.3.17.** $x-7y-70=0$. **2.3.18.** $3x-8y-24=0$.
2.3.19. $10x+5y+5=0$. **2.3.20.** $9x+15y-90=0$. **2.3.21.** $3x-4y-18=0$.
2.3.22. $2x-9y-36=0$. **2.3.23.** $x+6y-12=0$. **2.3.24.** $4x+24y-24=0$.
2.3.25. $3x-6y-60=0$. **2.3.26.** $9x-21y-63=0$. **2.3.27.** $6x-10y-21=0$.
2.3.28. $15x-12y-45=0$. **2.3.29.** $9x-12y-36=0$. **2.3.30.** $8x-6y-24=0$.

2.4. Визначте, при яких значеннях m і n прямі:
а) паралельні; б) збігаються; в) перпендикулярні;
2.4.1. $mx+6y+n=0$ та $3x+my-2=0$.
2.4.2. $mx+7y+n=0$ та $2x+my-5=0$.
2.4.3. $(m+1)x+5y+2n=0$ та $3x+my-4=0$.

2.4.4. $(m-2)x+3y+n+2=0$ та $x+my-2=0$.
2.4.5. $(m+4)x+2y+n-1=0$ та $2x+my-6=0$.
2.4.6. $(m-4)x-y+n-2=0$ та $3x+my-5=0$.
2.4.7. $(m+2)x+4y+n-3=0$ та $3x+my+4=0$.
2.4.8. $(m+5)x+4y+n+1=0$ та $x+2my-3=0$.
2.4.9. $mx+3y+n-3=0$ та $3x+(m+1)y-n=0$.
2.4.10. $(m-2)x+5y+n-4=0$ та $x+(m+1)y-6n=0$.
2.4.11. $(m-3)x+y+n-4=0$ та $x+(m+1)y-6n=0$.
2.4.12. $(m+3)x+2y+n-5=0$ та $2x+(m+2)y-4n=0$.
2.4.13. $(m-1)x+y+n+2=0$ та $x+(m-1)y-2n=0$.
2.4.14. $(m-2)x+3y+n-3=0$ та $x+(m+1)y+2n=0$.
2.4.15. $(m+3)x+2y+2n-1=0$ та $x-my-6+n=0$.
2.4.16. $(m-1)x+4y+3n-4=0$ та $x-(m+2)y-n=0$.
2.4.17. $(m-3)x+y+n-4=0$ та $x-(m+1)y-6n=0$.
2.4.18. $(m-5)x+2y+2n-3=0$ та $x-(m+2)y-n-1=0$.
2.4.19. $(m+2)x+y-n-4=0$ та $x-(m+1)y+2n=0$.
2.4.20. $(m+1)x+y+n-3=0$ та $x-(m-1)y-3n=0$.
2.4.21. $(m-6)x-y+n-2=0$ та $x+(m+2)y-n-1=0$.
2.4.22. $mx+2y+3n-2=0$ та $x-(m+4)y-2n=0$.
2.4.23. $mx+y+2n-5=0$ та $x+(m+2)y+n=0$.
2.4.24. $(m-1)x-y+2n-1=0$ та $2x-my-n+1=0$.
2.4.25. $(2m-1)x+y-n-3=0$ та $x-(m+1)y-n=0$.
2.4.26. $mx+y+3n-1=0$ та $x-(m-1)y-n-1=0$.
2.4.27. $(m-3)x-y+2n-4=0$ та $x+my-n+1=0$.
2.4.28. $mx+2y+n-2=0$ та $x+(m+2)y+2n-1=0$.
2.4.29. $(m-1)x+2y+n=0$ та $x-(m-1)y-n-2=0$.
2.4.30. $mx+3y+2n-1=0$ та $x+(m+3)y+n=0$.

2.2. Пряма і площина в просторі.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Дано координати A_1 *(2; 3; –4)*; A_2 *(5; 7; 9)*; A_3 *(2;– 2; 4)*; A_4 *(13; 1; 2)* вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти: а) довжину ребра A_1A_2; б) рівняння ребер A_1A_2 і A_1A_4; в) косинус кута $A_4A_1A_2$; г) площу грані $A_1A_2A_3$; д) рівняння площини $A_1A_2A_3$; е) об'єм піраміди.

Розв'язання:

а) Довжину ребра A_1A_2 обчислимо за формулою:

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ \text{, тобто}$$

$$A_1A_2=\sqrt{(5-2)^2+(3-7)^2+(-4-9)^2}=\sqrt{9+16+169}=\sqrt{194}\approx 14\textit{од}.$$

б) Рівняння ребер A_1A_2 і A_1A_4 запишемо, користуючись формулою:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. За умовою *A₁ (2; 3; –4); A₂ (5; 7; 9); A₄ (13; 1; 2)*, тоді

Для прямої A_1A_2: $\frac{x-2}{5-2}=\frac{y-3}{7-3}=\frac{z-(-4)}{9-(-4)}\Rightarrow\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{13}$.

Для прямої A_1A_4: $\frac{x-2}{13-2}=\frac{y-3}{1-3}=\frac{z-(-4)}{2-(-4)}\Rightarrow\frac{x-2}{11}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{6}$.

в) Косинус кута $A_4A_1A_2$: $\cos A=\frac{a_x в_x+a_y в_y+a_z в_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{в_x^2+в_y^2+в_z^2}}$.

Враховуючи, що рівняння прямої можна подати у вигляді:

$\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}$, то для прямої A_1A_2 $\vec{a}$ *(3; 4; 13)*, а для A_1A_4 $\vec{в}$ *(11; –2; 6)*.

Тоді $\cos A=\frac{3\cdot11+4\cdot(-2)+13\cdot6}{\sqrt{3^2+4^2+13^2}\sqrt{11^2+(-2)^2+6^2}}=\frac{103}{\sqrt{194}\cdot\sqrt{161}}\approx0{,}5829$.

Отже, $\angle A=\arccos 0{,}5829=53^{\circ}30'$.

г) Площу грані $A_1A_2A_3$ обчислимо, користуючись властивістю добутку векторів A_1A_2 і A_1A_3: $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right|$, де $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\cdot\vec{i}+$

$+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=\begin{vmatrix}4 & 13\\ -5 & 8\end{vmatrix}\cdot\vec{i}+\begin{vmatrix}3 & 13\\ 0 & 8\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & 5\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$

$=(32+65)\vec{i}+(24-0)\vec{j}+(-15-0)\vec{k}=97\vec{i}+(-24)\vec{j}+(-15)\vec{k}$.

Тоді: $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{97^2+(-24)^2+(-15)^2}=\sqrt{10210}$.

Отже, $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10210}\approx50$*кв.од.*

д) Рівняння площини $A_1A_2A_3$ у загальному вигляді:

$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$, тобто $\begin{vmatrix}x-2 & y-3 & z+4\\ 5-2 & 7-3 & 9+4\\ 2-2 & -2-3 & 4+4\end{vmatrix}=0$;

$32(x-2)-15(z+4)-24(y-3)+65(x-2)=0\Rightarrow97x-24y-15z-182=0$.

е) Об'єм піраміди:

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3 & 4 & 13\\ 0 & -5 & 8\\ 11 & -2 & 6\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{6}(-90+352+715+48)=$$

$=170\frac{5}{6}$*куб.од.*

Індивідуальне завдання

2.5. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3\ A_4$. Знайти:

а) довжину ребра A_1A_2;

б) рівняння ребер A_1A_2 і A_1A_3;

в) косинус кута $A_3A_1A_2$;

г) площу грані $A_1A_2A_3$;

д) рівняння площини $A_1A_2A_3$;

е) об'єм піраміди.

2.5.1. $A_1\ (1;\ 2;\ 1);\ A_2\ (-3;\ 2;\ -2);\ A_3\ (-5;-\ 3;\ 3);\ A_4\ (0;\ 2;\ -1)$.

2.5.2. $A_1\ (3;\ 2;\ 1);\ A_2\ (-3;\ -1;\ 2);\ A_3\ (-5;\ -2;\ -3);\ A_4\ (0;\ 1;\ -6)$.

2.5.3. $A_1\ (2;\ 1;\ 2);\ A_2\ (-3;\ -2;\ 2);\ A_3\ (-3;\ -5;\ -3);\ A_4\ (0;\ 2;\ -4)$.

2.5.4. $A_1\ (1;\ 1;\ 3);\ A_2\ (-4;\ -3;\ \ 2);\ A_3\ (-4;-\ 3;\ -5);\ A_4\ (0;\ 2;\ -7)$.

2.5.5. $A_1\ (1;\ 2;\ 6);\ A_2\ (-3;\ -3;\ -2);\ A_3\ (-5;\ -5;\ 3);\ A_4\ (0;\ 2;\ -1)$.

2.5.6. $A_1\ (2;\ 4;\ 6);\ A_2\ (-3;\ -3;\ -1);\ A_3\ (-5;\ -5;\ 2);\ A_4\ (0;\ 1;\ -6)$.

2.5.7. $A_1\ (4;\ 3;\ 6);\ A_2\ (-2;\ -3;\ -2);\ A_3\ (-5;\ -5;\ 1);\ A_4\ (0;\ 2;\ -3)$.

2.5.8. $A_1\ (5;\ 4;\ 6);\ A_2\ (-4;\ -3;\ -2);\ A_3\ (-5;\ -5;\ 4);\ A_4\ (0;\ 2;\ -4)$.

2.5.9. $A_1\ (1;\ 6;\ 6);\ A_2\ (-3;\ -3;\ -5);\ A_3\ (-2;\ -5;\ 3);\ A_4\ (0;\ 2;\ -7)$.

2.5.10. $A_1\ (1;\ 7;\ 6);\ A_2\ (-5;\ -3;\ -2);\ A_3\ (-4;\ -5;\ 3);\ A_4\ (0;\ 2;\ -8)$.

2.5.11. $A_1\ (1;\ 2;\ 1);\ A_2\ (1;\ 6;\ 6);\ A_3\ (-5;-\ 3;\ 3);\ A_4\ (0;\ 2;\ -1)$.

2.5.12. $A_1\ (1;\ 6;\ -6);\ A_2\ (-3;\ -1;\ 2);\ A_3\ (-5;\ -2;\ -3);\ A_4\ (-5;-\ 3;\ 3)$.

2.5.13. $A_1\ (2;\ 1;\ 2);\ A_2\ (3;\ -2;\ 2);\ A_3\ (-3;\ -5;\ 3);\ A_4\ (0;\ 2;\ -4)$.

2.5.14. $A_1\ (1;\ 0;\ 2);\ A_2\ (0;\ 1;\ \ 2);\ A_3\ (-1;-4;\ 12);\ A_4\ (0;\ 2;\ -7)$.

2.5.15. $A_1\ (-4;\ -9;\ 0);\ A_2\ (6;\ 9;\ -1);\ A_3\ (2;\ -3;\ 1);\ A_4\ (0;\ 2;\ -1)$.

2.5.16. $A_1\ (-1;\ 1;\ 3);\ A_2\ (3;\ 2;\ -6);\ A_3\ (1;\ 2;\ 0);\ A_4\ (0;\ 1;\ -6)$.

2.5.17. $A_1\ (1;\ 2;\ 1);\ A_2\ (-2;\ 1;\ -4);\ A_3\ (-4;\ 3;\ 2);\ A_4\ (0;\ 2;\ -3)$.

2.5.18. $A_1\ (-1;\ 4;\ 12);\ A_2\ (0;\ -5;\ 1);\ A_3\ (0;\ 1;\ -1);\ A_4\ (0;\ -1;\ 1)$.

2.5.19. $A_1\ (3;\ -4;\ -1);\ A_2\ (-2;\ 5;\ -1);\ A_3\ (0;\ 4;\ 6);\ A_4\ (0;\ 1;\ -2)$.

2.5.20. $A_1\ (0;\ -2;\ 1);\ A_2\ (13;\ -3;\ -4);\ A_3\ (-10;\ 2;\ 5);\ A_4\ (2;\ -2;\ 1)$.

2.5.21. $A_1\ (1;\ -2;\ 1);\ A_2\ (1;\ 2;\ 5);\ A_3\ (-5;\ 3;\ -3);\ A_4\ (0;\ 1;\ -1)$.

2.5.22. $A_1\ (1;\ 6;\ -3);\ A_2\ (3;\ -1;\ 0);\ A_3\ (-5;\ -2;\ -3);\ A_4\ (-5;-\ 1;\ 3)$.

2.5.23. $A_1\ (2;\ 1;\ 0);\ A_2\ (5;\ 2;\ 2);\ A_3\ (-3;\ 5;\ 3);\ A_4\ (0;\ 1;\ -4)$.

2.5.24. $A_1\ (1;\ 0;\ -2);\ A_2\ (0;\ 1;\ \ -);\ A_3\ (-1;4;\ 2);\ A_4\ (0;\ 1;\ -7)$.

2.5.25. $A_1\ (-4;\ 9;\ 0);\ A_2\ (6;\ 1;\ -1);\ A_3\ (2;\ 3;\ 1);\ A_4\ (0;\ 1;\ -1)$.

2.5.26. $A_1\ (-1;\ 0;\ 3);\ A_2\ (3;\ 2;\ 0);\ A_3\ (1;\ -2;\ 0);\ A_4\ (0;\ 1;\ -6)$.

2.5.27. $A_1\ (1;\ 0;\ 1);\ A_2\ (2;\ 1;\ -4);\ A_3\ (-4;\ 3;\ 2);\ A_4\ (0;\ 1;\ -3)$.

2.5.28. $A_1\ (1;\ 4;\ 12);\ A_2\ (0;\ 5;\ 1);\ A_3\ (0;\ 1;\ -1);\ A_4\ (0;\ -1;\ 1)$.

2.5.29. $A_1\ (3;\ 4;\ -1);\ A_2\ (-2;\ 5;\ 1);\ A_3\ (0;\ 4;\ 0);\ A_4\ (0;\ 1;\ -2)$.

2.5.30. $A_1\ (0;\ 2;\ 1);\ A_2\ (3;\ -3;\ 4);\ A_3\ (-10;\ 2;\ 5);\ A_4\ (2;\ -1;\ 1)$.

2.6. Обчисліть об'єм піраміди, обмеженою заданою площиною і координатними площинами. Побудуйте рисунок.

2.6.1. $4x-3y+12z-60=0$.

2.6.2. $-5x-3y+12z-60=0$.

2.6.3. $5x-4y+3z+120=0$.

2.6.4. $2x-3y+z-18=0$.

2.6.5. $4x-5y+2z+20=0$.

2.6.6. $3x+4y+6z+24=0$.

2.6.7. $2x-5y+5z+20=0$.

2.6.8. $x-3y+4z-12=0$.

2.6.9. $2x-5y+8z+40=0$.

2.6.10. $2x-6y+4z-12=0$.

2.6.11. $4x-3y+12z-24=0$.

2.6.12. $-5x-3y+12z+120=0$.

2.6.13. $5x-y+3z+45=0$.

2.6.14. $2x-3y+z-6=0$.

2.6.15. $4x-5y+2z-40=0$.

2.6.16. $3x+4y+z+24=0$.

2.6.17. $2x-5y+5z-40=0$.

2.6.18. $x-3y+4z+48=0$.

2.6.19. $2x-5y+8z+80=0$.

2.6.20. $2x-6y+4z-48=0$.

2.6.21. $4x+3y+2z-24=0$.

2.6.22. $-x-3y+2z-6=0$.

2.6.23. $x-4y+3z+120=0$.

2.6.24. $2x-3y+9z-18=0$.

2.6.25. $4x-5y+2z+80=0$.

2.6.26. $3x+4y-z+24=0$.

2.6.27. $2x-y+5z+20=0$.

2.6.28. $x-3y+z-12=0$.

2.6.29. $2x-y+8z+40=0$.

2.6.30. $2x-y+4z-12=0$.

2.3. Криві лінії другого порядку.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1 : Визначити центр і радіус кола, яке задано рівнянням: $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

Розв'язання:

Так як в заданому рівнянні коефіцієнт при x^2 та y^2 рівні між собою і відсутній член з добутком координат, то задане рівн6яння є рівнянням кола. Зведемо його до вигляду: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, виділивши повний квадрат: $(x-1)^2-1+(y+2)^2-4-20=0$, звідси $(x-1)^2+(y+2)^2=25$.

Можна зробити висновок, що задане рівняння визначає коло, цент якого має координати *C (1; –2)* і радіусом *5 од*.

П р и к л а д 2 : Знайти довжину осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса $4x^2+9y^2=144$.

Розв'язання:

Приведемо це рівняння до канонічного виду: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$.

Розділивши обидві частини заданого рівняння на 144, одержимо: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

Звідки одержуємо, що $a=6$, $в=4$. Тоді $c=\sqrt{a^2-в^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Координати фокусів будуть *F_1 ($2\sqrt{5}$; 0)* і *F_2 ($-2\sqrt{5}$; 0)*.

Ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

П р и к л а д 3 : Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі *Ox*, що проходить через точку *M (1; –4)* і початок координат.

Розв'язання:

Канонічне рівняння параболи, симетрична відносно осі *Ox*, вершина якої знаходиться в початку координат є $y^2=2px$. Так як парабола проходить через точку *M (1; –4)*, то координати точки М повинні задовольняти рівняння $y^2 = 2px$, тобто $(-4)^2 = 2p \cdot 1 \Rightarrow p = 8$. Звідси $y^2 = 16x$.

П р и к л а д 4 : Скласти рівняння гіперболи, в якої ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$, а уявна вісь $в = 3$. Знайти асимптоти та директриси гіперболи.

Розв'язання:

Оскільки ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$, то $c = a\varepsilon = \frac{5}{4}a$, і тому з рівності $c^2 = a^2 + в^2$ отримаємо $\left(\frac{5}{4}a\right)^2 = a^2 + 3^2 \Rightarrow a = 4$.

Отже, шукане рівняння гіперболи є таким: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Асимптотами цієї гіперболи є прямі $y = \frac{3}{4}x$, а директрисами – $x = \pm\frac{4}{\frac{5}{4}} = \pm\frac{16}{5}$.

Індивідуальне завдання

2.7. Задано рівняння кривої другого порядку.

а) визначити за рівнянням вид кривої;

б) у випадку еліпса знайти вершини півосей, координати фокусів, ексцентриситет, скласти рівняння директрис;

в) у випадку гіперболи знайти вершини півосей, координати фокусів, ексцентриситет, скласти рівняння директрис та асимптот;

г) у випадку параболи знайдіть значення параметра координати фокуса, скласти рівняння директриси;

д) виконайте креслення кривої з вказаними фокусами, директрисами, асимптотами (за наявністю).

2.7.1. $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

2.7.2. $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$.

2.7.3. $16x^2 - 25y^2 - 400 = 0$.

2.7.4. $-16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

2.7.5. $x^2 + 10y - 10 = 0$.

2.7.6. $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$.

2.7.7. $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

2.7.8. $-4x + y^2 - 4 = 0$.

2.7.9. $16x^2 - 36y^2 - 576 = 0$.

2.7.10. $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$.

2.7.11. $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$.

2.7.12. $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$.

2.7.13. $9x^2 - 36y^2 + 324 = 0$.

2.7.14. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

2.7.15. $5x^2 + 4y^2 - 20 = 0$.

2.7.16. $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$.

2.7.17. $8x + y^2 - 16 = 0$.

2.7.18. $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$.

2.7.19. $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$.

2.7.20. $25x^2 - 36y^2 - 900 = 0$.

2.7.21. $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$.

2.7.22. $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$.

2.7.23. $x^2 - 12y - 24 = 0$.

2.7.24. $36x^2 + 16y^2 - 576 = 0$.

2.7.25. $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$.

2.7.26. $5x^2 - 4y^2 + 20 = 0$.

2.7.27. $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$.

2.7.28. $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$.

2.7.29. $36x^2 + 25y^2 - 900 = 0$.

2.7.30. $25x^2 - 36y^2 + 900 = 0$.

2.8. Встановіть, яку лінію визначає рівняння та побудуйте її графік:

2.8.1. $y = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

2.8.2. $y = 2 - \frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}$.

2.8.3. $y = 1 - \frac{2}{5}\sqrt{25 - x^2}$.

2.8.4. $y = -2 - \frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$.

2.8.5. $x = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$.

2.8.6. $x = 2 - \frac{5}{4}\sqrt{16 - y^2}$.

2.8.7. $x = 3 + \frac{7}{2}\sqrt{4 - y^2}$.

2.8.8. $x = 3 - \frac{3}{7}\sqrt{49 - y^2}$.

2.8.9. $y = -1 + \frac{3}{4}\sqrt{16 + x^2}$.

2.8.10. $y = 2 - \frac{3}{5}\sqrt{25 + x^2}$.

2.8.11. $y = \frac{5}{6}\sqrt{37 + x^2 + 2x}$.

2.8.12. $y = -\frac{5}{6}\sqrt{29 + x^2 + 4x}$.

2.8.13. $y = \frac{4}{7}\sqrt{50 + x^2 - 2x}$.

2.8.14. $y = -\frac{4}{7}\sqrt{20 + x^2 - x}$.

2.8.15. $y + 1 = \frac{4}{9}\sqrt{81 + x^2}$.

2.8.16. $y - 2 = -\frac{9}{5}\sqrt{25 + x^2}$.

2.8.17. $x = \frac{7}{2}\sqrt{5 - 2y + y^2}$.

2.8.18. $x = -\frac{3}{7}\sqrt{53 + 4y + y^2}$.

2.8.19. $x = \frac{7}{4}\sqrt{25 + 6y + y^2}$.

2.8.20. $x = \frac{8}{3}\sqrt{25 - 16y + y^2}$.

2.8.21. $x = 3 + \frac{7}{2}\sqrt{4 - y^2}$.

2.8.22. $x + 1 = -\frac{4}{3}\sqrt{9 + y^2}$.

2.8.23. $y = 1 - 3\sqrt{1 - x^2}$.

2.8.24. $x + 3 = -2\sqrt{4 - y^2}$.

2.8.25. $y - 1 = \frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$.

2.8.26. $y = -\frac{3}{5}\sqrt{24 - 2x - x^2}$.

2.8.27. $x - 2 = \frac{9}{7}\sqrt{49 + y^2}$.

2.8.28. $x + 1 = -\frac{7}{9}\sqrt{81 + y^2}$.

2.8.29. $x = -\frac{7}{9}\sqrt{80 - 2y - y^2}$.

2.8.30. $y = \frac{2}{5}\sqrt{26 + 2x + x^2}$.

ЗМІСТ

Список рекомендованої літератури

1. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. − Біла Церква. – 2005 – 280 с.

2. Мельниченко О.П. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. / О.П. Мельниченко − Біла Церква.– 2011.− с.

3. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. / Р.Л. Шевченко, О.П. Мельниченко, В.А. Непочатенко − Біла Церква. – 2015 – 280 с.

2. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика, ч. І. − К., 2001.

3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. − М.: Физ-матгиз, 1959.

4. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. − М.: Физ-матгиз, 1963.

5. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. − К., 1999.

6. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. − М.: Физ-матгиз, 1972.

7. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. − М.: Наука, 1986.

Навчальне видання
Вища математика
Збірник завдань для виконання індивідуальних та самостійних робіт для студентів 1 курсу денної форми навчання економічних спеціальностей
Частина 1.

Мельниченко Олена Петрівна

Редактор
Комп'ютерна верстка

Здано до складання 20.06.2017. Підписано до друку
Формат Умовних аркушів Тираж 100. Зам. РВУКВ, Оперативний сектор поліграфії БНАУ 09117, Біла Церква, Соборна пл., 8, тел. 33-11-01.