

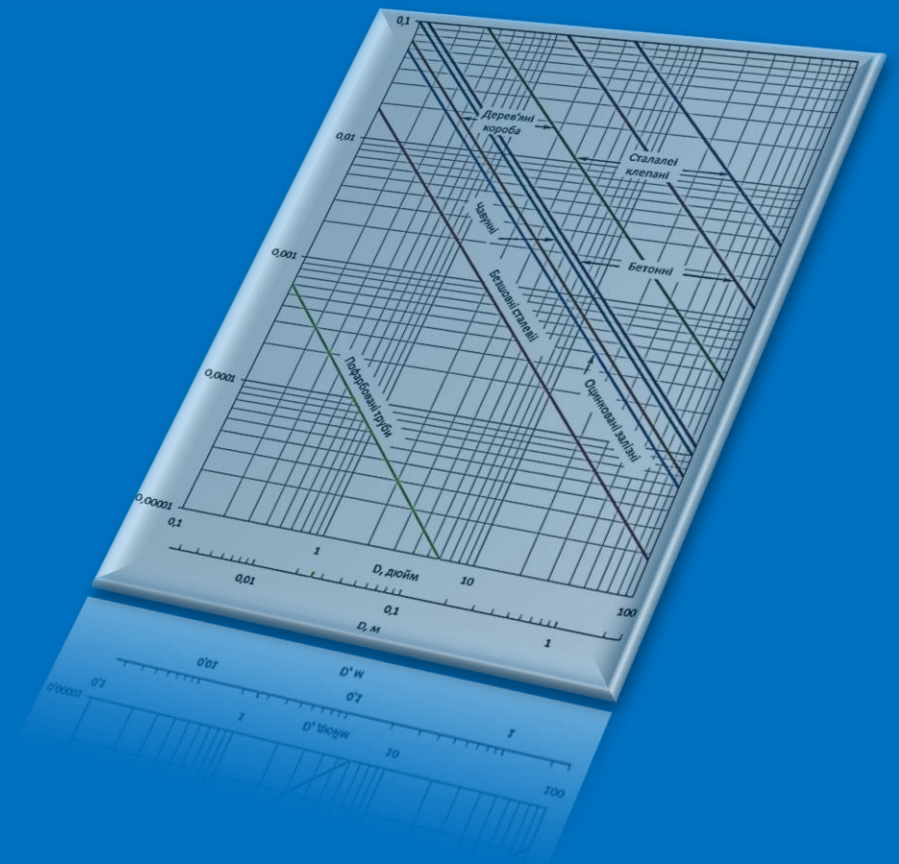
В.Г. Федоров

Н.С. Мамелюк

О.І. Кепко

О.С. Пушка

# Гідравліка і гідропривод



Міністерство освіти і науки України  
Уманський національний університет садівництва

В.Г. Федоров, Н.С. Мамелюк, О.І. Кепко, О.С. Пушка

# Гідравліка і гідропривод

ДОВІДНИК

для студентів спеціальності  
«Агроінженерія»

*За редакцією д-ра техн. наук, проф. В.Г. Федорова*

*Рекомендовано Вченою радою Уманського НУС*

Умань

Видавничо-поліграфічний центр «Візаві»

2017

УДК 532, 533  
ББК 22.253  
Ф 33

Рекомендовано Вченою радою уманського національного університету садівництва, як довідник для студентів технічних та технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів  
(Протокол № 8 від 28.03.2017 року)

**Рецензенти:** *Гритченко А.Г.* Доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри професійної освіти та технологій за профілями Уманського державного педагогічного університету ім. Павла Тичини.  
*Ковалишин С.Й.* Кандидат технічних наук, доцент, декан факультету механіки та енергетики Львівського національного аграрного університету  
*Войтік А.В.* Кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри процесів, машин та обладнання АПВ Уманського НУС

### **Федоров В.Г.**

Ф 33 Гідравліка і гідропривод: довідник / В.Г. Федоров, Н.С. Мамелюк, О.І. Кепко, О.С. Пушка; за ред. В.Г.Федорова. Умань: Видавничо-поліграфічний центр «Візаві», 2017. – 135 с.

ISBN 978-966-304-212-1

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальністю 208 – «Агроінженерія», Може бути корисним для фахівців виробничих, науково-дослідних і конструкторських установ.

УДК 532, 533  
ББК 22.253

ISBN 978-966-304-212-1

© Федоров В.Г., 2017  
© Мамелюк Н.С., 2017  
© Кепко О.І., 2017  
© Пушка О.С., 2017

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА .....	4
УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН ТА ЇХ ОДИНИЦІ ВИМІРУ .....	5
ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ .....	7
РОЗДІЛ 1. ХАРАКТЕРНІ ДЛЯ РУХУ ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИНИ. ОСНОВНІ ПОСТУЛАТИ ГІДРАВЛІКИ.....	11
РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ ГІДРОСТАТИКИ. ЗАКОН ПАСКАЛЯ. РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА. СПОЛУЧЕНІ ПОСУДИНИ.....	21
РОЗДІЛ 3. ГІДРОСТАТИЧНИЙ ТИСК НА ПЛОСКІ І КРИВОЛІНІЙНІ СТІНКИ. РІВНОВАГА РІДИНИ ЗА НАЯВНОСТІ НЕГРАВІТАЦІЙНИХ МАСОВИХ СИЛ.....	30
РОЗДІЛ 4. ПЛАВУЧІСТЬ. ЗАКОН АРХІМЕДА. ОСТІЙНІСТЬ. КАПЛЯРНІ ПОВЕРХНЕВІ СИЛИ .....	39
РОЗДІЛ 5. ГІДРОДИНАМІКА. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ .....	49
РОЗДІЛ 6. ТЕОРІЯ ПОДІБНОСТІ. РЕЖИМИ РУХУ РІДИН. МОДЕЛЮВАННЯ. КАВІТАЦІЯ. ....	62
РОЗДІЛ 7. В'ЯЗКІ ТЕЧІЇ В ТРУБАХ. РОЗРАХУНОК ОПОРІВ, ШВИДКОСТІ ТА ВИТРАТ РІДИНИ В ТРУБОПРОВОДАХ.....	77
РОЗДІЛ 8. РОЗРАХУНОК НАПІРНИХ ТРУБОПРОВОДІВ, ШОРСТКОСТІ, МІСЦЕВИХ ВТРАТ НАПОРУ ТА МЕРЕЖ. ВИТРАТОМІРИ.....	89
РОЗДІЛ 9. ГІДРАВЛІЧНИЙ УДАР. ВИТІКАННЯ РІДИНИ З ОТВОРІВ ТА НАСАДОК. ВІЛЬНІ СТРУМЕНІ.....	104
РОЗДІЛ 10. ГІДРАВЛІЧНІ МАШИНИ ТА ГІДРОПРИВОДИ.....	116
ЛІТЕРАТУРА.....	134

## ПЕРЕДМОВА

Гідравліка (технічна гідромеханіка) вивчає закони та поведінку сконденсованих рідин в стані спокою або в русі. Структура та взаємодія потоків рідини із стінками каналів, трубопроводів, апаратів, машин в значній мірі визначає ефективність цих машин, агрегатів та споруд. Це стосується систем сільськогосподарського водопостачання, меліорації, гідротранспорту, гідравлічних машин (насосів, гідродвигунів) та гідроприводу. Таким чином, гідравліка є базовою дисципліною з підготовки спеціалістів в галузі проектування, виготовлення чи будівництва та експлуатації цих апаратів та споруд.

Разом із складовими курсу теплотехніки, технічної термодинаміки та тепломасообміну, гідравліка утворює теоретичні основи теплотехніки – науки, що у прикладному відношенні поділяється на теплоенергетику (вироблення теплової енергії) та теплотехнологію (використання теплової енергії). Таким чином гідравліка є базовою дисципліною також у підготовці спеціалістів із техніки та енергетики агропромислового виробництва.

Вивчення курсу гідравліки ґрунтується на знаннях, одержаних в результаті вивчення вищої математики з елементами математичної фізики, загальної фізики, теоретичної механіки, а також першої частини теоретичних основ теплотехніки – технічної термодинаміки.

Разом з аеродинамікою гідравліка складає гідрогазодинаміку – розділ класичної механіки – науки про рух будь-яких матеріальних тіл за винятком елементарних частинок.

## УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН ТА ЇХ ОДИНИЦІ ВИМІРУ

$\eta$  – коефіцієнт корисної дії, ККД;

$\gamma$  – питома вага рідини;

$v$  – швидкість частинки;

$\Delta z$  – відстань по вертикалі між точками;

$v_{вих}$  та  $v_{вх}$  – швидкість рідини на виході та вході в насос;

$\eta_2$  – гідравлічний ККД;

$\eta_{м.гм}$  – механічний ККД гідромотора;

$\eta_{о.гм}$ ,  $\eta_{гм}$  – об'ємний ККД гідромотора;

$\Delta p_{гм}$  – перепад тиску в гідромоторі;

$F$  – тангенціальна (дотична) сила, Н.

$G$  – вага ( $G = m \cdot g$ ), Н.

$g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – прискорення вільного падіння.

$h$  – питома ентальпія, Дж/кг.

$j$  – густина потоку маси,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ .

$m$  – маса речовини, кг.

$N$  – потужність, що споживається насосом;

$n$  – частота обертання робочого колеса;

$N_k$  – корисна потужність, що передається рідині;

$Q$  – об'ємна подача,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;

$q$  – поверхнева густина теплового потоку,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ .

$Q$  – теплота, Дж.

$Q_i$  – ідеальна подача насоса;

$r$  – питома теплота фазового перетворення, Дж/кг.

$s$  – питома ентропія, Дж/(кг·К).

$t$ ,  $T$  – температура, відповідно °С, К.

$\nu$  – в'язкість кінематична ( $\nu = \mu/\rho$ ), м<sup>2</sup>/с.

$V$  – об'єм, м<sup>3</sup>.

$V_0$  – робочий об'єм насосу;

$\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м<sup>2</sup>·К).

$\beta$  – температурний коефіцієнт об'ємного розширення, К<sup>-1</sup>.

$\gamma$  – питома вага  $G$  одиниці об'єму  $V$  речовини, Н/м<sup>3</sup>

$\theta$  – кут змочування, рад.

$\lambda$  – теплопровідність, Вт/(м·К).

$\mu$  – динамічна в'язкість, (або просто в'язкість) Па·с  $\left( \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \right)$ .

$\rho$  – густина, кг/м<sup>3</sup>.

$\sigma$  – поверхневий натяг, Дж/м<sup>2</sup> (Н/м).

$\nu$  – питомий об'єм, м<sup>3</sup>/кг.

$\varphi$  – текучість (плинність),  $\frac{\text{м}^2}{\text{Н} \cdot \text{с}}$ .

$\omega$  – кутова швидкість вала, 1/рад;

$a$  – температуропровідність, м<sup>2</sup>/с.

$e$  – енергія одиниці кожної частинки маси системи,

$c$  – теплоємність масова, Дж/(кг·К).

$c^{\text{в}}$  – теплоємність об'ємна, Дж/(м<sup>3</sup>·К).

## ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

### Вступ. Мета і задачі, основні поняття гідравліки

Гідравліка це прикладна наука про рівновагу та рух сконденсованих рідин. Як будь-який розділ механіки, гідравліка поділяється на 1) статику – вчення про рівновагу тіл під дією сил, 2) кінематику - вчення про геометричні властивості руху тіл, та 3) динаміку – вчення про рух тіл під дієюзовнішніх сил.

Зрозуміло, що перші два підрозділи є допоміжними під час вивчення останнього. В цьому курсі питання кінематики розглядаються в розділі гідродинаміки.

Гідравліка вивчає закони руху так званих ньютонівських рідин. Для них напруги, що викликаються опором рідини (в'язкістю), є пропорційними швидкостям деформації, тобто зміни відстані між окремими частинками потоку. Для неньютонівських рідин ця залежність є значно складнішою, закони руху для них вивчає реологія.

Процеси перенесення рідини в даному курсі розглядаються не як взаємодія елементарних частинок речовини, а як зміна тих чи інших їх усереднених параметрів, а сама речовина – як континуум, тобто простір, заповнений не окремими частинками, але суцільною масою. Такий підхід зветься феноменологічним (від грецького *phenomenon* – «те, що з'являється» та *logos* - вчення), тобто таким, що має справу з наявними результатами кожного процесу. Він був запропонований австрійським фізиком та філософом Е. Махом більше як сто років тому і досі є дуже плідним у різних галузях знання, включно із технічною термодинамікою та тепломасообміном.

Інший підхід до вивчення процесів гідравліки використовує інформацію щодо мікроскопічної будови рідини, тобто окремих молекул,



атомів, іонів тощо, то взаємодії між ними. Велика кількість цих частинок (наприклад діаметр молекул води становить приблизно  $3 \cdot 10^{-8}$  см) дозволяє застосовувати статистичні закономірності у поведінці цих частинок, і тому такий підхід має назву статистичний метод. Статистичний підхід дозволяє у принципі, а інколи і фактично за допомогою методів теорії ймовірності обчислити параметри руху континуума, якщо відомими є сили взаємодії між окремими частинками. Методи теорії ймовірності є невід'ємною частиною також феноменологічного підходу, але цього разу вони використовуються для з'ясування ступеня вірогідності отриманих у дослідях результатів та встановлення зв'язків між ними.

На відміну від інших частин курсу теплотехніки, в курсі гідравліки розглядається тільки механічна взаємодія потоків між собою та із стінками каналів, іншими словами – ці потоки вважаються ізотермічними. Насправді різкої границі між цими дисциплінами провести неможливо, наприклад, у зв'язку із так званою *дисипацією* (від лат. *dissipation* - розсіювання) механічної енергії. Потік рідини належить до *дисипативних систем*, коли енергія впорядкованого процесу переходить в енергію неупорядкованого процесу, а у кінцевому рахунку – в енергію теплового (хаотичного) руху молекул. Цього разу частина повної механічної енергії потоку, що витрачається на подолання опору тертя, переходить у внутрішню енергію речовини, а це викликає зміну її температури.

Вважається, що гідравліка це прикладна наука про рівновагу та рух сконденсованих рідин, але наближені методи гідравліки використовуються також під час розрахунків каналів, в яких транспортуються гази. Відповідний розділ гідрогазодинаміки видатний український вчений І.Л. Повх назвав «газовою гідравлікою».

## **Розвиток гідравліки як науки**

Гідравліка пройшла довгий та тривалий час розвитку. З найдавніших часів людство намагалося використовувати сили природи для своїх потреб. Першими двигунами були не теплові, а водяні і вітрові, оскільки на той час люди ще не користувалися вогнем. Поступово накопичувалися окремі спостереження, відкривалися закономірності руху рідини, які узагальнювалися та перетворювалися у систему знань – науку.

Окремі результати таких спостережень було викладено в трудах древньогрецького філософа **Аристотеля** (384–322 рр. до н.е.). Математик і механік **Архімед** (біля 287–212 рр. до н.е.) сформулював основний принцип гідростатики та винайшов водопідйомну машину для відкачування води із трюму корабля (гвинт Архімеда).

Пізніше **Ктезибій** винайшов водяний годинник *клепсидру* (з гр. *klepto* – краду, *hydor* – вода), а також пожежний насос.

**Герон Александрійський** (I сторіччя н.е.) описав водяний сифон, автомат для порціонування рідини, модель парового двигуна.

**Леонардо да Вінчі** (1457–1519 рр.) ввів до науки поняття нерозривності та опору рідини, розробив кілька гідравлічних машин.

**Галілео Галілей** (1564–1642) встановив пропорційність опору середовища швидкості тіла, що рухається в ньому.

**Еванджеліста Торрічеллі** (1608–1647) запропонував барометр та визначив формулу струменя рідини під час вільного падіння.

**Блез Паскаль** (1623–1662) встановив, що тиск на поверхні рідини передається рівномірно у всіх напрямках (закон Паскаля), та розробив метод розрахунку гідравлічних пресів. Усі три закони Ісаака Ньютона (1642–1727) застосовуються у гідравліці, він дав наближений опис внутрішнього тертя рідини.

**Даніель Бернуллі** (1700–1782) встановив зв'язок між основними видами енергії для стабільного руху рідини (рівняння Бернуллі).

**Леонард Ейлер** (1707–1783) узагальнив рівняння Бернуллі на рух за будь-яких умов, ввів поняття кавітації.

**Осборн Рейнольдс** (1842–912) сформулював закон опору рідини в трубах, теорію змащування та основні положення теорії турбулентності.

**Георгій Проскура** (1876–1958) створив у 1934 році першу гідродинамічну трубу у Харкові, займався динамікою гідравлічних машин та методами розрахунку гідротурбін.

В системі Національної академії наук України успішно функціонує Інститут гідромеханіки. Серед інших тут розв'язуються задачі безгребельного водозабору та розрахунку теплових режимів водостоків-охолоджувачів.

## РОЗДІЛ 1. ХАРАКТЕРНІ ДЛЯ РУХУ ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИНИ. ОСНОВНІ ПОСТУЛАТИ ГІДРАВЛІКИ

### Характерні для руху фізичні властивості рідини.

*Густина рідини*  $\rho$  є її маса  $m$  в одиниці об'єму  $V$ . Для однорідної та неоднорідної рідини цей зв'язок виглядає так:

$$\rho = \frac{m}{V}; \quad \rho = \frac{dm}{dV} \quad (1.1)$$

Одиницею густини є  $\text{кг/м}^3$ , розмірність  $\text{ML}^{-3}$ . Для неоднорідної рідини густина є функцією координат, тиску, температури, а для лабільної – ще й часу. Поверхні однакової густини називають *ізостеричними*, або *ізостерами*. Густина однорідних краплинних рідин слабо залежить від тиску та помітно - від температури. На рис. 1.1. наведено залежність  $\rho(t)$  в інтервалі  $0 - 100^\circ\text{C}$  для води (нагадуємо, що найбільшу густину вода має при  $+4^\circ\text{C}$ ).

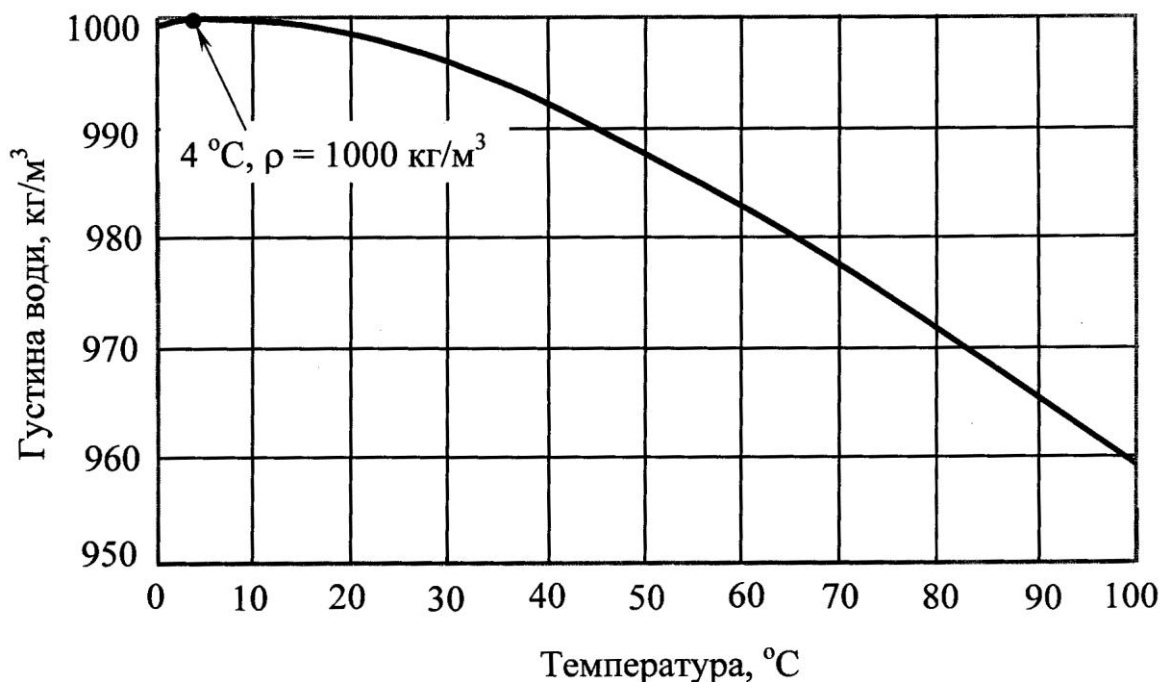


Рис.1.1

**Питомий об'єм  $v$**  – це об'єм одиниці маси, тобто величина, обернена до густини

$$v = \frac{V}{m}, \quad (1.2)$$

Вона має одиницю  $\text{м}^3/\text{кг}$ , та в основному використовується в термодинаміці, а у гідравліці використовується густина  $\rho$ ,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

**Питома вага  $\gamma$**  є вага  $G$  одиниці об'єму  $V$  речовини

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g, \quad (1.3)$$

її одиниця  $\text{Н}/\text{м}^3$   $\left( \text{Н} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \right)$ , розмірність  $\text{L}^{-2} \text{MT}^{-2}$ .

Нагадаємо, що  $g$  у (1.3) – це прискорення вільного падіння, його одиниця є  $\text{м}/\text{с}^2$ . До введення СІ питома вага була основною характеристикою густини речовини, оскільки вага  $G$  входила до комплексу первинних величин технічної та інших систем одиниць.

В англійській літературі використовують поняття «specific gravity – SG», яке можна перекласти як «відносна густина» – це відношення густини рідини до густини води за фіксованих умов, найчастіше при температурі  $+4^\circ\text{C}$ :

$$SG = \frac{\rho}{\rho_{\text{H}_2\text{O}(+4^\circ\text{C})}} \quad (1.4)$$

Перевагою цієї характеристики є те, що її величина не залежить від системи одиниць, в якій проводять розрахунки. Так морська вода має  $SG = 1,03$ ; гліцерин 1,26; етиловий спирт 0,789; бензин 0,68; ртуть 13,6.

**В'язкість** (внутрішнє тертя) – це властивість рідин та газів чинити опір переміщенню однієї їх частини відносно іншої. Якщо рухати верхню пластину із дотичною силою (рис. 1.2), а нижню залишити нерухомою, то

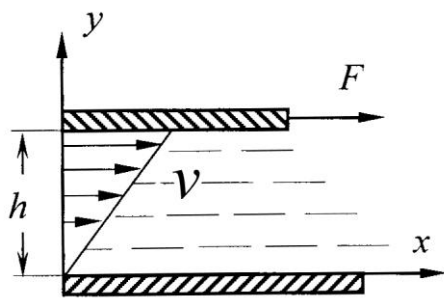


Рис.1.2

рідина почне рухатись з різною швидкістю від  $v_{max}$ , коли  $y = h$ , до 0, коли  $y = 0$ , тобто окремі прошарки рідини будуть зсуватись один відносно іншого, утворюючи внутрішнє тертя. Закон Ньютона для в'язкого руху рідин у випадку найпростішого епюра швидкостей (рис. 1.2)

$$F = \mu A \frac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1}, \quad (1.5)$$

де  $F$  – тангенціальна (дотична) сила, Н;  $A$  – площа шару, по якому відбувається зсув,  $m^2$ ;  $v_1, v_2$  - швидкість шарів, м/с, з ординатами  $x_1$  та  $x_2$ , м;  $\mu$  – коефіцієнт пропорційності, який має назву **динамічна в'язкість**, (або просто в'язкість)  $Pa \cdot s$   $\left( \frac{H \cdot c}{m^2} \right)$ .

Реальні епюри швидкості в потоках відрізняються від лінійного, тому закон в'язкого руху набуває вигляд

$$F = \mu \frac{dv}{dx}. \quad (1.6)$$

Якщо течія є стабільною, ламінарною (плоско-паралельною), та ізотермічною, то в'язкість не залежить від градієнта швидкості. Нижче наведено значення  $\mu$  для деяких рідин у  $10^{-3} Pa \cdot s$  при  $20^{\circ}C$ .

Вода	1,002
Етанол	1,200
Ртуть	1,554

Причиною внутрішнього тертя у рідинах є міжмолекулярна взаємодія, окремі молекули потрапляють у сусідні прошарки досить рідко.

Розглядають також **кінематичну в'язкість**,  $m^2/s$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.7)$$

Величина, зворотна  $\mu$ , називається **плинністю** (текучістю).

$$\varphi = \frac{1}{\mu} \quad (1.8)$$

Для в'язких мастил та палив використовують умовну (відносну) в'язкість, виражену у градусах Енглера. Це відношення часу протікання рідини об'ємом  $200 \text{ см}^3$  через капіляр  $d = 2,8 \text{ мм}$  при  $20^\circ\text{C}$  до часу протікання води за тих же умов. Для мазутів їх в'язкість враховується у маркуванні (М40, М100 тощо), є норми підігріву мазутів для транспортування та спалення з метою зменшення в'язкості.

**Стисливість** – властивість рідин змінювати об'єм під час зміни зовнішнього тиску, визначається *модулем пружності*

$$K = - \frac{dp / dV}{V} = \frac{dp / d\rho}{\rho} \quad (1.9)$$

Мінус у першому виразі враховує той факт, що зростання тиску  $p$  призводить до зменшення об'єму  $V$ . Одиницею  $K$  є  $\text{Н/м}^2$  (Па). Великі значення модуля пружності  $K$  означають більшу нестисливість рідин.

Швидкість звуку в рідині однозначно зв'язана із модулем пружності  $K$ :

$$c = \sqrt{K / \rho} \quad (1.10)$$

В практичних розрахунках часто використовують коефіцієнт стисливості  $\beta$ ,  $\text{м}^2/\text{Н}$

$$\beta = \frac{1}{K} \quad (1.11)$$

Стисливість знижує жорсткість гідроприводу, оскільки на стиснення витрачається енергія. Стисливість може привести до автоколивань в гідросистемах, утворює запізнення у роботі гідроапаратури та виконавчих механізмів. Інколи стисливість рідини є корисною – її використовують у гідравлічних амортизаторах.

**Опір розтягненню.** У особливих дослідах було доведено, що рідина у стані спокою (вода, ртуть) інколи є здатною опиратися дуже великим зусиллям на розтяг. Але зазвичай такого не відбувається, тому вважають, що опір розтягненню для рідин дорівнює нулю.

**Поверхневий натяг.** На поверхні рідини, що контактує з газом або іншою рідиною, з якою вона не змішується, утворюються щось на зразок плівки, інколи досить міцної. Так, сталева голка, акуратно покладена на воду, буде утримуватись на поверхні.

Пояснення цьому явищу лежить у тому, що молекула всередині рідини притягується до сусідніх молекул з усіх боків, а на поверхні – лише з боку більш глибоких молекул. За рахунок цього утворюється висхідна сила, що сприяє зменшенню поверхні розділу – «натягує» її, оскільки спрямована всередину рідини.

Поверхневий натяг є відношенням енергії мономолекулярного шару  $E_n$ , яка витрачається на утворення поверхні розділу, до цієї поверхні площею  $A$ , або силою  $F$ , що діє на одиницю довжини  $L$  контуру поверхні та намагається скоротити цю довжину до мінімуму:

$$\sigma = \frac{E_n}{A}, \text{ Дж/м}^2; \quad \sigma = \frac{F}{L}, \text{ Н/м} \quad (1.12)$$

Поверхневий натяг на межі між водою та повітрям за нормальних умов складає  $\sigma = 0,073$  Н/м, що у сім раз менше, ніж для ртуті. Тому краплина ртуті приймає майже ідеальну форму кулі, а воді заважає сила тяжіння.

З поверхневим натягом пов'язано явище **змочування**. Воно



визначається кутом  $\theta$ , який утворюється між твердою поверхнею та краплиною рідини в її основі. Якщо  $\theta > 90^\circ$  – рідина змочує поверхню, та навпаки. Кут  $\theta$  залежить від трьох  $\sigma$  – рідини  $\sigma_p$ , твердого тіла  $\sigma_m$ , та міжфазного натягу «тверде тіло – рідина»  $\sigma_r$ . За формулою Юнга

$$\cos \theta = (\sigma_m - \sigma_r) / \sigma_p \quad (1.13)$$

Для збільшення змочуваності, піноутворення, зменшення твердості, застосовують поверхнево-активні речовини (ПАР), найпростішою з яких є звичайне мило.

Від властивості поверхневого натягу та змочування залежить підйом та опускання рідини у капілярних трубках порівняно з рівнем у посудині з досить великою поверхнею. Висота  $h$ , на яку піднімається (або опускається) рідина в капілярі

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho R} \quad (1.14)$$

де  $\rho$  – густина рідини;  $R$  – радіус капіляра.

Під час проектування гідравлічних та теплових машин, а також їх експлуатації, можуть бути корисними також деякі інші властивості рідини: випарність – здатність переходити у газуватий стан за температури, нижчої від точки кипіння; розчинність газів у рідині; піноутворення хімічна та механічна стійкість під час експлуатації; сумісність робочих рідин із конструктивними матеріалами та, особливо, з матеріалами ущільнень.

Основним поняттям гідростатики, тобто науки про рідину, що знаходиться в стані спокою, є гідравлічний тиск. Якщо довільний об'єм рідини (рис.1.3) поділити площиною на відсіки I і II, то через цю площину з відсіку

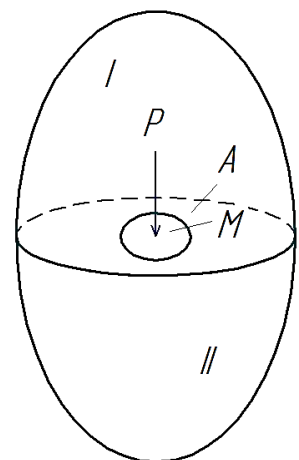


Рис. 1.3

І до відсіку II буде передаватися сила тиску. Частина цієї сили  $P$ , що припадає на поверхню  $A$  біля обраної точки  $M$ , виражає гідравлічний тиск в цій точці:

$$p = \frac{P}{A} \quad (1.15)$$

або в граничному випадку

$$p = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{P}{A}, \text{ Н/м}^2, \text{ (Па)} \quad (1.16)$$

### **Основні постулати гідравліки**

Оскільки гідравліка є розділом класичної (ньютонівської) механіки, в якому вивчаються макроскопічні рухи (течії) рідини і їх взаємодія з твердими тілами, як і в інших розділах механіки, в гідравліці використовуються основні постулати механіки Галілея - Ньютона.

**1-й постулат** – про *евклідовий простір*. Рух відбувається так, що з будь-якої точки  $M$  можна потрапити до іншої будь-якої точки  $N$ , не виходячи з межі тривимірного евклідового простору, відстань між точками  $M(x, y, z)$  та  $N(x_1, y_1, z_1)$  визначають з формули Піфагора

$$L_{MN} = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \quad (1.17)$$

**2-й постулат** – про *абсолютність часу*. Час є неперервним і однаковим для нерухомих і рухомих систем координат (на землі, на судні, у потягу, в космосі тощо).

**3-й постулат** – про *інваріантність рівнянь механіки*. Опис руху та закони механіки (їх форма запису) не змінюються для нерухомої системи координат або такої, що рухається рівномірно та постійно, із постійною швидкістю  $\vec{v}_0 = const$ . Такі системи координат називають інерціальними.

Наприклад, другий закон Ньютона для цих систем записується однаково:

$$m \vec{a} = \sum \vec{F}_i, \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (1.18)$$

де  $m$  – маса,  $\vec{a}$  - прискорення речовини,  $\vec{F}$  - сила, що діє на неї.

Але в тому випадку, якщо система координат рухається нерівномірно із прискоренням  $a_1$  або обертається  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \varpi \vec{r}$ , то другий закон Ньютона буде мати інший вигляд:

$$m \vec{a} = \sum \vec{F}_i - m \vec{a}_1 + m \vec{a}_2 \quad (1.19)$$

$$\vec{a}_2 = 2\varpi \vec{v} \quad (1.20)$$

де  $\varpi$  - кутова швидкість, 1/с.

Крім того, в гідравліці введено три додаткових постулати, що характеризують *специфічні властивості усіх рідин*, а саме: безперервність (суцільність), плинність (текучість) та стисливість.

**4-й постулат** – про *плинність рідини*. Особливістю усіх рідких середовищ є їх здатність змінювати власну форму, об'єм та безперервно рухатись (текти) навіть за умов дуже малих зовнішніх навантажень. В цьому рідина відрізняється від твердого тіла. У рідині відстань між молекулами значно більша, зв'язки між ними слабші, а свобода руху – більша і, якщо зовнішні навантаження є малими, то і деформації будуть малими. Для інших середовищ чіткої межі між твердим та рідким станом немає. Так, немає єдиної думки щодо звичайного скла при кімнатній температурі – тверде тіло чи рідина, оскільки тонка скляна пластина у горизонтальному стані з консольними краями буде поволі прогинатися під дією власної ваги.

Відповідно до феноменологічного підходу, швидкість руху в будь-якій точці рідини розуміють як середню швидкість в одному напрямку

невеличкою об'єму рідини навколо точки. Цей об'єм є малим порівняно із розмірами системи (труби, каналу, апарата), але досить великим відносно середньої відстані між молекулами, порядок якої становить  $10^{-7}$  мм для краплинних рідин. Зрозуміло, що із швидкістю самих молекул сформульоване вище поняття має дуже далеку кореляцію.

**5-й постулат** – про *безперервність*. Він також пов'язаний з феноменологічною уявою про речовину як континуума. Таке поняття можна знайти, наприклад, у «Божественній комедії» Данте. Збираючись до Раю (пісня друга), автор говорить «Я вижу этой разности причину в том, скважен ли иль плотен сам предмет» - тобто шпаруваті або щільні будуть йому зустрічатись образи (фігури). Беатріче відповідає: «Коль эта скважность не сквозная, то есть предел, откуда вглубь лежит ее противность, дальше не пуская». «Противность» – протилежність – і є континуум.

Якщо взяти згаданий у 4-му постулаті об'єм навколо точки у  $1 \text{ мм}^3$  (що дає можливість називати цей об'єм точкою, оскільки його розміри, зазвичай, незрівнянно мали порівняно із розмірами системи), то за нормальних умов число молекул в ньому має порядок для рідини  $10^{21}$ . Це є статистичним обґрунтуванням феноменологічного підходу.

**6-й постулат** – про *стисливість середовища*. Усі речовини у тій або іншій мірі є стисливими, тобто здатні змінювати свій об'єм під дією зовнішніх сил. Для твердих тіл ця зміна є надзвичайно малою, для краплинних (конденсованих) рідин – незначною, для газуватих рідин (газів) – великою. Для практичної мети можна нехтувати стисливістю більшості краплинних рідин, тому їх називають нестисливими. Наприклад, із зростанням тиску від 0,1 до 10 МПа густина води збільшується лише на 0,5%. За нормальних умов атмосферне повітря є у 22000 разів більш стисливим, аніж вода.

Посередньою мірою стисливості може служити швидкість звуку в середовищі – швидкість розповсюдження малих пружних коливань, яка пов’язана із елементарною зміною тиску  $dp$  від густини  $d\rho$  рівнянням

$$c = \sqrt{dp / d\rho} \quad (1.21)$$

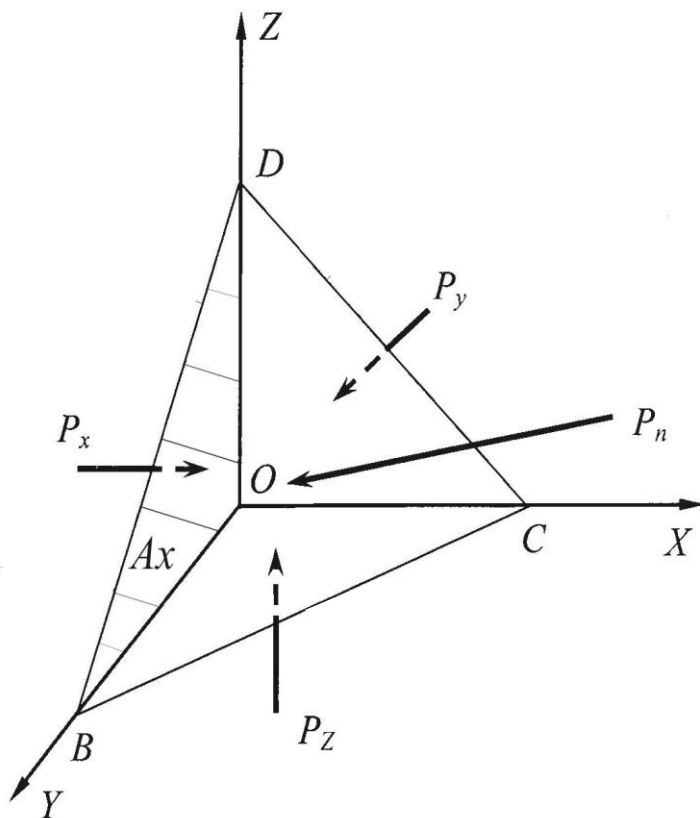
Зазвичай із збільшенням густини  $\rho$  швидкість звуку  $c$  збільшується. Так за нормальних умов швидкість звуку для повітря складає 330 м/с, для води 1540 м/с, для сталі 4500 м/с.

## РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ ГІДРОСТАТИКИ. ЗАКОН ПАСКАЛЯ. РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА. СПОЛУЧЕНІ ПОСУДИНИ.

В цьому розділі розглядається поведінка рідини, яка знаходиться в стані спокою або рухається так, що її частинки не рухаються одна відносно сусідніх, тобто немає дотичних напруг, в'язкість не має значення.

Сили, що діють на рідині, поділяють на зовнішні та внутрішні, на масові та поверхневі. Масові є пропорційними масі речовини (у цьому розділі – сила тяжіння), поверхневі сили діють лише по нормалі на поверхню виділеного об'єму рідини, якщо він не рухається.

Розглянемо умови рівноваги елементарного об'єму рідини (рис.2.1).



Довжини ребер тетраедра складають  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Площа кожної грані  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  та разом з нею відповідна сила  $P_i = p_i A_i$  є пропорційними добутку двох сторін тетраедра, а масові сили – об'єму. Отже, останніми, як величинами третього порядку мализни можна нехтувати порівняно із поверхневими силами – величинами другого

порядку мализни.

Для виконання умов рівноваги необхідно, аби сума усіх зовнішніх сил або сума проекцій усіх зовнішніх сил на координатні осі дорівнювала нулю, отже

$$P_x = P_n \cos(\widehat{nx}), \quad P_y = P_n \cos(\widehat{ny}), \quad P_z = P_n \cos(\widehat{nz})$$

де  $n$  – орт нормалі до похилої грані.

Якщо кожне з рівнянь поділити на відповідні площинки  $A_i$ , та врахувати, що кожна з цих площинок дорівнює (як зрозуміло з рис.2.1)

$$A_i = A_n \cos(\widehat{ni}), \text{ остаточно отримаємо}$$

$$p_x = p_n \quad p_y = p_n; \quad p_z = p_n$$

$$\text{або} \quad p_x = p_y = p_z = p_n = p \quad (2.1)$$

Оскільки під час виділення елементарного тетраедра жодних обмежень відносно його положення у рідині не було, то з рівняння (2.1) витікає, що в рідині у стані спокою або безв'язкісного руху гідростатичний тиск в точці не залежить від орієнтації площинки, до якої він прикладений. Це є виразом *закону Паскаля*: «Тиск на поверхню рідини, що був спричинений зовнішніми силами, передається рідиною однаково по всіх напрямках». Таким чином, тиск є функцією тільки положення точки в рідині, тобто

$$p = f(x, y, z). \quad (2.2)$$

Для виведення основного рівняння гідростатики, яке встановлює залежність тиску в точці від характеру діючих в рідині масових сил, розглянемо рівновагу елементарного паралелепіпеда з боками  $dx, dy, dz$  всередині рідини (рис.2.2).

Нехай на одиницю маси паралелепіпеда діє масова сила  $F$  з її компонентами  $X, Y, Z$ . Якщо на три грані, що перетинаються в точці  $O$ , діє тиск  $p$ , на відповідних протилежних гранях тиск буде дорівнювати

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx; \quad p + \frac{\partial p}{\partial y} dy; \quad p + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

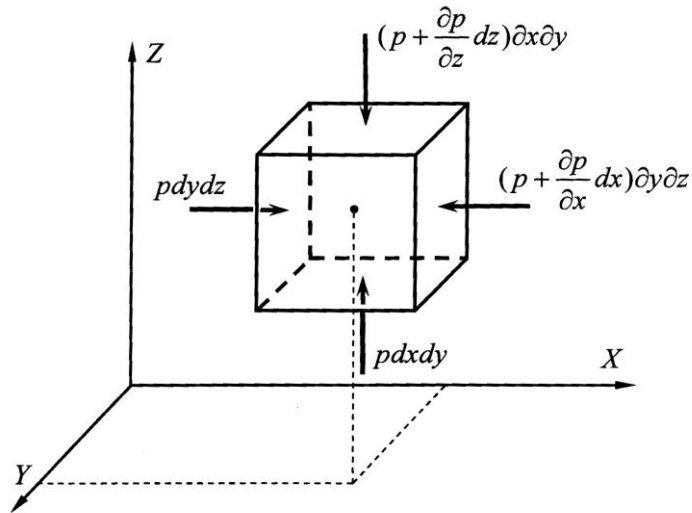


Рис.2.2

Тоді рівняння рівноваги у проекції на вісь  $x$  має вигляд

$$p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz + X \rho dx dy dz = 0 ,$$

або, скорочуючи,  $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X$

Аналогічний вигляд мають рівняння в проекціях на осі  $y$  та  $z$ .

$$\text{Рівняння} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho X , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \quad (2.3)$$

є *основними рівняннями гідростатики* або *рівняннями Ейлера* рівноваги рідини чи газу.

Поверхні, в кожній точці якої тиск є однаковим, називається *поверхнею рівня* або *еквіпотенціальною поверхнею*.

**Рівновага важкої нестисливої рідини.** Якщо немає масових сил крім сили тяжіння, маємо

$$X = Y = 0 ; \quad Z = g$$

(оскільки далі розглядаємо елемент масою 1 кг, отже  $Z$ , що спрямована додолу, дорівнює  $Z = 1 \cdot g = g$ ). Рівняння рівноваги (2.3) набувають вигляду



$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g . \quad (2.4)$$

Перші два рівняння виражають незалежність  $p = f(x, y)$ , тобто поверхнями рівня є горизонтальні площини. Інтегрування третього за умов  $g = const$  ;  $\rho = const$  дає

$$p = \rho g z + C \quad (2.5)$$

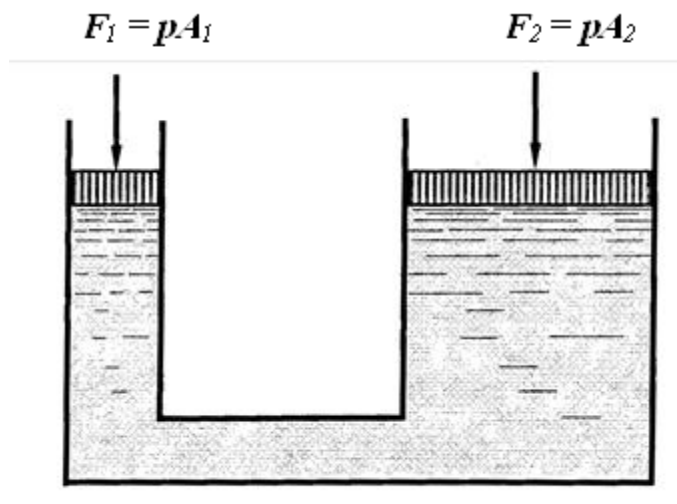
Якщо початок координат розташувати на вільній поверхні рідини, для якої заданий постійний тиск  $p_0$  (для відкритої посудини це атмосферний тиск) отримаємо  $z = 0 \Rightarrow C = p_0$ , тоді

$$p = p_0 + \rho g z = p_0 + \gamma z \quad (2.6)$$

Рівняння (2.6) є виразом закону гідростатики: «Тиск в будь-якій точці рідини в стані спокою дорівнює зовнішньому тиску плюс вага стовпа рідини висотою від відкритої поверхні до даної точки та із площею основи, що дорівнює одиниці».

Цей закон широко використовується в гідравлічних машинах та приладах: гідравлічних пресах, акумуляторах тощо.

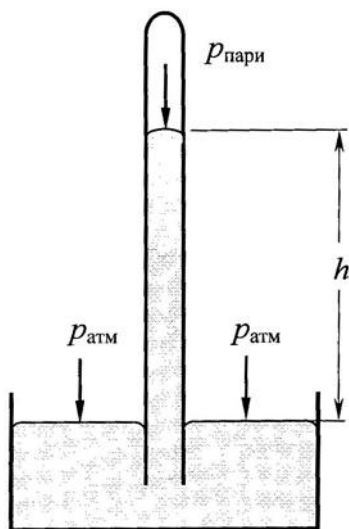
В цих машинах та приладах часто використовуються **сполучені посудини**. Якщо на вільних поверхнях сполучених посудин тиск однаковий та вони заповнені однаковою рідиною, то в цих посудинах, крім капілярних, рівні будуть однакові. Принцип дії сполучених посудин в гідравлічних домкратах, пресах, підйомниках тощо показаний на рис.2.3. З вищесказаного випливає, що сили  $F_1$  і  $F_2$  є обернено пропорційні площам поршнів 1 і 2. Таким чином  $F_1 = F_2(A_2/A_1)$ . Якщо первинним є циліндр 1 – маємо гідропідсилювач, якщо циліндр 2 – редуктор.



Дуже часто сполучені посудини використовують для **вимірювання тиску**. Нагадаємо, що тиск - це сила, що діє на одиницю поверхні по нормалі до неї,  $p = F/A$ , Н/м<sup>2</sup> (Па). Оскільки сила  $F$  – це інтенсивна величина, а площа  $A$  – екстенсивна, частка від ділення інтенсивної величини на екстенсивну – тиск – є

величиною інтенсивною. Відомо, що безпосередньо виміряти інтенсивну величину (тиск, температура, хімічний потенціал тощо) неможливо, тому для цього використовують певну залежність інтенсивної величини від екстенсивної. Цього разу використовують залежність (2.6). Прилади для вимірювання  $p_0$ , який найчастіше є **атмосферним тиском**, називають **барометрами**.

На рис 2.4 показано найпростіший ртутний барометр, який був запроваджений Торрічеллі у 1644 році. Вимірювальну рубку спочатку наповнюють ртуттю, потім відкритим кінцем занурюють у контейнер із ртуттю. Стовпчик в трубці приходить до рівноваги, коли його вага  $\rho gh$  плюс тиск від парів ртуті  $p_{\text{парі}} Hg$  врівноважує атмосферний тиск



$$p_{\text{атм}} = p_{\text{парі}} Hg + \rho gh \quad (2.7)$$

У практичних вимірюваннях першим доданком (2.7) нехтують, оскільки тиск парів ртуті у вакуумі на кілька порядків менше за атмосферний тиск, отже  $p_{\text{атм}} = \rho gh$ , з тих часів й досі атмосферний тиск часто вимірюють у

міліметрах ртутного стовпчика, хоча вони є позасистемними.

Якщо тиск  $p$  більше атмосферного  $p_0$  ( $p > p_0$ ), прилади для вимірювання надмірного (надлишкового) тиску  $p_n = \rho g z = \rho g h$  – це **манометри**. Вимірюється, як у барометра, лише висота (типово екстенсивна величина)  $h$ , оскільки густина рідини  $\rho$  та прискорення вільного падіння  $g$  для кожного манометра є величинами постійними та відомими.

Найпростішим манометром є п'езометрична (гр. *piezo* - давлю) трубка (рис.2.5). В цьому приладі атмосферний тиск діє на усю рідину, якою заповнений контейнер та трубка, тому стовпчик висотою  $h$  компенсує надлишковий тиск  $p_n$ , отже за постійної температури  $p_{nA} = p_{n1} = \rho g h$ .

Ці трубки є незручними, оскільки робоча рідина є одночасно вимірювальною, тобто годяться лише, коли робоча субстанція є краплинною рідиною.

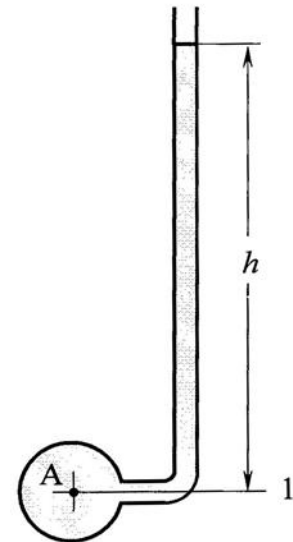
Поверхню, для усіх точок якої тиск дорівнює атмосферному, називають **п'езометричною поверхнею**.

П'езометричні трубки не слід плутати із п'езометрами – приладами для визначення зміни об'єму речовини під дією гідростатичного тиску, що буває потрібно під час дослідження діаграм стану, фазових переходів та інших фізико-хімічних процесів.

Значно частіше використовують манометри з U-подібними трубками.

Робоча рідина у контейнері із густиною  $\rho_1$  (рис. 2.6) не має змішуватися із вимірювальною рідиною ( $\rho_2$ ), тому такі манометри частіше використовують під час вимірювання надлишкового тиску у контейнерах із газами. Рівняння балансу тисків

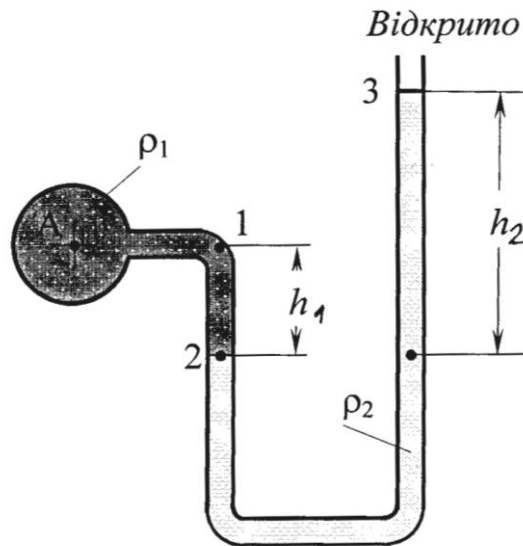
Відкрито



$$p_{атм} + \rho_1 gh_1 = \rho_2 gh_2 \quad (2.8)$$

звідки

$$p_{атм} = \rho_2 gh_2 - \rho_1 gh_1 \quad (2.9)$$



Якщо робоча рідина є газом, другим доданком у (2.9) можна нехтувати, отже

$$P_{атм} = \rho_2 gh_2$$

Недоліком такого манометра є те, що шкала  $h_2$  є рухомою, тому часто коліно трубки, що приєднується до контейнера, роблять значно ширшими (рис.2.7). В цьому випадку зміненням  $h_1$  на рис. 2.6 можна нехтувати та калібрувати  $h_2 = h$ , починаючи з нуля.

Якщо абсолютний тиск в контейнері менший від атмосферного тиску, то різницю між ними називають розрідженням або вакуумом  $p_v$  (рис. 2.8), а прилад для його вимірювання – **вакуумметром**. З рис. 2.8 зрозуміло, що

$$p_v = p_{атм} - \rho gh \quad (2.10)$$

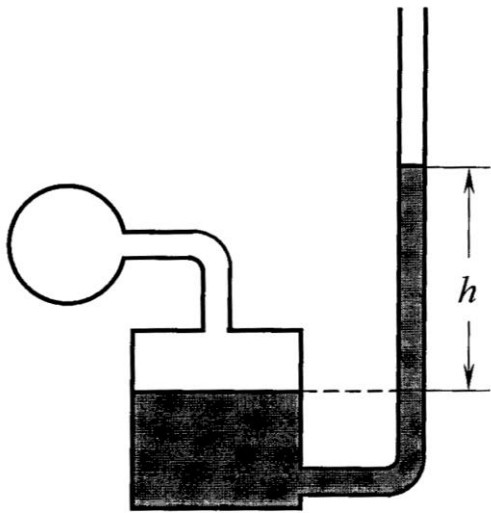


Рис.2.7

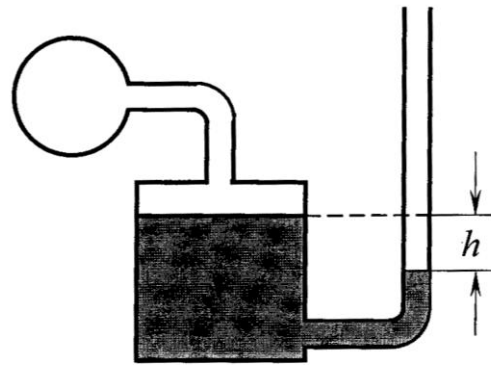


Рис. 2.8

Для вимірювання дуже малих надлишкових тисків роблять різні пристрої. Найпростіше робити трубку похилою (рис.2.9). Прості викладки з рівнянням балансу сил показують, що цього разу

$$p_{атм} = \rho_2 g l \sin \theta \quad (2.11)$$

тобто шкала  $l$  механічним шляхом розтягується. За потребою кут  $\theta$  можна

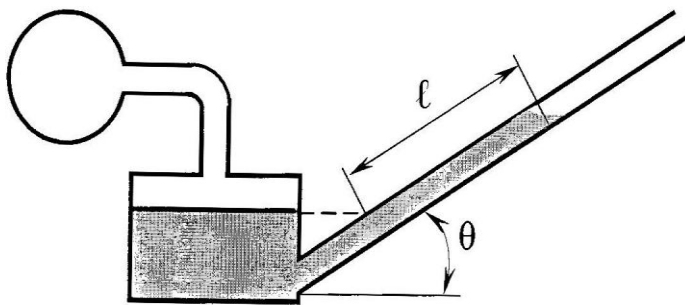


Рис.2.9

змінювати. Такі прилади під назвою **тягоміри** на котлах та у різних топках мають дублювати роботу інших, наприклад автоматизованих манометрів.

Важливим застосуванням U-подібних

трубок є побудова *диференціальних манометрів* тобто *пристроїв для вимірювання різниці тисків*. Такі прилади застосовуються у системах вимірювання витрати або швидкості рідини чи газу під час транспортування по трубах (рис. 2.10).

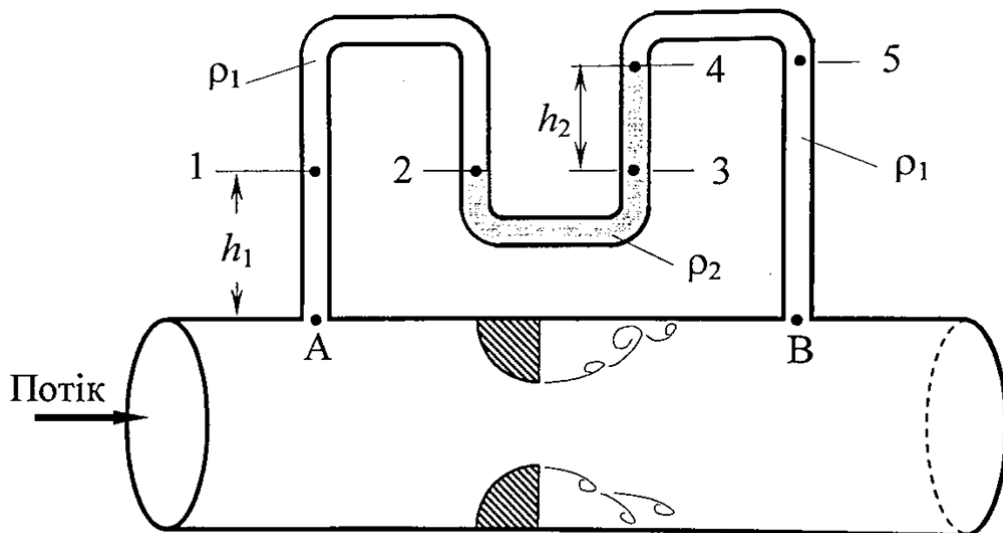


Рис.2.10

Насадка знижує тиск від  $p_a$  до  $p_b$ , що дає можливість обчислювати витрату  $v = K \sqrt{p_A - p_B}$ , де коефіцієнт  $K$  залежить лише від діаметрів труби та отвору в насадці. Баланс сил виглядає так:

$$p_A - \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2 + \rho_1 g (h_1 + h_2) = p_B$$

Звідки

$$p_A - p_B = h_2 g (\rho_2 - \rho_1) \quad (2.12)$$

### РОЗДІЛ 3. ГІДРОСТАТИЧНИЙ ТИСК НА ПЛОСКІ І КРИВОЛІНІЙНІ СТІНКИ. РІВНОВАГА РІДИНИ ЗА НАЯВНОСТІ НЕГРАВІТАЦІЙНИХ МАСОВИХ СИЛ

**Тиск на плоскі стінки.** Надлишкова сила гідростатичного тиску на плоску стінку 1 (рис 3.1) дорівнює тиску в центрі ваги, помноженому на її площу

$$P = (p_0 + \rho g h'_c)A = P_0 + P_p, \quad (3.1)$$

де  $h'_c$  – глибина занурювання центра ваги стінки під вільною поверхнею;  $A$  – площа стінки;  $p_0$  - надлишковий тиск на вільні поверхні;  $P_0 = p_0 A$  – сила за рахунок зовнішнього тиску;  $P_p = \rho g h'_c A$  – сила за рахунок тиску рідини.

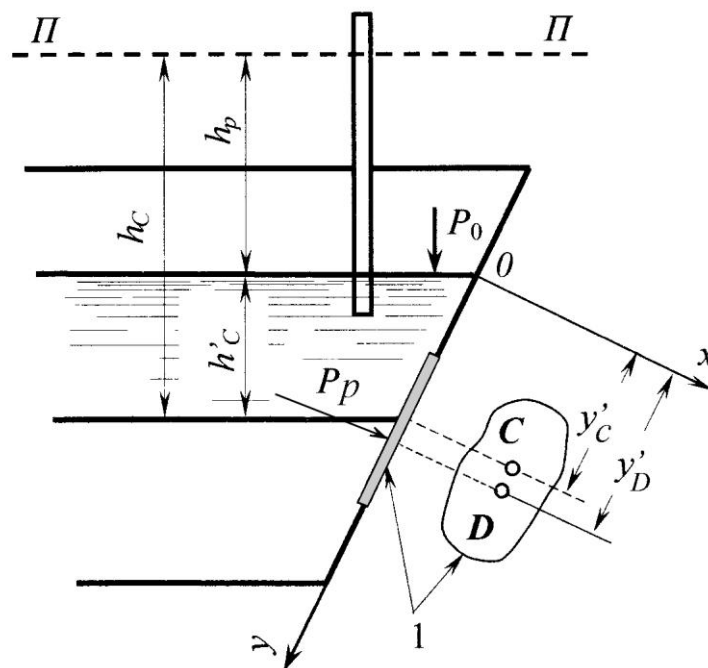


Рис. 3.1

Сила  $P_0$  прикладена у центрі ваги стінки  $C$ , сила  $P_p$  - у центрі тиску  $D$ , координати якого обчислюються за формулою

$$y_D = y'_0 + \frac{J_0}{Ay'_c} \quad (3.2)$$

де  $y'_0$  - координати центра ваги;  $J_0$  - момент інерції плоскої фігури відносно її центральної осі.

Як відомо з курсу теоретичної механіки, осьовий момент інерції відносно осі  $Z$  визначається так

$$J_z = \sum m_i h_i^2 \quad (3.3)$$

де  $m_i$  - маси точок тіла;  $h_i$  - їх відстань від осі  $Z$ .

В практичних розрахунках тиску на клапани, заглушки, кришки центр тиску збігається з центром ваги, тоді  $J_0 = 0$ .

Остаточно надлишкова сила тиску на плоску стінку

$$P = \rho g h_c A_p \quad (3.4)$$

$h_c$  - відстань від центра ваги стінки до п'єзометричної площини П-П (рис. 3.1).

Для циліндричної криволінійної поверхні (рис.3.2)

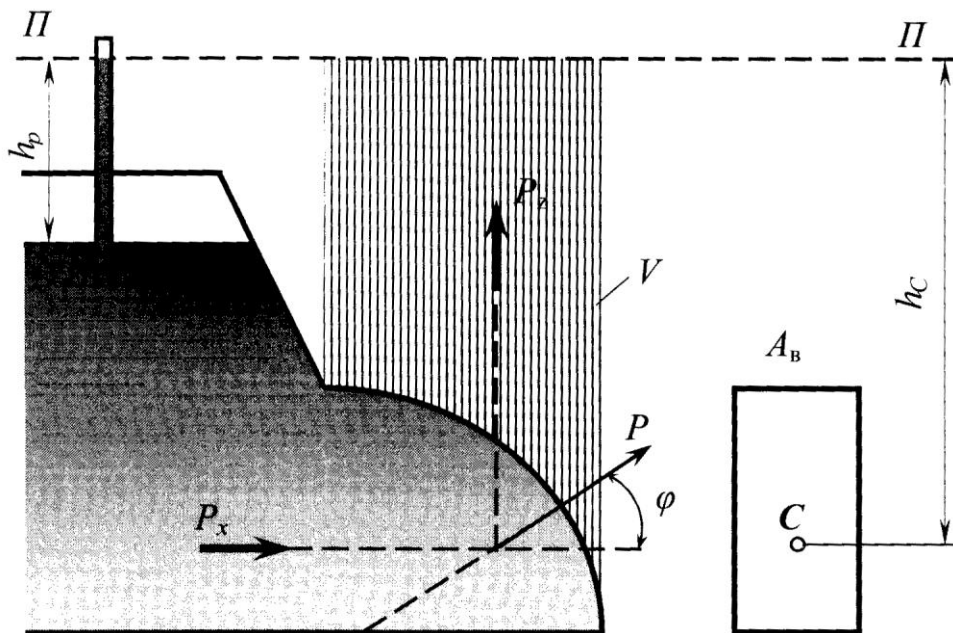


Рис. 3.2



$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} \quad (3.5)$$

де  $P_x$  та  $P_z$  – горизонтальна та вертикальна складові сили  $P$ .

#### Горизонтальна складова

$$P_x = \rho g h_c A_B \quad (3.6)$$

де  $h_c$  - відстань від центра ваги вертикальної проекції до п'єзометричної площини;  $A_B$  – площа проекції криволінійної поверхні на вертикальну площину.

#### Вертикальна складова

$$P_z = \rho g V \quad (3.7)$$

де  $V$  – об'єм так званого «тіла тиску», тобто *вертикального стовпа рідини*, розташованого між п'єзометричною площиною, криволінійною поверхнею та вертикальною поверхнею, що включає в себе проекцію криволінійної стінки (на рис. 4.2 об'єм  $V$  заштриховано вертикальними лініями, а площа  $A_B$  показана у вигляді прямокутника) вектор повної сили тиску на циліндричну поверхню проходить через вісь циліндра під кутом  $\varphi$  до горизонту так, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P_x}{P_z} \quad (3.8)$$

**Відносна рівновага рідини** може бути встановлена за наявності крім сили ваги інших масових сил. На практиці має місце рівновага рідин під дією сил інерції та електромагнітних сил, що діють на електропровідні середовища. Рідина при цьому рухається, тому така рівновага називається відносною. Найбільш розповсюджені випадки, коли рух є прискореним або обертальним.

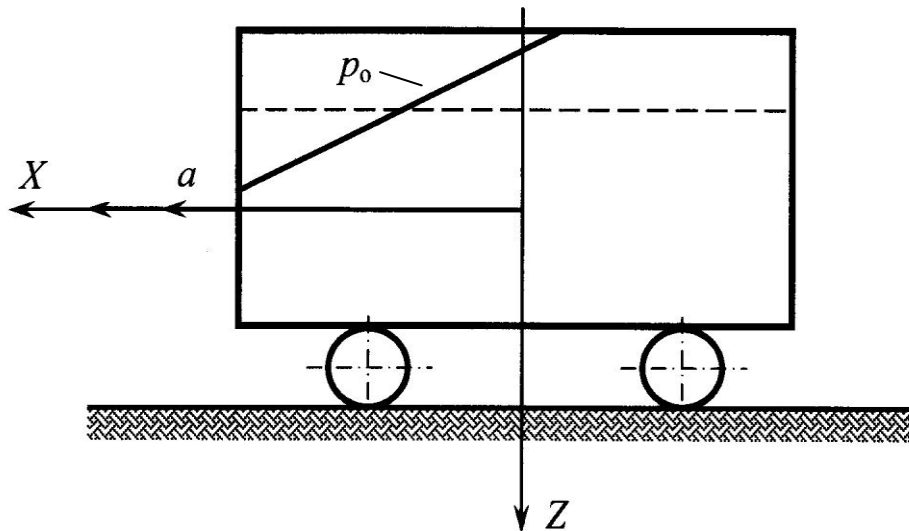


Рис. 3.3

Нехай посудина, що наповнена рідиною, рухається рівноприскорено (або рівносповільнено) у горизонтальному напрямку (рис.3.3). З теоретичної механіки відомо, що задачу динаміки можна розглянути як задачу статички, якщо до зовнішніх сил додати сили інерції.

Якщо посудина рухається рівноприскорено з прискоренням  $a$ , то за вибраною системою координат проєкції напруг масових сил будуть

$$X = a; \quad Y = 0; \quad Z = g.$$

Рівняння (2.5)  $p = \rho gz + C$  із попереднього розділу має тепер один доданок

$$p = \rho ax + \rho gz + C \tag{3.9}$$

Постійну  $C$  визначимо з умови, що при  $x = 0$ , та  $z = g$  тиск дорівнює  $p_0$ :

$$C = p_0 - \rho ax_0 - \rho gz_0$$

Отже тиск у будь-якій точці рідини буде визначатись за формулою

$$p - p_0 = \rho a(x - x_0) + \rho g(z - z_0) \tag{3.10}$$

А рівняння поверхонь рівня ( $p = idem$ )

$$\rho a(x - x_0) + \rho g(z - z_0) = const \quad (3.11)$$

На практиці часто треба знайти, яке максимальне прискорення може взяти самоскид під час розгону, якщо в його кузові знаходиться розчин цементу, аби цемент не виплеснуло з кузова, або на яку частину кузова можна розчин цементу безпечно завантажити. Відповідь на ці питання дає кут нахилу вільної поверхні розчину  $\varphi$  під час розтягнення, який можна отримати з формули

$$tg \varphi = \frac{a}{g} \quad (3.12)$$

Якщо негравітаційною масовою силою є відцентрова сила, то для практики цікавими є два аспекти:

- як зміниться висота рідини у циліндрі, що обертається;
- як добитися раціонального виділення з рідини завислих твердих або рідких частинок.

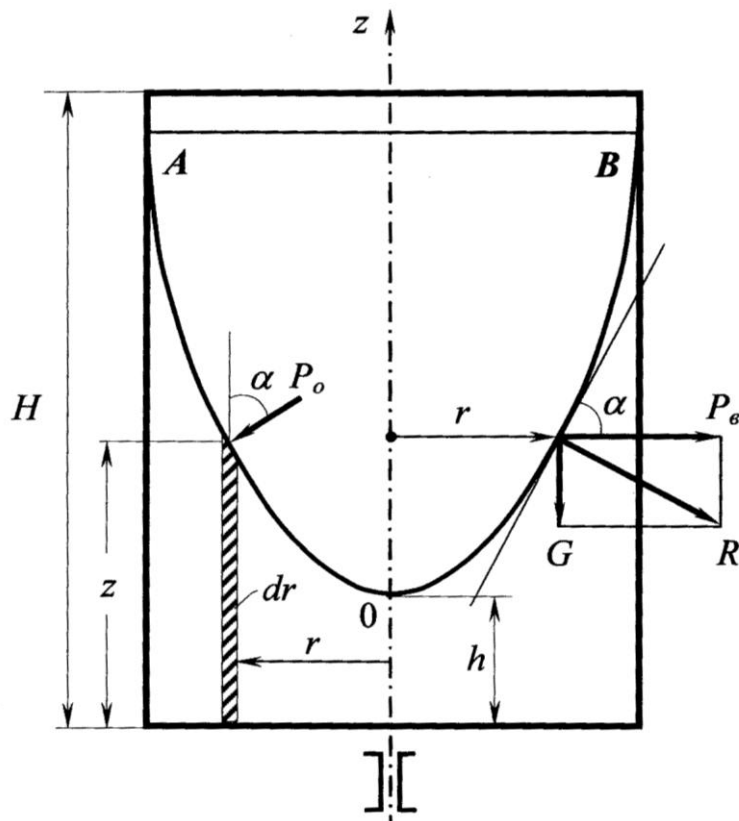


Рис. 3.4 Обертання посудини з рідиною

Відцентрова сила буде примушувати рідину здійматись догори, долаючи силу ваги там, де відцентрова сила є максимальною, тобто біля стінок циліндра. Ближче до осі, навпаки, рідина має опуститися нижче первинного рівня, щоб компенсувати ту частину, що підіймається. Утворюється своєрідна воронка (рис.3.4), а частина

рідини може вилитися з посудини.

На будь-яку частину рідини в мить її відносної рівноваги діють масові сили – вага  $G$  і відцентрова сила  $P_g$  :

$$G = mg \quad P_g = m \omega^2 r \quad (3.13)$$

де  $r$  – відстань частинки від осі обертання;  $\omega$  – кутова швидкість обертання посудини.

Поверхня рідини у воронці є поверхнею рівня, тобто вона має бути нормальною в кожній точці до рівнодійної цих сил  $R$ . З рис. 3.3 знаходимо, що тангенс кута  $\alpha$  нахилу дотичної до поверхні рівня відносно горизонту

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_g}{G} = \frac{m \omega^2 r}{mg} \quad (3.14)$$

З іншого боку

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dr} \quad (3.15)$$

де  $z$  – ордината точки, що розглядається.

З (3.14) та (3.15) одержуємо

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \frac{dz}{dr} \quad (3.16)$$

Звідси

$$dz = \frac{\omega^2}{g} r dr \quad (3.17)$$

Після інтегрування (3.17) маємо

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C$$

Постійну інтегрування  $C$  знайдемо з умови, що в точці перетину кривої  $AOB$  (переріз поверхні рівня) із віссю обертання

$$r = 0; \quad z = h = C,$$

тому остаточно

$$z = h + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad (3.18)$$

Таким чином крива  $AOB$  є параболою, а вільна поверхня рідини у воронці – параболоїдом.

Для з'ясування того, чи не виллється рідина з посудини під час обертання, достатньо, щоб дотримувалась нерівність

$$h + \frac{\omega^2 r_{\max}^2}{2g} \leq H, \quad (3.19)$$

де  $H$  – висота посудини;  $r_{\max}$  – її радіус.

Для визначення закону зміни тиску у рідині, що обертається, залежно від радіуса та висоти, виділимо циліндричну трубку висотою  $h + z$ , радіусом  $r$ , товщиною  $dr$  та площею основи  $dS = 2\pi dr$  (на рис. 3.3 заштрихований вертикальний переріз цієї трубки).

Умови рівноваги трубки у вертикальному напрямку, з урахуванням (4.18)

$$pdS - \left( h - z + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right) \rho g dS - P_0 \left( \frac{dS}{\cos \alpha} \right) \cos \alpha = 0 \quad (3.20)$$

Після скорочення отримаємо

$$P = P_0 + \left( h - z + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right) \rho g \quad (3.21)$$

З рівняння (3.21) зрозуміло, що тиск рідини у воронці зростає пропорційно радіусу та зменшується пропорційно висоті.

Рівняння типу (3.19) є актуальним під час розрахунків процесів розливу, нагрівання, стерилізації харчових продуктів та напоїв. Якщо

продовжити приклад із транспортуванням цементного розчину, то рівняння (3.19) та (3.21) потрібні для розрахунків так званих міксерів – посудин з цементом, що під час руху обертаються.

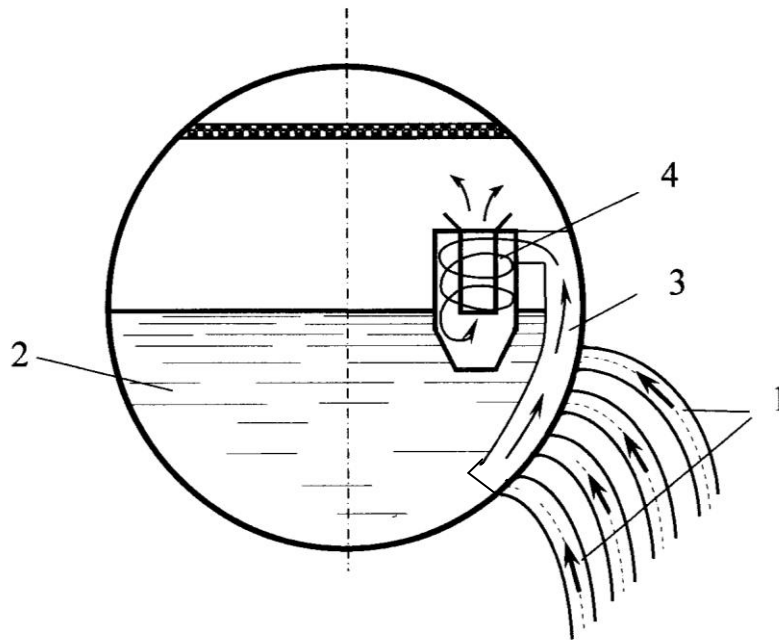


Рис. 3.5

Якщо в рідині знаходяться завислі частинки з різною густиною, то частинки з меншою, порівняно з рідиною, густиною (наприклад, частинки масла мастильного або солярового по відношенню до води) під дією сил ваги та відцентрової, піднімуться догори та зберуться біля осі посудини, а частинки з більшою густиною – опустяться донизу та розташуються по периферії. Це явище лежить в основі *сепарування* та *центрифугування*.

Найбільш ефективним сепараційним пристроєм для виділення води з вологої насиченої пари всередині барабанів парових котлів є *циклонні сепаратори*, здатні знижувати вміст води у парі до 0,1 – 0,55%.

Пароводяна суміш потрапляє із підйомних трубок 1 (рис.3.5) вертикального водотрубного котла за рахунок різниці густин в підйомних та опускних трубках до верхнього барабана 2 котла за перегородку 3, звідки – до циклона 4. Вода відцентровою силою відкидається до стінок циклона та по них стікає у водяний простір барабана, а пара виводиться догори та

відбирається з верхньої точки барабана.

За цим принципом працюють механічні *сухі та мокрі золоуловлювачі* в системі котельних установок та інших подібних установка. В мокрих золоуловлювачах (скруберах) стінки циклона зсередини зрошують водою, до плівки якої прилипають частинки золи.

У *гідроциклонах* виділяють різні тверді та рідкі частинки з води.

Процес центрифугування визначає різниця відцентрової сили  $F_B$  та сила  $F_A$ , що виникає у радіальному напрямку за рахунок різниці густин завислих частинок та води:

$$F_B - F_A = (\rho_v - \rho_e)V\omega^2 r \quad (3.22)$$

де  $F_A$  – аналог сили Архімеда, що розглядається у наступному розділі;  
 $V$  – об'єм частинки.

Підраховано, що розділення повітря на кисень та азот, що зазвичай роблять у складних кріогенних установках, більш економічним було б проводити за рахунок відцентрової сили (кисень більш важкий). Але таке розділення потребує величезної кутової швидкості, яку сучасні конструкційні матеріали не в змозі витримати.

## РОЗДІЛ 4. ПЛАВУЧІСТЬ. ЗАКОН АРХІМЕДА. ОСТІЙНІСТЬ. КАПЛЯРНІ ПОВЕРХНЕВІ СИЛИ

Якщо тіло повністю занурено у рідину або плаває у ній, висхідна сила, що діє на нього, називається *силою плавучості*. Вона спрямована вертикально догори, оскільки, як відомо з попереднього розділу, тиск зростає з глибиною, отже тиск на тіло знизу вищий за тиск зверху. Ця сила є подібною силі, що діє на криволінійну стінку.

Розглянемо тіло довільної форми з об'ємом  $V$ , що занурено у рідину (рис. 4.1). Замкнемо тіло у паралелепіпед (рис. 4.1 а). Сили  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  та  $F_4$  діють на його плоскі поверхні (для спрощення сили у напрямку  $x$  не показані). Вагу «зайвої» рідини (паралелепіпед мінус тіло) позначимо  $W$ , а  $F_B$  – силу, з якою тіло діє на рідину. Усі сили, що діють на вертикальні поверхні – як  $F_3$  та  $F_4$ , парами однакові, отже анулюються, тому рівняння рівноваги в напрямку  $z$  виглядає так:

$$F_B = F_2 - F_1 - W \quad (4.1)$$

Якщо питома вага не змінюється,

$$F_2 - F_1 = \gamma(h_2 - h_1)A,$$

де  $A$  – горизонтальна площа верхньої (або нижньої) поверхні паралелепіпеда, тоді формулу (4.1) можна записати у вигляді

$$F_B = \gamma(h_2 - h_1)A - \gamma[(h_2 - h_1)A - V] \quad (4.2)$$

Після спрощення маємо

$$F_B = \gamma V = \rho g V \quad (4.3)$$

де  $\gamma$ ,  $\rho$  – відповідно питома вага та густина рідини;  $V$  – об'єм тіла.

Таким чином, сформулюємо відомий закон Архімеда: «Сила плавучості дорівнює за величиною вазі зануреної частини тіла, а за напрямком їй протилежна». Або за відомим зі школи визначенням: «Будь-яке тіло, занурене у рідину, втрачає у своїй вазі стільки, скільки важить витиснена ним



рідина».

Інші назви сили плавучості – виштовхувальна сила або **архімедова сила**.

Розташування лінії виштовхувальної сили можна визначити, якщо підсумувати моменти сил, як вказано на рис. 4.1.b. Наприклад, підсумовуючи моменти сил відносно осі, що проходить через точку С (рис. 4.1.c) та є перпендикулярною до площини рисунка

$$F_B y_c = F_2 y_1 - F_1 y_1 - W y_2$$

Після урахування усіх сил та переходу до об'ємів

$$V y_c = V_3 y_1 - (V_3 - V) y_2 \quad (4.4)$$

Де  $V_3$  – загальний об'єм паралелепіпеда рідини

$$V_3 = (h_2 - h_1)A$$

Права сторона рівняння (4.4) є першим моментом об'єму  $V$  відносно площини  $xu$ , тому  $y_c$  дорівнює координаті **центроїда** об'єму  $V$ . Аналогічним шляхом можна показати, що координата  $x$  сили плавучості збігається з координатою  $x$  центроїда. Отже, сила плавучості проходить через центроїд тіла, що витісняється з рідини.

Такі ж висновки можна застосувати для тіл, які частково занурені у рідину, за умови, що питома вага середовища над поверхнею основної рідини значно менша за питому вагу рідини (рис. 4.1.d). Оскільки найчастіше «верхнім» середовищем є зазвичай повітря, ця умова виконується.

Наведені висновки виконуються за умови, що густина рідини не змінюється з глибиною. Однак, навіть якщо густина залежить від ординати  $z$ , наприклад, рідина є шаруватою, величина сили Архімеда дорівнює вазі рідини, що є витісненою. Проте, вектор сили Архімеда не проходить цього разу через центроїд тіла, частіше він проходить через центр його ваги.

Якщо сила Архімеда менше за вагу тіла, тобто  $\rho_p < \rho_r$ , тіло буде

плавати в рідині на будь-якій глибині та займати довільне положення. На цьому ефекті побудований спосіб перевірки свіжості курячих яєць: добирається така густина розчину кухонної солі, щоб свіже яйце займало довільне місце у посудині, тоді несвіже яйце, яке має меншу густину за рахунок газів, які виділяються при розкладанні білків, буде обов'язково спливати.

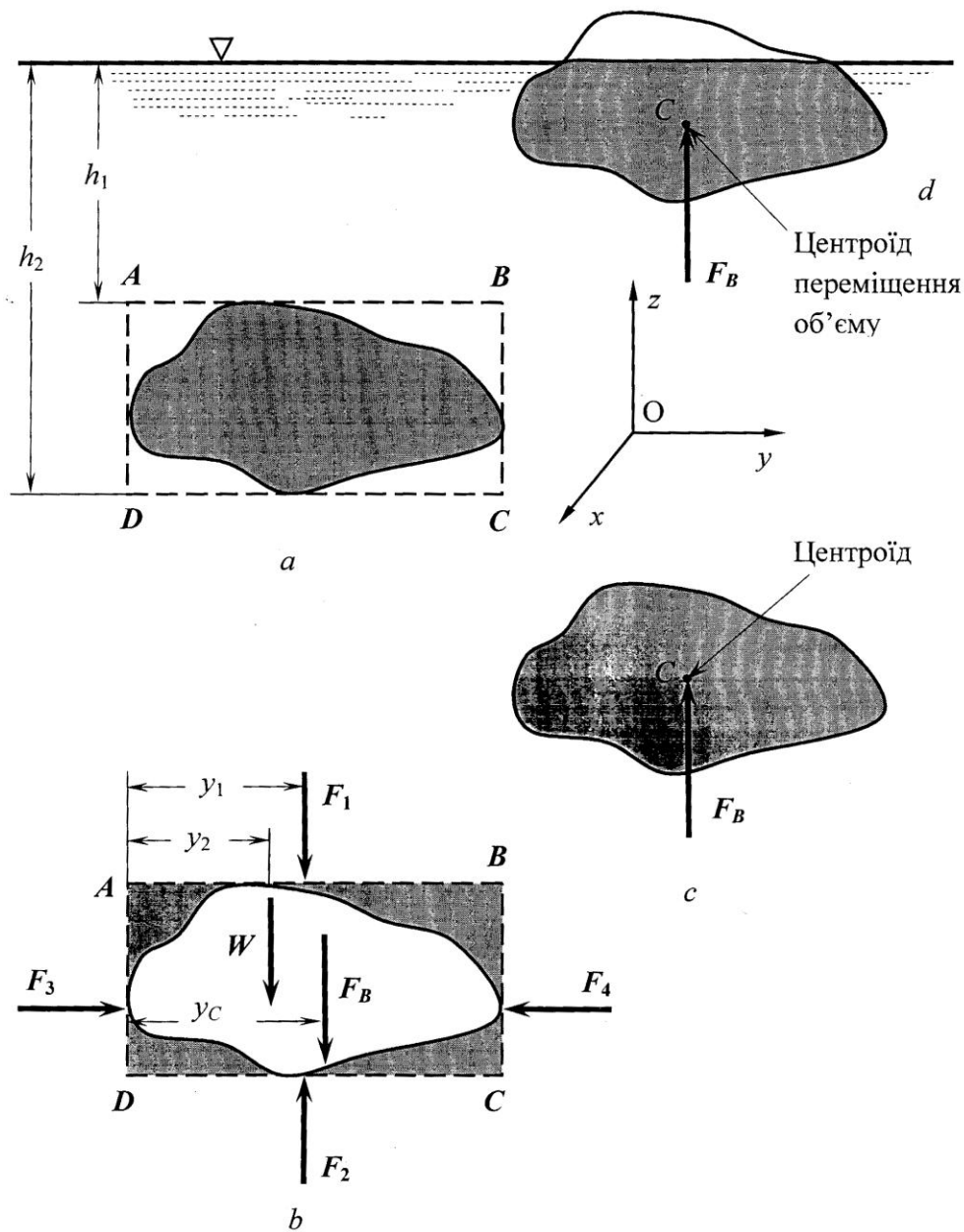


Рис. 4.1

Із законом Архімеда за всю історію розвитку гідравліки було пов'язано

багато курйозних випадків, наприклад, пропозиція побудувати вічний двигун, або інших парадоксів.

Розглянемо два випадки.

**«Вічний двигун» М.Е. Жуковського.** В стінці посудини із рідиною розміщено циліндр, який може обертатися навколо власної осі (рис. 4.2). здавалось би, відповідно до закону Архімеда, на занурену в рідину частину циліндра має діяти підйомна гідростатична сила, що стає меншою на верхній частині циліндра. Висхідна сила буде штовхати «мокру» частину циліндра догори, за рахунок моменту цієї сили циліндр має обертатися, тобто в наявності вічний двигун першого роду. Однак циліндр обертатися не буде. Справа в тому, що сили, які діють на нижню частину циліндра, хоча і є більшими, але діють вони перпендикулярно до поверхні циліндра, тобто до його осі, тому моменту сил не виникає, і циліндр залишається нерухомим.

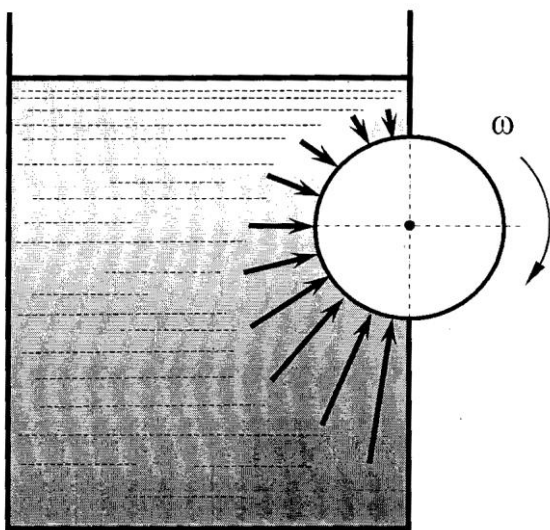


Рис.4.2

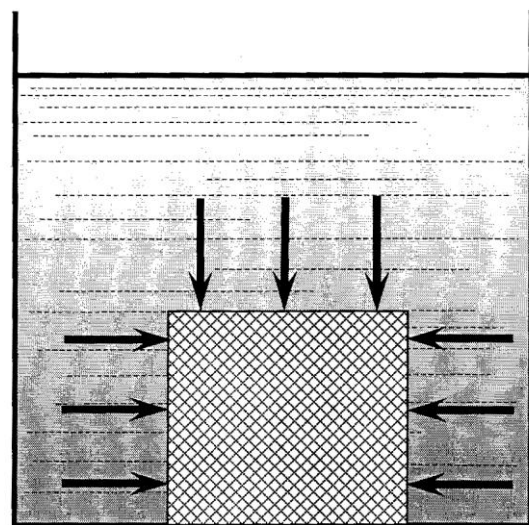


Рис.4.3

**Парадокс Л.І. Седова.** Якщо тіло із плоскою нижньою поверхнею, що має густину меншу, ніж рідина, положити на плоске дно посудини (рис. 4.3), воно не спливе. Здавалось б, закон Архімеда не працює. Але під час виведення цього закону малося на увазі, що для повністю занурених тіл

поверхня стикання рідини із тілом має бути замкненою (для плавучих тіл ця поверхня умовно замикається горизонтальною площиною, що пристає до поверхні рівня рідини).

Висхідна сила, що діє на тіло на дні посудини (рис. 4.3) буде, навпаки, притискати його до дна, цю силу називають **силою присосу**. Вона залежить від глибини занурення та поверхні стикання тіла з дном, оскільки є фактично гідростатичною силою.

Таким чином, жодного парадоксу в цьому явищі немає. Воно пояснює випадки, коли підводні човни лягали на дно океану, втрачали плавучість та не могли сплисти. Ця ж обставина ускладнює підйом із дна кораблів та вантажів, що потонули. Але якщо є можливість нахилити тіло так, щоб під нього потрапила невелика кількість рідини, то тіло почне спливати за умови, що час перебування на дні його густина не стала більшою за густину рідини.

**Остійність.** Важливою проблемою, пов'язаною із зануреними або плавучими тілами, є остійність цих тіл. Тіло знаходиться у **стабільній рівновазі**, якщо після зміни положення воно повертається до нього ж. Якщо ж тіло повертається до нової рівноваги – це буде **нестабільна рівновага**. Остійність залежить від того, чи збігаються центри плавучості (згаданий вище центроїд) та ваги. Якщо ні, маленький поворот тіла може привести до відновлення позиції, якщо центр ваги  $cG$  зануреного тіла лежить нижче від центра плавучості  $c$  (рис. 4.4).

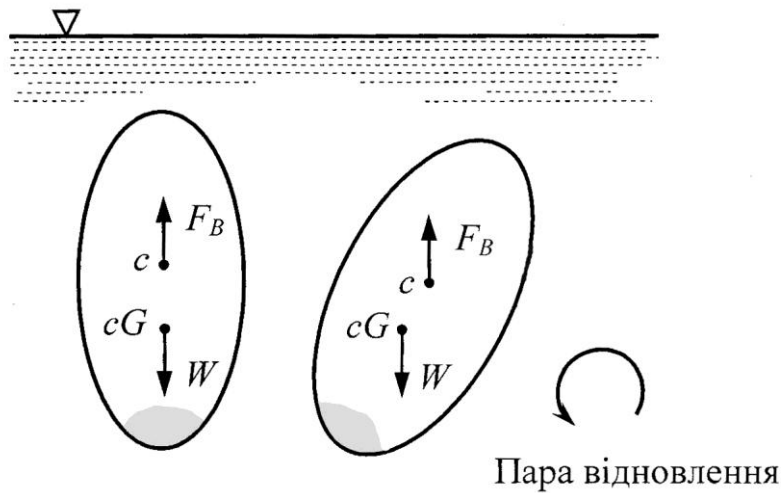


Рис. 4.4

Відновлення положення тіла відбувається під дією пари сил, які можна назвати парю відновлення. У випадку, коли нижчим є центр плавучості  $c$ , утворюється пара сил з моментом протилежного знака, тобто пара перевероту (рис. 4.5). Кут нахилу від початкової позиції буде збільшуватись, тіло перекидатиметься я, поки центр ваги стане нижчим

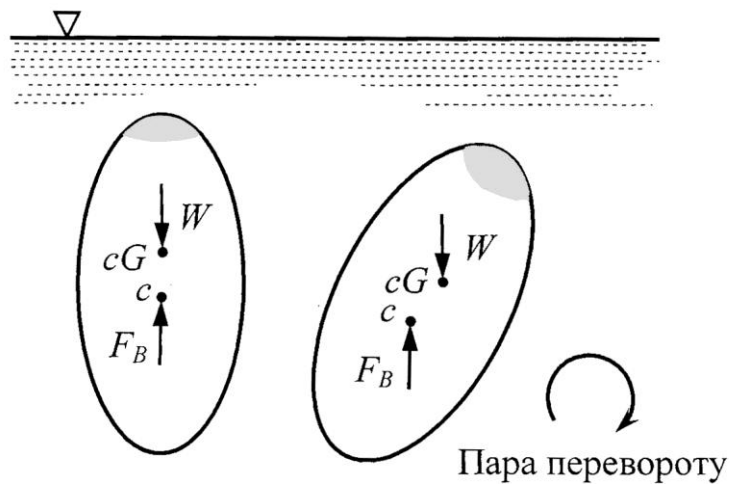


Рис. 4.5

Для плавучих тіл проблема стабільності є складнішою, оскільки під час зміни положення тіл змінюється також положення центра плавучості (який збігається з центроїдом витисненого об'єму), до того ж в той самий бік, тобто момент пари сил зростає. Тому плавуче тіло типу баржі, що сидить низько у

воді, може займати стабільне положення навіть якщо його центр ваги знаходиться вище центру плавучості (рис. 4.6).

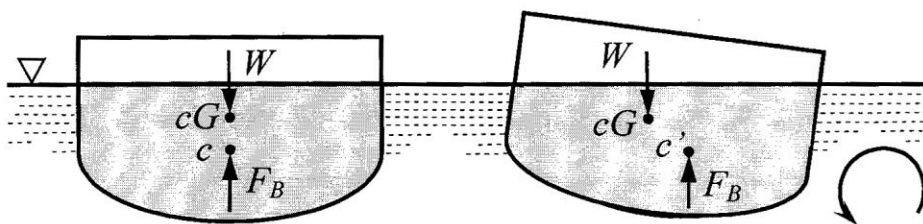


Рис. 4.6

Якщо тіло вузьким і високим (рис. 4.7), небезпечність перевертання зростає, особливо коли центр ваги лежить вище поверхні рідини.

Центр плавучості називають ще центром тиску, а для суден – **метацентром**.

Відстань між метацентром та центром ваги називають **метацентричною висотою**. Чим вона більше, тим більше остійність судна. Тому штучно знижують центр ваги – на яхтах за допомогою важкого кіля, на судах – розміщенням важких вантажів у трюмах.

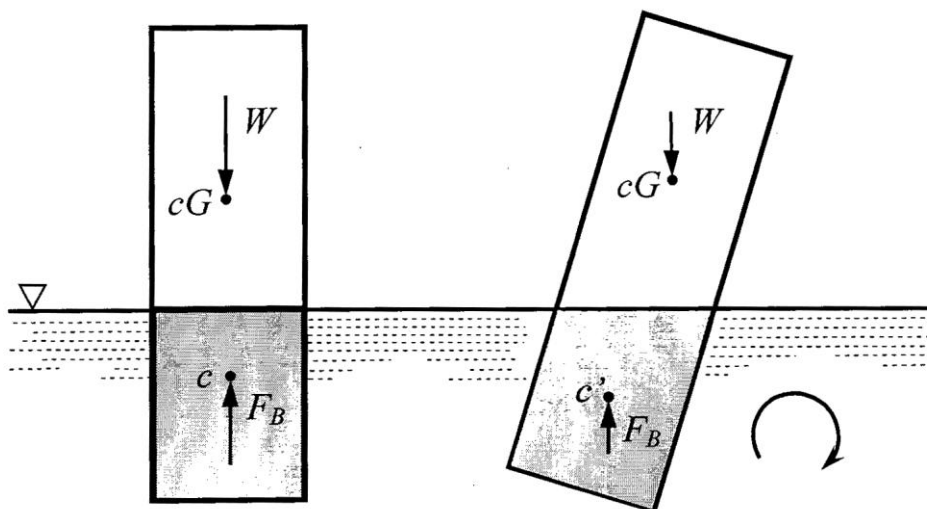


Рис.4.7

**Капілярні поверхневі сили.** Згаданий у розділі 1 поверхневий натяг вкупі із силами змочування є причиною капілярних явищ.

Сили, що діють на краплину рідини, розрізану навпіл, показано на рис. 4.8. Сила, що стягує півкраплини (діє по краю півкраплини завдяки поверхневому натягу), дорівнює  $2\pi R\sigma$ . Вона компенсує різницю  $\Delta p$  між тиском всередині краплини та зовнішнім тиском по поверхні кола  $\pi R^2$ .

$$2\pi R\sigma = (\Delta p)\pi R^2,$$

звідки

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \quad (4.5)$$

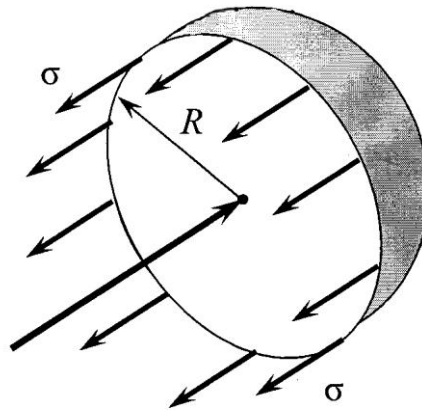


Рис. 4.8

Краплинні явища виявляються у підйомі (або опусканні) рідини у тонких трубках. Якщо тоненьку чисту скляну трубку одним кінцем занурити у посудину з водою, рівень води підніметься в трубці (рис. 4.9.а).

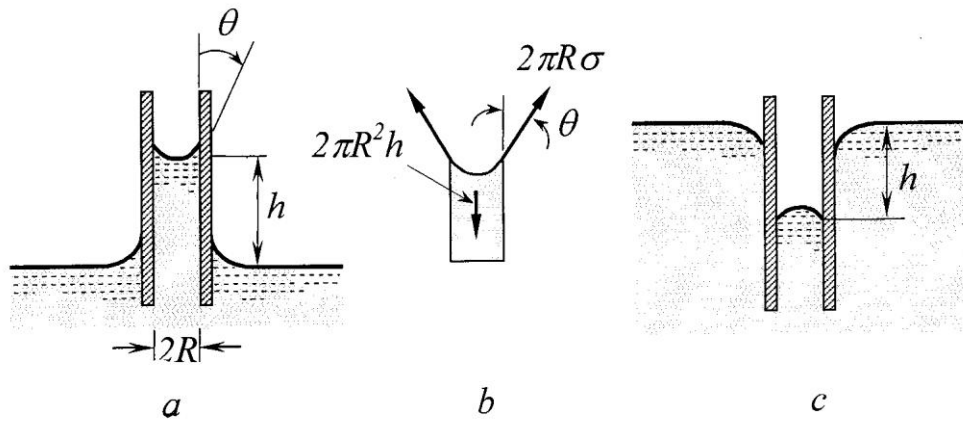


Рис. 4.9

Притягання (адгезія) між стінкою трубки та молекулами води є досить великим для додання взаємного притягання (когезії) молекул води, отже для витягання молекул вище по стінці – утворюється *угнутий меніск*, якщо рідина змочує стінку.

Висоту підйому рідини  $h$  знайдемо з балансу сил поверхневого натягу у проекції на вертикальну вісь та сили ваги:

$$\gamma \pi R^2 h = 2\pi R \sigma \cos \theta \quad (4.6)$$

Звідки

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\gamma R} \quad (4.7)$$

де  $\theta$  - кут змочування.

Для води у контактї з чистою скляною стінкою  $\theta \approx 0^\circ$ , отже

$$h = \frac{2\sigma}{\gamma R} \quad (4.8)$$

Наведемо табличку  $h = f(R)$  для води

$R$	10 см	1 мм	1 мкм
$h$	0,1	10мм	$1,4 \cdot 10^4$ мм = 14 м



Якщо адгезія до стінки є меншою за когезію, рідина не буде змочувати поверхню, рівень рідини в трубці буде знижуватись (рис. 4.9. с). для таких рідин  $\theta > 90^\circ$ , наприклад для ртуті  $\theta = 130^\circ$ .

Капілярні явища відіграють велику роль в багатьох гідродинамічних процесах, включно з рухом рідини у ґрунті та у інших поруватих матеріалах, із рухом крові у живих організмах, із формуванням краплин та бульбашок тощо. Однією з основних причин кипіння рідини, тобто перетворення рідини на пару всередині рідин, є сили поверхневого натягу. Відоме явище перегрівання води вище температури насичення (інколи на 10- 20К), якщо у гладенькій посудині гріти двічі дистильовану воду. Для початку кипіння потрібні **зародки** – різні шорсткості на поверхні стінки – западини чи опуклості, або газові бульбашки, що утворюються біля стінки за рахунок зменшення розчинності газів у рідині під час її нагрівання. Головне, щоб утворилася угнута поверхня, над якою тиск менший, ніж в решті рідини. За рахунок цієї різниці тисків починають збиратися молекули рідини, що мають більшу енергію – утворюється пара. Мінімальний радіус кривини зародка, за яким починає зростати парова бульбашка, визначається з рівняння (4.5):

$$R_{\min} = \frac{2\sigma}{\Delta p} \quad (4.9)$$

Для води  $R_{\min}$  має порядок  $10^{-3}$  мм.

## РОЗДІЛ 5. ГІДРОДИНАМІКА. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

Під час руху частинки рідини часто прискорюються або уповільнюються. Відповідно до другого закону Ньютона, як відомо,  $F = ma$ .

В цьому розділі будемо розглядати нев'язкий рух. Навіть під час руху води дуже часто можна нехтувати взаємним тертям частинок порівняно з силами ваги, зовнішнього тиску та іншими силами. Важливо, що нехтуючи тертям, можна нехтувати виділенням теплоти (дисипацією). Якщо на частинки діють лише сили тиску та ваги, вербально цей закон Ньютона виглядає так:

$$\begin{aligned} &\langle\langle \text{сила тиску на частинку} \rangle\rangle + \langle\langle \text{сила ваги частинки} \rangle\rangle = \\ &= \langle\langle \text{маса частинки} \rangle\rangle \times \langle\langle \text{її прискорення} \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Взаємодія між тиском, вагою та прискоренням дає численні корисні результати у гідравліці. Будемо розглядати двомірний рух, як показано на рис. 5.1,а. Вектор швидкості  $U$  є зміна положення частинки (1) на (2), поділена на час зміни положення. Сусідні частинки мають свої траєкторії.

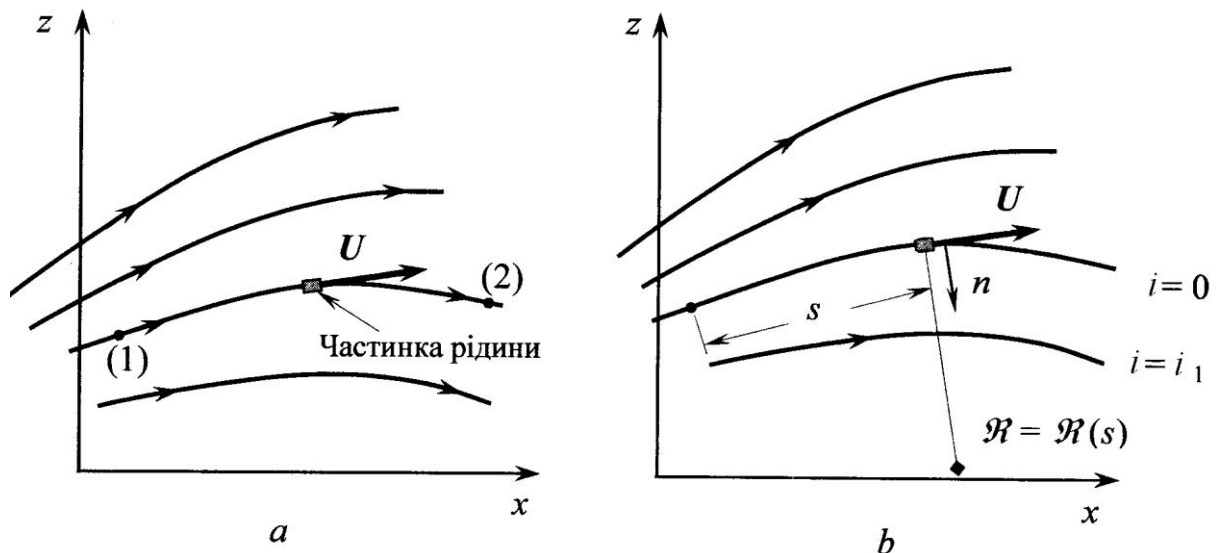


Рис. 5.1.

Лінії, дотичні до вектора  $U$  – це *лінії потоку*, або лінії струму. В багатьох випадках доцільніше використовувати систему координат «вздовж

лінії струму», як це показано на рис. 5.1,b. Рух частинки при цьому описується в термінах подоланого шляху  $s = f(t)$  та радіуса кривини траєкторії  $\mathcal{R} = f(t)$ . Швидкість руху тепер  $v = ds/dt$ , а радіус кривини залежить від форми лінії струму. Додатково до координати  $s$  використовується нормаль до неї  $n$  (рис. 5.1,b).

За визначенням прискорення частинки є відношенням зміни швидкості до часу зміни  $a = dv/dt$ . В системі  $x-z$  прискорення має два компоненти  $a_s$  – вздовж лінії струму, та  $a_n$  – поперек неї. Перший компонент враховує той факт, що швидкість частинки змінюється

$$a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} v \quad (5.1)$$

Нормальне прискорення  $a_n$  - це відцентрове прискорення, визначене у термінах швидкості частинки та радіуса кривини її шляху,  $a_n = v^2/\mathcal{R}$ , таким чином, компоненти прискорення визначаються як

$$a_s = \frac{\partial v}{\partial s} v; \quad a_n = \frac{v^2}{\mathcal{R}} \quad (5.2)$$

$\mathcal{R}$  - локальний радіус кривини лінії струму;  $s$  - відстань, що відраховується від довільної початкової точки.

**Сили, що діють вздовж лінії струму.** Розглянемо частинку рідини розміром  $\delta s \cdot \delta n \cdot \delta y$  ( $\delta y$  – нормаль до площини, рис. 5.2). Одиничні вектори позначаємо  $n$  та  $s$ . Для стаціонарного потоку другий закон Ньютона виглядає так

$$\sum F_s = \delta m a = \delta m v \frac{\partial v}{\partial s} = \rho \delta V \frac{dv}{ds} v \quad (5.3)$$

де  $\sum F_s$  – сума сил, що діють в напрямку  $s$  на частинку масою  $\delta m = \rho \delta v$  ;

$\frac{dv}{ds} v$  – прискорення в напрямку  $s$ ;  $\delta V = \delta s \cdot \delta n \cdot \delta y$  – об'єм частинки.

Рівняння (5.3) підходить тоді для рідини та газів, тобто густина може

змінюватися під час руху.

Сила ваги частинки  $\delta G = \gamma \delta V = \rho g \delta V$ , її вплив на частинки у напрямку  $s$

$$\delta G_s = -\delta G \sin \theta = -\gamma \delta V \sin \theta \quad (5.4)$$

Зовнішній тиск теж може змінюватися під час *стаціонарного руху* за рахунок сили ваги,  $p = p(s, n)$ . Якщо взяти тиск у центрі частинки за  $p$  (рис.5.2), то на їх крайніх нормальних до  $s$  поверхнях тиски дорівнюватимуть  $p + \delta p$  та  $p - \delta p$ . Оскільки частинка є «малою», досить взяти перший член ряду Тейлора, відомого за курсом математики, розкладання функції  $p(s)$ :

$$\delta p_s \approx \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\delta s}{2}$$

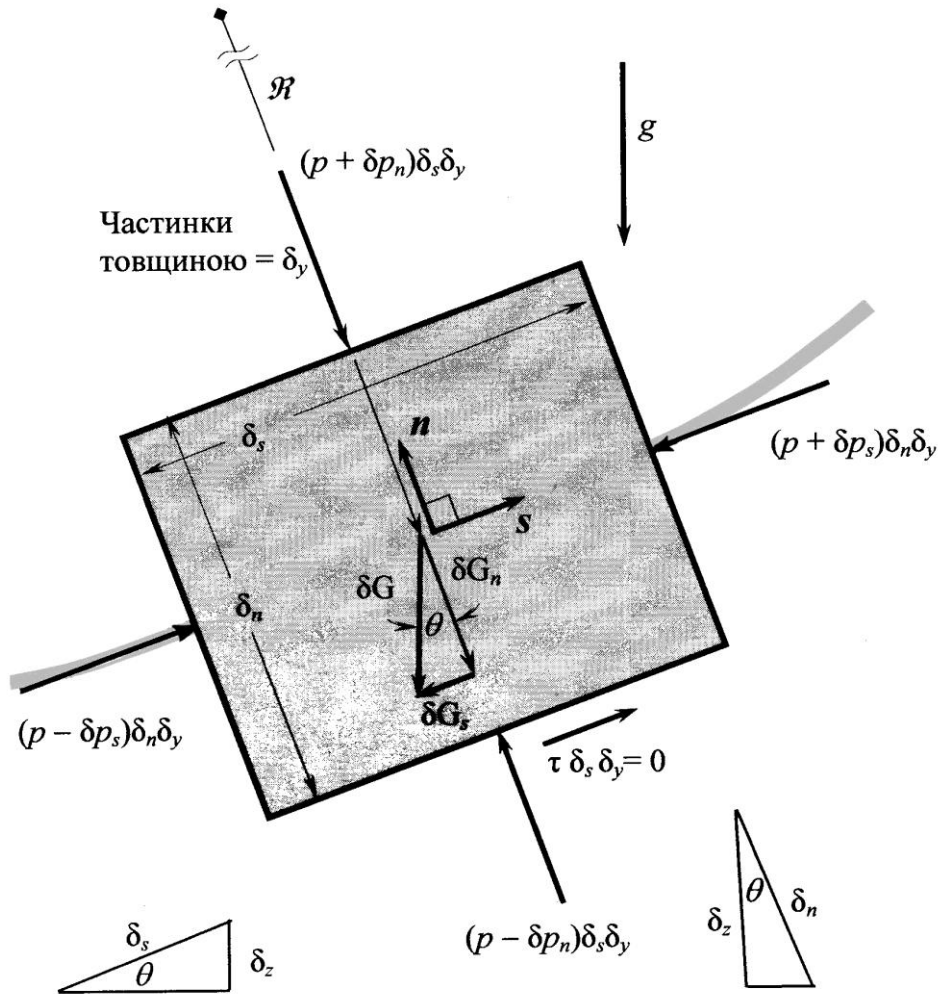


Рис.5.2

Якщо  $\delta F_{ps}$  – сила тиску на частинку у напрямку  $s$ , маємо

$$\delta F_{ps} = (p - \delta p_s) \delta n \delta y - (p + \delta p_s) \delta n \delta y = -2 \delta p_s \delta n \delta y = - \frac{\partial p}{\partial s} \delta s \delta n \delta y$$

Отже

$$\delta F_{ps} = - \frac{\partial p}{\partial s} \delta V \quad (5.5)$$

Визначимо, що абсолютний рівень  $p$  не має значення. Нагадаємо, що сили тертя є відсутніми, таким чином

$$\sum \delta F_s = \delta G_s + \delta F_{ps} = \left( - \gamma \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial s} \right) \delta V \quad (5.6)$$

Після комбінації (5.3) та (5.4)

$$- \gamma \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho v \frac{\partial v}{\partial s} \quad (5.7)$$

Рівняння (5.5) можна перетворити та інтегрувати, як видно з рис.5.2,

$\sin \theta = dz / ds$ . Далі  $v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} d(v^2) / ds$ , вздовж лінії  $sn = 0$ , так що

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right) ds + \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right) dn = \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right) ds$$

Тобто вздовж лінії струму  $\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dp}{ds}$ .

Комбінація із (5.5) дає

$$- \gamma \frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds} = \frac{1}{2} \rho \frac{d(v^2)}{ds}, \quad (5.8)$$

що можна спростити:

$$dp + \frac{1}{2} \rho d(v^2) + \gamma dz = 0 \quad (5.9)$$

та інтегрувати

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz = C \quad (5.10)$$

В загальному вигляді взяти інтеграл у (5.10) не можна, оскільки  $\rho$  не є постійною, треба взяти її залежність від  $p$ . Для ідеального газу це відоме  $p = \rho RT$ , де  $R$  — газова стала. Маємо прийняти незалежність  $\rho \neq \rho(p)$ , тобто **рідина є нестисливою** (для рідини це справедливо, для газу теж, якщо швидкість не занадто велика). Отже, для стабільного, нев'язкого, нестисливого потоку вздовж лінії струму

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \gamma z = \text{const} \quad (5.11)$$

Це є відомим **рівнянням Бернуллі**.

Загалом воно є дійсним також для неплоского (тривимірного потоку), але знов вздовж лінії струму. Коли будь-яке з обмежень порушується, використання (5.11) може привести до великих похибок.

**Сили, що діють нормально до лінії струму.**

Для багатьох потоків цими силами можна нехтувати, але немало випадків, коли можна дістати необхідну інформацію з врахуванням цих сил.

Запишемо другий закон Ньютона для частинки (рис.5.2) в напрямку  $n$

$$\sum \delta F_n = \frac{\delta m v^2}{\mathfrak{R}} = \frac{\rho \delta V v^2}{\mathfrak{R}} \quad (5.12)$$

де  $\sum \delta F_n$  — сума усіх компонентів сил, що діють на частинку.

Вважаємо, що потік є нестационарним з прискоренням по нормалі

$$a_n = v^2 / \mathfrak{R}$$

Знову вважаємо, що актуальними є тільки сили тиску та ваги.

Компонент сили ваги  $\delta G_s = -\delta G \cos \theta = -\gamma \delta V \cos \theta$

Якщо тиск в центрі частинки  $p$ , то зверху буде  $p + \delta p$ , а знизу  $p - \delta p$ ,

де

$$\delta p_n = \frac{\partial p}{\partial s} \cdot \frac{\delta n}{2}.$$

Тепер  $\sum \delta F_{pn}$  – є сила тиску, що діє на частинку по нормалі до шляху, визначається як

$$\delta F_{pn} = (p - \delta p_n) \delta s \delta y - (p + \delta p_n) \delta s \delta y = -2 \delta p_n \delta s \delta y = -\frac{\partial p}{\partial n} \delta s \delta n \delta y,$$

або

$$\delta F_{pn} = -\frac{\partial p}{\partial n} \delta V$$

Звідси сила, що діє на частинку по нормалі (рис. 5.2)

$$\sum \delta F_{pn} = \delta G_n \delta F_{pn} = \left( -\gamma \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial n} \right) \delta V \quad (5.13)$$

Комбінації (5.10) та (5.11) та врахування, що по лінії  $n \cos \theta = dz / dn$  (рис. 5.2) дають

$$-\gamma \frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\rho v^2}{\mathfrak{R}} \quad (5.14)$$

З (5.12) видно, що більші швидкість чи густина, або менший радіус кривини потребують більшого дисбалансу сил, щоби почався рух. Наприклад, якщо нехтувати гравітацією (для газів дуже часто) або рух є горизонтальним ( $dz / dn = 0$ ) рівняння (5.12) стає

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\rho v^2}{\mathfrak{R}}$$

Це означає, що тиск зростає з віддаленням від центру кривини ( $\frac{\partial p}{\partial n}$  є від'ємним, оскільки  $\frac{\rho v^2}{\mathfrak{R}}$  є додатнім). Таким чином тиск ззовні торнадо

(нормальний атмосферний тиск) є більшим за тиск біля центру торнадо (може бути небезпечний низький вакуум). Ця різниця тисків потрібна для компенсації відцентрового прискорення, пов'язаного із криволінійною лінією струму.

Помножимо (5.12) на  $dn$  та використаємо факт, що  $\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{dp}{dn}$  якщо  $s$  є постійною, спробуємо інтегрувати в напрямку  $n$ :

$$\int \frac{dp}{\rho} + \int \frac{v^2}{\mathfrak{R}} dn + gz = const \quad \text{поперек потоку} \quad (5.15)$$

Для завершення інтегрування треба знати залежності  $\rho = \rho(p)$  та  $\mathfrak{R}(n)$ .

Для нестисливого потоку  $\rho = const$ , перший інтеграл дорівнює  $p/\rho$ . Але без інформації щодо залежностей  $v = v(s, n)$  та  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(s, n)$  другий інтеграл взяти не можна.

Отже, форма другого закону Ньютона по нормалі до стаціонарного, нев'язкого, нестисливого потоку

$$p + \rho \int \frac{v^2}{\mathfrak{R}} dn + \gamma z = const \quad \text{поперек потоку} \quad (5.16)$$

**Рівняння Бернуллі** (5.11) є математичним твердженням відомого співвідношення між роботою та енергією:

***Робота, що проведена із частинкою усіма силами, які на неї діють, дорівнює зміні кінетичної енергії частинки.***

Доданки  $\gamma z$  та  $p$  у (5.11) відповідають роботі, проведеній відповідно, силами ваги та тиску, а середній доданок – кінетичній енергії частинки. Очевидно, що рівняння Бернуллі більш відповідає першому та другому закону термодинаміки (рівнянням енергії та ентропії), ніж другому закону Ньютона.

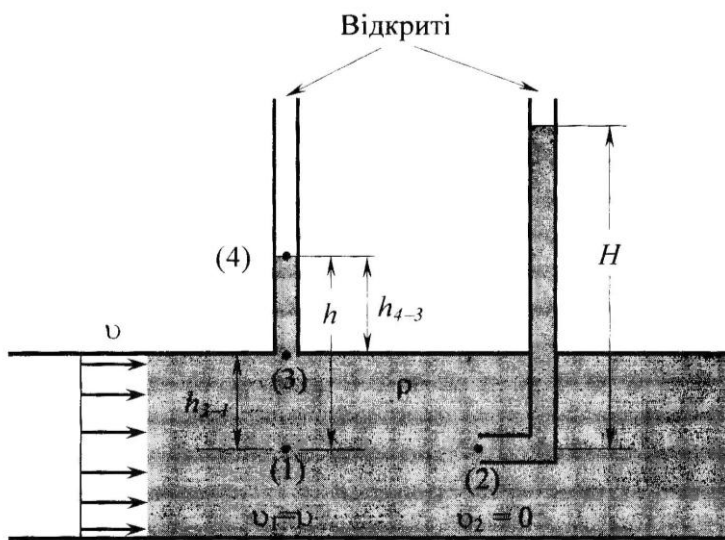


## Статичний, стагнаційний (загальний), динамічний тиски.

Корисними поняттями, пов'язаними із рівнянням Бернуллі, є стагнаційний та динамічний тиски. Ці поняття виникають, якщо перетворити кінетичну енергію потоку у підйом тиску загальмованої рідини.

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \gamma z = \text{const}$$

Кожний член рівняння Бернуллі має одиниці сили тиску на одиницю поверхні — Н/м<sup>2</sup>. Перший член  $p$  — це актуальний термодинамічний тиск у



рідині, що рухається. Аби виміряти тиск, треба рухатися разом з рідиною, тобто бути статичним (нерухомим) відносно рідини. Тому цей тиск має назву **статичний**. Інший - реальний - шлях поміряти його - просвердлити отвір у стінці каналу та закріпити п'єзометричну трубку

(рис.5.3, точка 3). В точці 1 потоку тиск  $p = \gamma h_{3-1} + p_3$ , тобто такий самий, якби рідина була нерухома.

За схеми манометра (розділ 2) зрозуміло, що  $p_3 = \gamma h_{4-3}$ .

Оскільки  $h_{3-1} + h_{4-3} = h$ , маємо  $p_1 = \gamma h$ .

Третій член (5.11),  $\gamma z$  називають **гідростатичний тиск**. Насправді це не є тиск, але показує зміну тиску, можливу завдяки зміні потенціальної енергії рідини внаслідок зміни вертикального рівня.

Другий член рівняння Бернуллі,  $\rho v^2/2$  має назву **динамічний тиск**. На рис. 5.3 він має місце в точці (2) на кінці маленької трубки, що спрямована назустріч потоку, рідина в трубці піднімається на висоту  $H$  та буде

нерухомою, включно із точкою (2). Оскільки  $v_2 = 0$ , маємо точку **стагнації** (2) (фр. stagnation, від лат. stagno – роблю нерухомим, зупиняю; лат. stagnum – застійна вода).

Запишемо рівняння Бернуллі між точками (1) та (2), з врахуванням  $v_2 = 0$  та  $z_1 = z_2$

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v^2}{2},$$

тобто тиск в точці стагнації більше статичного на величину динамічного тиску. Тому у вітчизняній практиці тиск стагнації (застою) називають **повним тиском**.

Точку стагнації можна знайти на будь-якому нерухомому твердому тілі, зануреному у потік (рис. 5.4). Частина рідини обтікає об'єкт зверху, частина знизу. Для симетричного об'єкту (як сфера на рис.5.4,а) ця точка є лобовою, для несиметричного, як літак (рис. 5.4,б), її розташування не є очевидним.

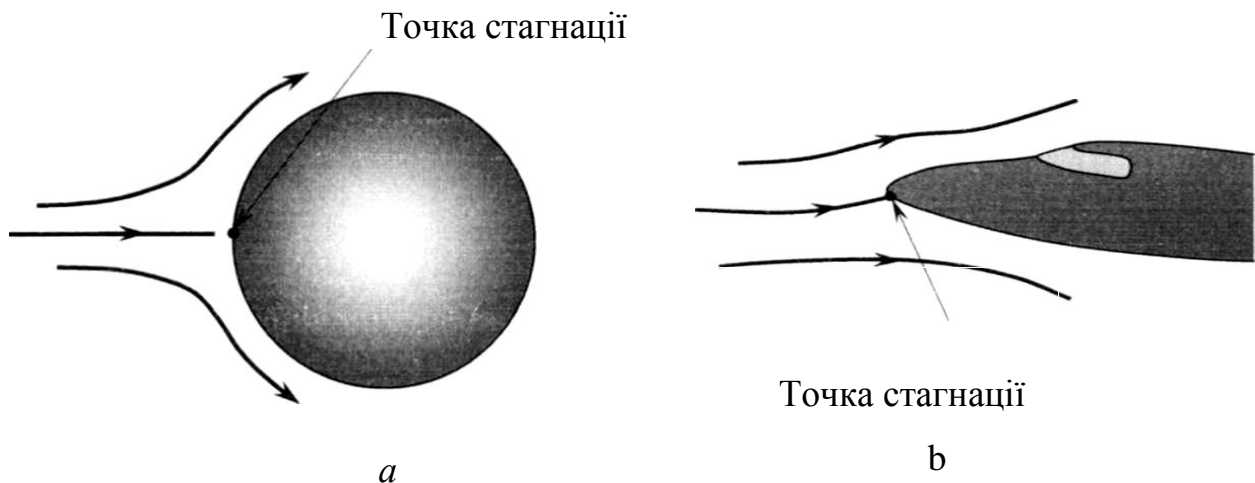


Рис.5.4

Якщо впливом рівня можна нехтувати, тиск стагнації є найбільшим в потоці. Він відповідає повному перетворенню кінетичної енергії на підйом тиску. Сума статичного, гідростатичного та динамічного тисків називається **повним тиском**  $p_{\text{п}}$ . Рівняння несе твердження, що повний тиск залишається

незмінним вздовж лінії струму

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \gamma z = p_n = \text{const} \quad \text{вздовж лінії струму} \quad (5.17)$$

Інформація про статичний та стагнаційний тиск дозволяє підрахувати швидкість потоку. На цьому принципі працює статична трубка Піто (трубка Піто-Прандтля).

За її допомогою можна вимірювати величини  $p_3$  та  $p_4$  або одразу їх різницю. Центральна трубка дає інформацію про тиск стагнації, оскільки вона відкрита до потоку. Якщо зміною рівня нехтувати

$$p_3 = p + \frac{\rho v^2}{2},$$

де  $p$  та  $v$  в точці (2)

Зовнішня трубка має отвір або кілька отворів збоку, в точці (1). Нехтуючи різницею рівнів між (1) та (4), маємо

$$p_4 = p_1 = p$$

Комбінація двох останніх рівнянь дає

$$p_3 - p_4 = \frac{\rho v^2}{2}$$

Звідки

$$v = \sqrt{\frac{2(p_3 - p_4)}{\rho}} \quad (5.18)$$

Рівняння (5.17) найчастіше використовують у вигляді

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \gamma z_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \gamma z_2 + \Delta h \quad (5.19)$$

Наприклад, треба визначити швидкість витікання рідини з великого

резервуара (рис.5.5). Застосування (5.17) для цієї задачі дає

$$\gamma h = \frac{\rho v^2}{2}$$

оскільки  $z_1 = h$ ,  $z_2 = 0$ ,  $v_1 = 0$  (діаметр резервуара значно більший, ніж отвір); надлишковий тиск  $p_1 = 0$  (резервуар відкритий до атмосфери). Отримаємо

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma h}{\rho}} = \sqrt{2gh} \quad (5.20)$$

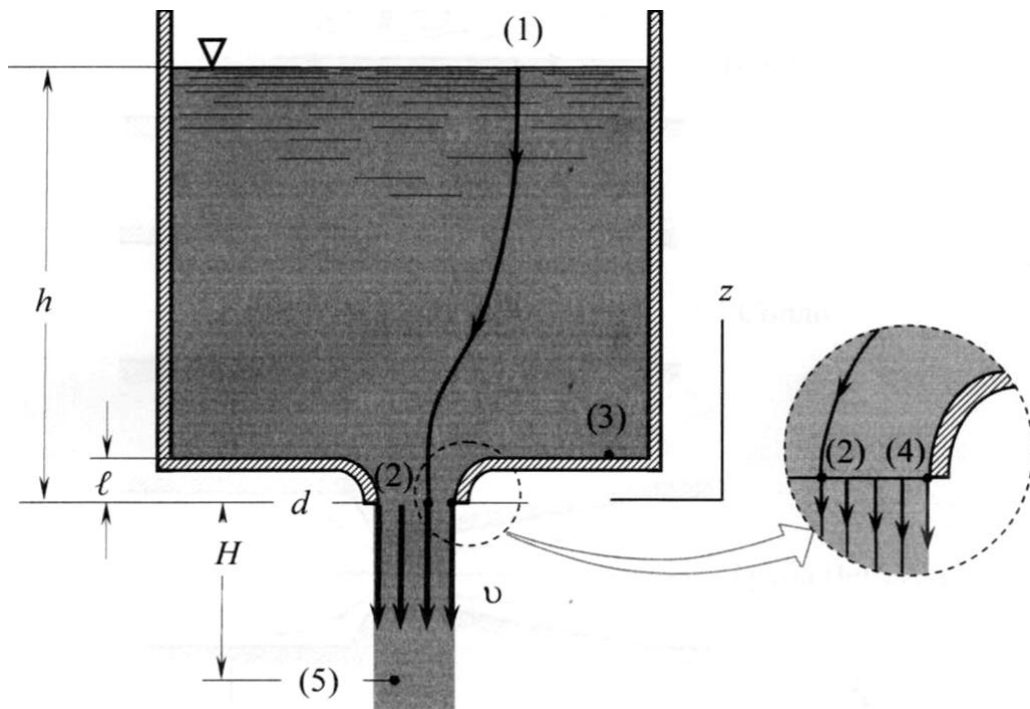


Рис. 5.5

Оразу після отвору потік продовжує вільно падати, так що  $p_5 = 0$ , при цьому швидкість зростає відповідно до

$$v = \sqrt{2g(h + H)}$$

Рівняння (5.20) можна одержати, якщо записати рівняння Бернуллі між точками (3) та (4), оскільки  $z_4 = 0$ ,  $z_3 = l$ ,  $v_3 = 0$ , а з гідростатики маємо

$$p_3 = \gamma(h - l).$$

Нагадаємо з курсу фізики, що будь який об'єкт у вільному падінні на висоту  $h$  (у вакуумі) розвиває швидкість  $v = \sqrt{2gh}$

Рівняння Бернуллі використовується також для вимірювання витрати рідини, для створення місцевого гідравлічного опору використовують насадки (шайби) та сопла (рис. 5.6).

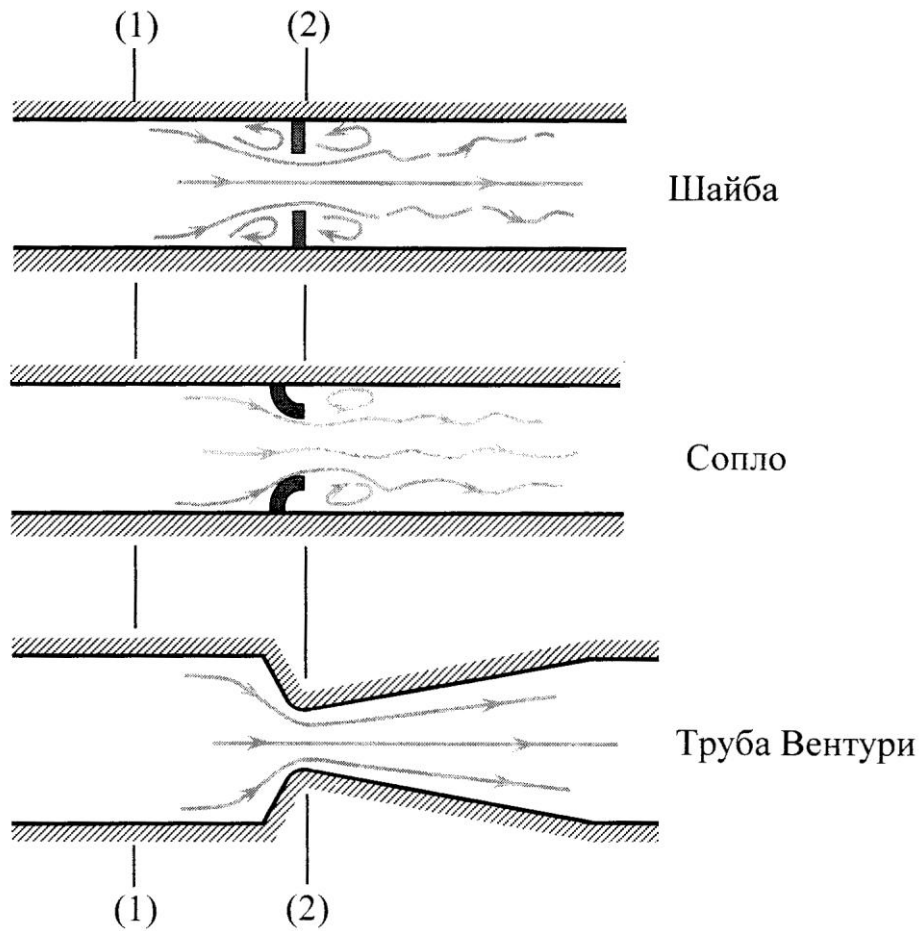


Рис.5.6

Для горизонтальної труби ( $z_1 = z_2$ ), нев'язкого стаціонарного та нестисливого потоку маємо

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Якщо профілі (епюри) швидкостей в перерізах (1) та (2) прийняти плоскими, об'ємна витрата  $Q$

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

де  $A_2$  із малою ( $A_2 < A_1$ ) площею перерізу (2). Комбінація двох останніх рівнянь дає

$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho \left[ 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}} \quad (5.21)$$

Оскільки  $\rho$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  є відомими, досить поміряти ( $p_1 - p_2$ )

Реальна витрата, як би старанно не був виконаний прилад, на 1–2% менше, ніж підраховано.

## РОЗДІЛ 6. ТЕОРІЯ ПОДІБНОСТІ. РЕЖИМИ РУХУ РІДИН. МОДЕЛЮВАННЯ. КАВІТАЦІЯ.

Два явища називаються подібними, якщо по характеристиках одного можна одержати характеристики іншого шляхом простого перерахунку, аналогічного переходу від однієї системи одиниць до другої. В подібних явищах протікають процеси здебільшого однакової природи.

Розглянемо найпростіший випадок застосування цих методів. Відомо, що не обов'язково лізти на дерево чи гору, щоб виміряти їх висоту, досить побудувати два подібних трикутники (рис. 6.1), в одному з яких шуканий розмір є катетом. Перехід від малого трикутника до великого, обидва катети якого легко виміряти, і який можна назвати моделлю для великого (зразка), відбувається за безрозмірним відношенням катетів. Цей метод моделювання на основі *геометричної подібності* використовується в геодезії та географії під назвою *триангуляція*.

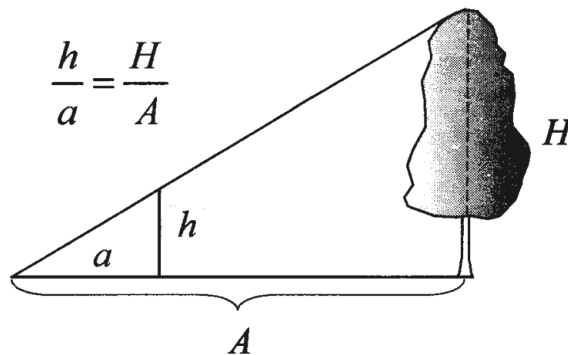


Рис. 6.1

Крім геометричної подібності, існують різні види *фізичної подібності*: гідродинамічна, часова, теплова, подібність полів потенціалів, умов однозначності тощо. Для кожного виду можна визначити безрозмірний комплекс характеристик, *що не змінюються* за величиною при переході від одного явища чи процесу до йому подібного. Ці комплекси називають *числами* або *критеріями подібності*. Але слово «критерій» є спорідненим із словом «криза», тому не усі ці комплекси можна назвати критеріями,

оскільки далеко не всі з них за своєю величиною свідчать про наявність якоїсь кризи процесу або явища. Тому будемо користуватися терміном «число подібності» і лише інколи «критерій подібності». Для наведеного прикладу геометричної подібності безрозмірним числом подібності є відношення катетів двох трикутників.

Прикладом геометричної подібності буде стаціонарна течія нестисливої ньютонівської рідини в довгій круглій горизонтальній трубі із гладкими стінками. Важливою характеристикою цієї системи, потрібною для можливого проектування трубопроводів, є падіння тиску (напір) на одиницю довжини труби, яке є необхідним для подолання сил тертя частинок одна об одну та об стінки труби. На перший погляд це дуже проста задача, але теоретичним шляхом її повністю розв'язати неможливо, навіть за допомогою потужного комп'ютера, без використання експериментальних даних.

Першим кроком у плануванні дослідів для розв'язку задачі є рішення відносно того, які фактори або змінні впливають на  $\Delta p_\ell$  – падіння тиску на одиницю довжини труби. Це можуть бути внутрішній діаметр труби  $D$ , густина рідини  $\rho$ , її в'язкість  $\mu$ , а також середня швидкість рідини  $v$ . Звідси

$$\Delta p = f(D, \rho, \mu, v)$$

Вигляд функції  $f$  є невідомим, але його з'ясування і є задачею експерименту.

Якщо провадити так звані однофакторні експерименти, треба змінювати лише один з факторів у дужках, а решту підтримувати кожний дослід на однаковому рівні. Результати серії однофакторних експериментів наведено на рис. 6.2. Вони є дійсними тільки для труби та рідин, які використовувались в досліді та не можуть бути розв'язком задачі. Крім того, деякі з однофакторних дослідів провести дуже важко. Так, для одержання залежності (рис.6.2,с) необхідно було змінювати густину рідини, але її в'язкість підтримувати на постійному рівні. Кінець кінцем це вдалося зробити (якби ні - це означало б, що ці два фактори є взаємозалежні). В



подальшому побачимо, що усі впливові фактори мають бути незалежними.

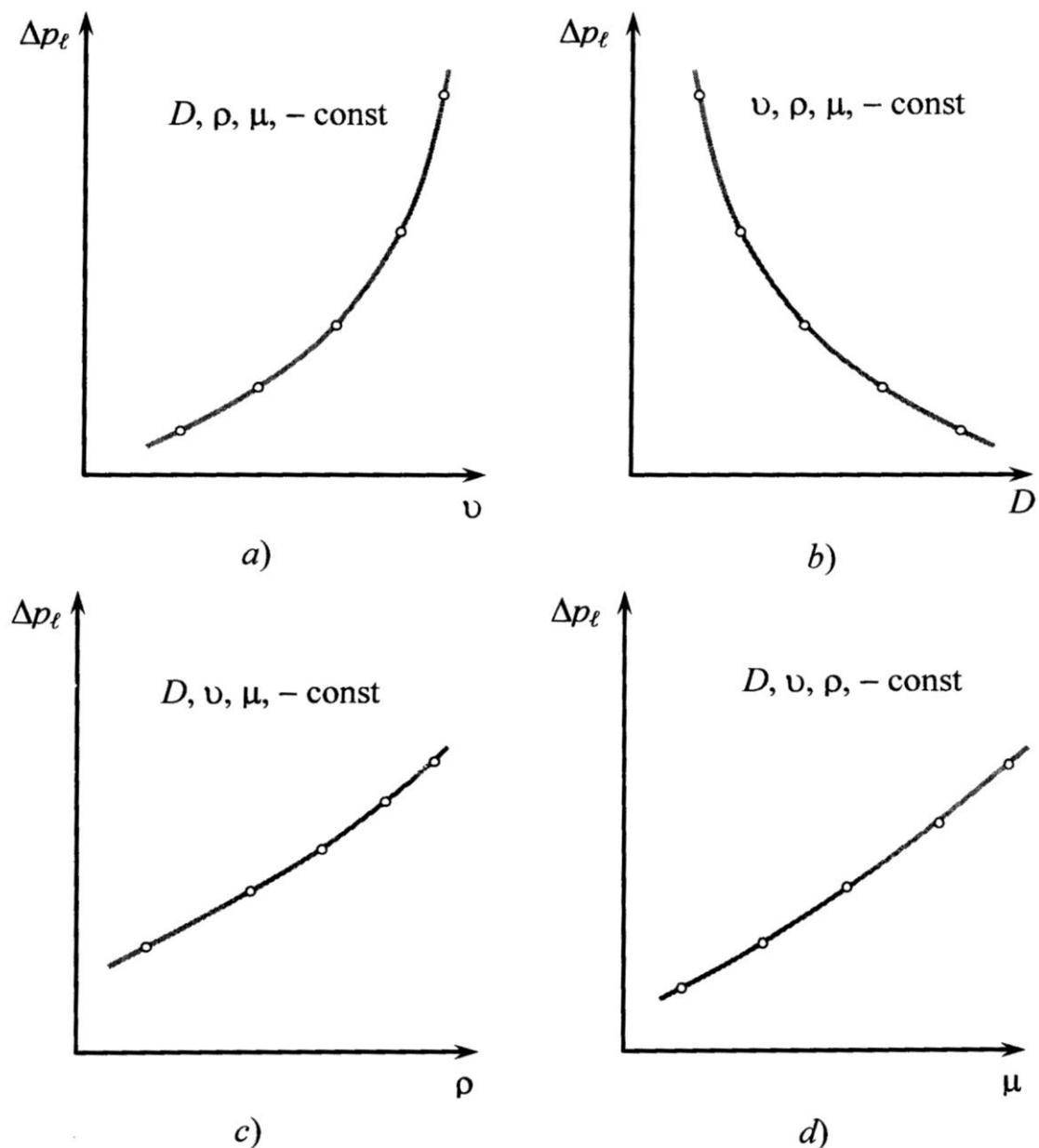


Рис.6.2

Задача розв'язується комбінацією незалежних факторів у безрозмірні добутки або *безрозмірні групи*

$$\frac{D \Delta p_\ell}{\rho v^2} = \varphi \left( \frac{\rho v D}{\mu} \right) \quad (6.2)$$

Замість п'яти змінних маємо тільки дві. Тепер потрібно провадити досліди,

змінюючи групу  $\frac{\rho v D}{\mu}$  та визначаючи відповідну групу  $\frac{D \Delta p_\ell}{\rho v^2}$ .

Результат досліджень наведено на рис. 6.3. Ця крива відповідає будь-якій комбінації гладких круглих труб та нестисливих ньютонівських рідин. Для її одержання ми могли взяти трубу зручних розмірів та дешеву рідину (одну трубу та одну рідину!)

Основою цього спрощення є дослідження розмірностей розглянутих змінних. З курсу фізики відомо, що кількісний опис фізичних властивостей можна зробити на базі розмірностей маси  $M$ , довжини  $L$  та часу  $T$ . До них можна додати розмірність сили  $F$ , оскільки з другого закону

$$F \cong MLT^{-2} \quad (6.3)$$

Знак  $\cong$  будемо використовувати в рівняннях розмірностей:

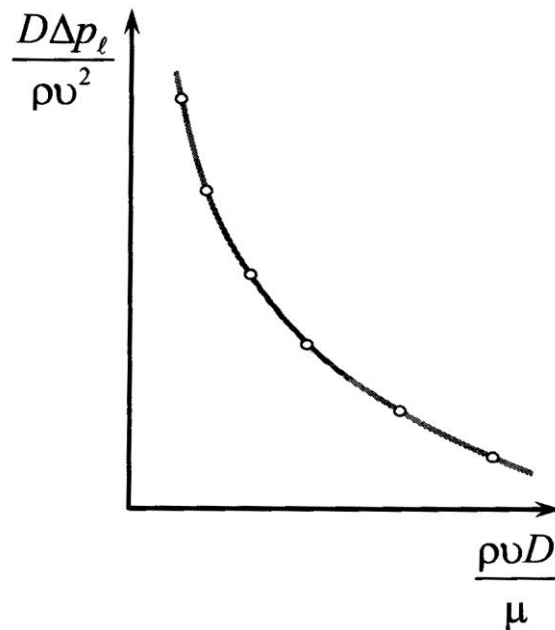


Рис. 6.3

$\Delta p_\ell \cong FL^{-3}$ ;  $D \cong L$ ;  $\rho \cong FL^{-4} T^2$ ;  $v \cong LT^{-1}$ . Переконаємося, що групи в (6.2) є дійсно безрозмірними

$$\frac{D \Delta p_\ell}{\rho v^2} \cong \frac{L(F / L^3)}{(FL^{-4} T^2)(LT^{-1})^2} \cong F^0 L^0 T^0,$$

$$\frac{\rho v D}{\mu} \stackrel{\circ}{=} \frac{L(FL^{-4}T^2)(LT^{-1})(L)}{(FL^{-2}T)} \stackrel{\circ}{=} F^0 L^0 T^0.$$

Перевагою цих груп є також те, що ними можна користуватися у будь якій системі одиниць.

**Основні числа подібності в гідравліці** складаються з змінних: прискорення сили тяжіння  $g$ , характерна довжина  $\ell$ , густина  $\rho$ , частота коливань потоку  $\omega$ , тиск  $p$  (або  $\Delta p$ ), швидкість звуку  $c$ , поверхневий натяг  $\sigma$ , швидкість  $v$ .

### **Число Рейнольдса**

$$Re = \frac{\rho v \ell}{\mu} = \frac{v \ell}{\nu} \quad (6.4)$$

є мірою відношення сил інерції та сил в'язкості або молекулярного тертя, що діють на елемент рідини. Це рідкий випадок, коли число подібності можна назвати критерієм, оскільки воно визначає структуру потоку та перехід від ламінарного (превалюють сили в'язкості) до турбулентного режиму, коли основну роль грають сили інерції.

### **Число Фруда**

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \ell}} \quad (6.5)$$

є мірою співвідношення між силами інерції та силою тяжіння. Остання відіграє істотну роль, якщо потік має вільну поверхню (поведінка води біля судна та подібні задачі).

### **Число Ейлера**

$$Eu = \frac{P}{\rho v^2} \quad (6.6)$$

є співвідношенням між силою тиску та силами інерції. Часто це число записують у вигляді  $Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$ . Ще одна подібна форма запису зустрічається

під час розглядання *кавітації*  $\Delta p / \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$ , із назвою *число кавітації*.

### **Число Маха**

$$Ma = \frac{v}{c}$$

являє собою відношення швидкості течії в даній точці газового потоку до місцевої швидкості поширення звуку в рухомому середовищі.

Зауважимо, що число Маха та число Ейлера пов'язані між собою через показник адіабати  $k = c_p/c_v$ :

$$Eu = \frac{1}{k} \frac{1}{Ma^2}$$

### **Число Струхаля**

$$St = \frac{\omega \ell}{v} \quad (6.7)$$

є мірою співвідношення сил інерції за рахунок нестабільності (осциляції) потоку, тобто локального прискорення та сили інерції за рахунок зміни швидкості від точки до точки в полі струму (конвективне прискорення). Це число є актуальним під час вивчення різного роду вихорів.

### **Число Вебера**

$$We = \frac{\rho v \ell}{\sigma} \quad (6.8)$$

є співвідношенням сил інерції та сил поверхневого натягу, що діють на елемент рідини. Це число є важливим, якщо маємо розглядати тонкі плівки рідини або утворення бульбашок чи краплин.

Характерний розмір  $\ell$  в числах подібності гідравліки – це зазвичай товщина пристінного шару – прошарку, в якому епюр швидкості відрізняється від основного ядра потоку.

Зазначимо, що товщину пристінного шару важко виміряти, тому замість неї підбирають інший, відомий геометричний розмір, пропорційний

цій товщині хоч би в якійсь мірі (діаметр, довжина, висота, тощо). Цей розмір має назву **визначальний розмір системи**. Важливо, щоб в обох системах ця міра пропорційності була однаковою, може залежати від температури, отже треба брати  $\ell$  при якійсь характерній температурі системи, яка називається **визначальною температурою**. Звичайно, температура ця може бути різною для зразка та моделі, але правило її визначення повинно бути одним і тим же.

**Перша теорема подібності** (Ньютона) гласить: для подібних явищ однойменні числа подібності однакові.

Числа подібності часто ділять на визначальні та визначувані. До **визначальних чисел** (їх інколи звать власне критеріями подібності) належать комплекси, що характеризують ті сторони явища, які у дослідах є заздалегідь відомими, тобто становлять умови однозначності для задачі, що розв'язується. **Визначуваними** є числа подібності, в які входять невідомі характеристики явища. Коли, наприклад, моделюванню підлягає опір між рідиною та стінкою труби, то до визначальних чисел відносять критерій Рейнольдса,  $Re = \frac{vd}{\nu}$  - бо швидкість рідини  $v$  та діаметр труби  $d$  задаються у дослідах, а кінематична в'язкість  $\nu$  відшукується по таблиці за визначальною температурою. Визначуваним числом буде число Ейлера, оскільки воно містить шуканий перепад тиску  $\Delta p$ .

**Друга теорема подібності** (Бекінгема - Федермана) гласить: рішення системи рівнянь, що описують різні сторони явища, можна зобразити у вигляді функції чисел подібності, що складені на підставі цих рівнянь.

Якщо продовжити наш приклад, напір треба шукати з рівняння подібності

$$Eu = f(Re) \quad (6.9)$$

Вигляд цієї функції найчастіше беруть степеневим (інша назва – логарифмічна функція, оскільки маємо лінійний зв'язок між логарифмами аргументів та шуканої величини). Такий зв'язок є найбільш ймовірним у

різних галузях природи та техніки. Так, у гармонійному музикальному ладі існує лінійний зв'язок не між висотами основних тонів звуків однакової назви та різних октав, але між логарифмами цих висот. Іншим прикладом може бути так званий *ряд найкращих чисел*, що був узаконений як обов'язковий ще у 1956 році (ГОСТ 8032-56), але з яким не усіх студентів навіть знайомлять. На відміну від натурального ряду чисел він є логарифмічною шкалою, що дає однакову відносну похибку для будь-якого члену ряду. Ряд має чотири градації: від R5, в якій відстань між 1 та 10 чи 10 та 100 і так далі поділена на п'ять інтервалів, до найбільш детальної R40. До чисел з тієї чи іншої градації треба округляти розміри та продуктивність апаратів, масштаби переходу від зразку до моделі тощо, а градацію вибирати відповідно до точності обчислень чи експериментів. Із самими рядами можна ознайомитись у другому виданні посібника В.М. Стабникова, В.Д. Попова та ін. "Процессы и аппараты пищевых производств" (Москва, 1966).

**Третя теорема подібності** (Кірпічова-Гухмана) указує на ознаки подібності явищ: «Явища подібні між собою, якщо їх описують однакові рівняння, а числа подібності є попарно рівними».

### **Практичні приклади**

Моделі широко використовуються в гідравліці. Більш важливі інженерні проекти щодо гідравлічних споруд – будування літаків, суден, дослідження річок, гаваней, дамб, забруднення повітря та води, використовують моделі. Назва «модель» має різні аспекти, «інженерна модель» – це подання фізичної системи (прототипу), яке може бути використано для прогнозування поведінки системи у певному бажаному аспекті. Хоча математична або комп'ютерна модель теж відповідають цьому визначенню, яке будемо розглядати як фізичні моделі, які відтворюють прототип, але мають інші розміри, можливо іншу рідину, її швидкість, тиск тощо. Звичайно вони менші за прототип (зразок) та дешевші, але якщо досліджується, наприклад, рух червоних кров'яних тілець, діаметр яких біля 8 мкм модель треба робити більшу за прототип.

Теорія моделювання заснована на аналізі розмірностей та теоремах подібності. На підставі теореми подібності Бекінгема-Федермана можна записати для прототипу

$$\Pi_1 = \varnothing(\Pi_2, \Pi_3 \dots \Pi_n) \quad (6.10)$$

Використаємо метод подібного перетворення, тобто для моделі

$$\Pi_{1,m} = \varnothing(\Pi_{2,m}, \Pi_{3,m} \dots \Pi_{n,m}) \quad (6.11)$$

Функція  $\varnothing$  відповідно до теореми Кірпічова-Гухмана має бути для прототипу та моделі однаковою. До числа  $\Pi_1$  входить змінна, яку ми хочемо з'ясувати під час роботи з моделлю. Отже відповідно до таких умов

$$\begin{aligned} \Pi_{2,m} &= \Pi_2 \\ \Pi_{3,m} &= \Pi_3 \\ &\vdots \\ \Pi_{n,m} &= \Pi_n \end{aligned} \quad (6.12)$$

Тоді, оскільки функції  $\varnothing$  однакової для зразка та моделі, маємо

$$\Pi_1 = \Pi_{1,m} \quad (6.13)$$

Рівняння (6.13) є рівнянням передбачення, воно показує, що вимірювана величина  $\Pi_{1,m}$  одержана на моделі, дорівнюватиме відповідному  $\Pi_1$  прототипу доти, поки решта чисел подібності будуть попарно однаковими.

Умови, виражені рівняннями (6.12) є **умовами проектування моделі**, тому мають назву **вимоги подібності** або **закони моделювання**.

Як приклад розглянемо задачу визначення гідродинамічного опору тонкої прямокутної пластини розміром  $b \times h$ , яка розміщена перпендикулярно до потоку із швидкістю  $v$ . Аналіз розмірностей для такої задачі викладено в попередньому розділі, тому можна записати

$$\mathfrak{Z} = f(b, h, \mu, \rho, v)$$

Застосування  $\pi$  – теореми призводить до

$$\frac{\mathfrak{F}}{b^2 \rho v^2} = \varphi \left( \frac{b}{h}, \frac{\rho v b}{\mu} \right) \quad (6.14)$$

Проектування моделі треба робити так, аби за її допомогою визначити опір прототипу (який має інші розміри, ніж модель). Оскільки рівняння (6.14) годиться також для моделі, маємо для моделі

$$\frac{\mathfrak{F}_m}{b_m^2 \rho_m v_m^2} = \varphi \left( \frac{b_m}{h_m}, \frac{\rho_m v_m b_m}{\mu_m} \right) \quad (6.15)$$

Умови проектування моделі або **вимоги подібності** такі:

$$\frac{b_m}{h_m} = \frac{b}{h}, \quad \frac{\rho_m v_m b_m}{\mu_m} = \frac{\rho v b}{\mu}$$

Розміри моделі отримуємо з першої вимоги:

$$b_m = \frac{h_m}{h} b \quad (6.16)$$

Відношення висот  $\frac{h_m}{h}$  обираємо з міркувань дешевизни, зручності тощо, але тоді ширина моделі має бути обрахованою за (6.15).

Друга вимога подібності показує, що модель та зразок мають працювати при однакових числах Рейнольдса. Звідси швидкість потоку в моделі треба визначати з рівняння

$$v_m = \frac{\mu_m}{\mu} \frac{\rho}{\rho_m} \frac{b}{b_m} v \quad (6.17)$$

Зауважимо, що треба задовольнити обидві вимоги – щодо геометричного масштабу з (6.16) та масштабу швидкості з (6.17).

За умови виконання обох вимог, рівняння завбачення для гідравлічного опору має вигляд



$$\frac{\mathfrak{Z}}{b^2 \rho v^2} = \frac{\mathfrak{Z}_m}{b_m^2 \rho_m v_m^2},$$

або

$$\mathfrak{Z} = \left( \frac{b}{b_m} \right)^2 \left( \frac{\rho}{\rho_m} \right) \left( \frac{v}{v_m} \right)^2 \mathfrak{Z}_m.$$

Таким чином, вимірний на моделі гідравлічний опір пластини треба помножити на квадрат відношення ширини, на відношення густин рідини в прототипі та моделі, на квадрат відношення швидкостей рідини в прототипі та моделі.

Важливо, аби усі актуальні числа подібності були однаковими для зразка та моделі. Геометричні масштаби мають охоплювати усі найдрібніші деталі - шорсткості поверхонь, опуклості або западини мають важливий вплив на характер потоку. Інколи важко, майже неможливо, буває відтворити ці деталі, особливо шорсткість, оскільки її важко описати та контролювати.

Другий тип чисел подібності (як число Рейнольдса) містить відношення сил. Тому, якщо числа  $Re$  для двох потоків є однаковими, відношення сил в'язкості дорівнює відношенню сил інерції. Це стосується чисел Фруда та Вебера. Якщо це правило задовольняється - маємо **динамічну подібність** моделі та прототипу. Це означає, що за наявності геометричної та динамічної подібності існує **кінематична подібність**. Тобто відповідні відношення швидкостей ( $v_m/v$ ) та прискорень ( $a_m/a$ ) мають дотримуватися в усьому полі потоку.

### Масштаби моделей.

Відоме співвідношення

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\ell_{1m}}{\ell_{2m}} \quad (6.18)$$

можна записати як

$$\frac{\ell_{1m}}{\ell_1} = \frac{\ell_{2m}}{\ell_2} \quad (6.19)$$

Відношення (6.21) називають лінійним масштабом. Для справжньої моделі цей масштаб треба дотримуватись відносно кожного розміру. Інші масштаби: швидкості  $v_m/v$ , густини  $\rho_m/\rho$ , в'язкості  $\mu_m/\mu$  тощо. Просто казати «масштаб» без вказівки «чого масштаб» - не можна. Будемо позначати масштаби  $\lambda_\ell$ ,  $\lambda_v$ ,  $\lambda_\rho$ ,  $\lambda_\mu$  та ін.

### Практичні аспекти використання моделей.

В багатьох випадках моделі спрощують порівняно з прототипом. Інколи цьому сприяє інформація, яку можна одержати для самого прототипу. Після випробування моделі цю інформацію можна використати на дієздатність прототипу. Інший шлях одержання інформації - будівництво кількох моделей, кожна з яких є «прототипом» для наступної.

Інколи однаковість попарно усіх чисел подібності виконати неможливо - тоді мають справу із *спотвореною моделлю*. Класичний приклад - вивчення течії у відкритому каналі, оскільки актуальним є числа  $Re$  та  $Fr$

Числа Фруда для зразка та моделі

$$\frac{v_m}{\sqrt{g \ell_m}} = \frac{v}{\sqrt{g \ell}} \quad (6.20)$$

Якщо модель та прототип працюють в однаковому полі тяжіння, масштаб швидкості має бути

$$\frac{v_m}{v} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell}} = \sqrt{\lambda_\ell} \quad (6.21)$$

Однаковість чисел Рейнольдса вимагає

$$\frac{\rho_m v_m \ell_m}{\mu_m} = \frac{\rho v \ell}{\mu} \quad (6.22)$$

Отже масштаб швидкості

$$\frac{v_m}{v} = \frac{\mu_m}{\mu} \frac{\rho}{\rho_m} \frac{\ell}{\ell_m} \quad (6.23)$$

Оскільки цей масштаб має дорівнювати кореню квадратному з масштабу довжини, маємо

$$\frac{\mu_m / \rho_m}{\mu / \rho} = \frac{v_m}{v} = (\lambda_\ell)^{3/2}, \quad (6.24)$$

де  $\mu/\rho$  – кінематична в'язкість  $\nu$ .

Хоча в принципі можна задовольнити (6.24), але реально надто важко, як що неможливо знайти рідину для моделі, особливо для малих масштабів довжини. Під час моделювання річок, водозливів, гаваней рідиною прототипів є вода, моделі є досить великими, отже для моделей за рідину там править вода. Тоді рівняння (6.24) не виконується, гідравлічні моделі є спотвореними, числа  $Fr$  роблять однаковими, але число  $Re$  є різними в моделі та прототипі.

Спотворені моделі можна використовувати, але інтерпретація результатів є більш складною, ніж для *справжніх моделей*.

### **Моделювання внутрішніх задач.**

Внутрішніми задачами називають течії в трубопроводах або взагалі в закритих каналах, фітингах, клапанах тощо. Оскільки в цих задачах немає відкритої поверхні, превалюють сили інерції та в'язкості, отже число  $Re$  є основним параметром подібності. При низьких числах Маха ( $Ma < 0,3$ ) впливом стисливості для рідин та газів нехтують. Обов'язковим є дотримання повної геометричної подібності для усіх характерних розмірів  $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \dots \ell_i$  та  $\ell$ , що призводить до серії чисел геометричної подібності

$$P_i = \frac{\ell_i}{\ell} \quad (6.25)$$

де  $\ell$  - якийсь важливий розмір системи.

Важливою може бути шорсткість поверхні, що контактує з рідиною. Середню висоту елементів шорсткості позначаємо  $\varepsilon$ , отже число подібності

має виглядати як  $\varepsilon/\ell$ . Задовольнити вимогу  $\frac{\varepsilon_m}{\ell_m} = \frac{\varepsilon}{\ell}$  дуже важко, але в багатьох випадках шорсткість має незначну роль та нею можна нехтувати. Таким чином визначуване число подібності за умови малих чисел Маха є функцією

$$\text{Визначуване число} = \phi\left(\frac{\ell_i}{\ell}; \frac{\varepsilon}{\ell}; \frac{\rho v \ell}{\mu}\right) \quad (6.26)$$

Перші два члени в (6.28) належать до геометричної подібності, їх можна виразити так

$$\frac{\ell_{im}}{\ell_i} = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon} = \frac{\ell_m}{\ell} = \lambda_\ell \quad (6.27)$$

Гідродинамічна подібність — це рівність чисел  $Re$

$$\frac{\rho_m v_m \ell_m}{\mu_m} = \frac{\rho v \ell}{\mu}$$

Звідси масштаб швидкостей (6.25)

$$\frac{v_m}{v} = \frac{\mu_m}{\mu} \frac{\rho}{\rho_m} \frac{\ell}{\ell_m}$$

В прототипі та моделі можуть протікати різні рідини, але якщо та сама рідина ( $\rho_m = \rho$ ,  $\mu_m = \mu$ ), тоді

$$\frac{v_m}{v} = \frac{\ell}{\ell_m}$$

Отже,  $v_m = v/\lambda_\ell$ , що вказує на більшу швидкість у моделі, якщо  $\lambda_\ell < 1$ . Оскільки, як правило  $\lambda_\ell \ll 1$ , рівність чисел  $Re$  важко дотримувати.

Якщо усі ці вимоги виконані, визначуване число подібності має бути однаковим в обох системах, наприклад напір  $\Delta p$ , відповідне число

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$$

Перепад тиску у прототипі визначається з відношення

$$\Delta p = \frac{\rho}{\rho_m} \left( \frac{v}{v_m} \right)^2 \Delta p_m \quad (6.28)$$

тобто взагалі  $\Delta p \neq \Delta p_m$ .

Важливо, що при великих числах  $Re$  силами в'язкості можна нехтувати - отже, не обов'язково робити  $Re_m = Re$ . Але оскільки заздалегідь ми не знаємо, наскільки  $Re$  велике, визначаємо це на моделі.

Треба вважати на можливість появи в закритих каналах так званої **кавітації**. Якщо переріз потоку різко зменшується (в трубках Вентурі, клапанах, вентилях тощо), швидкість зростає, тиск зменшується, рідина може закипати – утворення в потоці краплинної рідини порожнин, заповнених паром або газом, і є **кавітація**. Якщо на моделі вивчається саме кавітація, тоді треба виконати однаковість **чисел кавітації**

$$\sigma = \frac{p - p_k}{\rho \frac{v^2}{2}}, \quad (6.29)$$

де  $p$  та  $v$  – тиск та швидкість потоку, що набігає,  $p_k$  – тиск, за якого рідина закипає.

Моделювання процесів кавітації є досить складним, оскільки треба дуже добре собі уявити виникання та зростання парових бульбашок. Ці процеси вивчаються в курсі тепломасообміну, тому треба в цьому курсі повернутися до цього дуже важливого в енергетиці явища, оскільки поява кавітації призводить до збільшення гідродинамічного опору, тобто додаткових втрат енергії, а також до руйнування металу та виникнення кавітаційних шумів.

Наслідки кавітації настільки суттєві, що під час проектування насосів, турбін та гвинтів лопаті розраховують так, аби на них не виникало кавітації.

## РОЗДІЛ 7. В'ЯЗКІ ТЕЧІЇ В ТРУБАХ. РОЗРАХУНОК ОПОРІВ, ШВИДКОСТІ ТА ВИТРАТ РІДИНИ В ТРУБОПРОВОДАХ.

Транспортування рідини або газу в трубах або закритих каналах є надзвичай важливим в будь-яких проявах людської діяльності. Компоненти типової системи транспорту показані на рис.7.1. Вона включає труби, різні фітинги для з'єднання елементів системи, пристрої для регулювання витрати рідини (вентилі), а також насоси для додання або турбіни для від'єму енергії рідини. Різницю між течіями в трубах та відкритих каналах показано на рис. 7.2. У відкритих каналах діє сила тяжіння – якщо труба не заповнена, то неможливо підтримувати напір  $\Delta p$ .

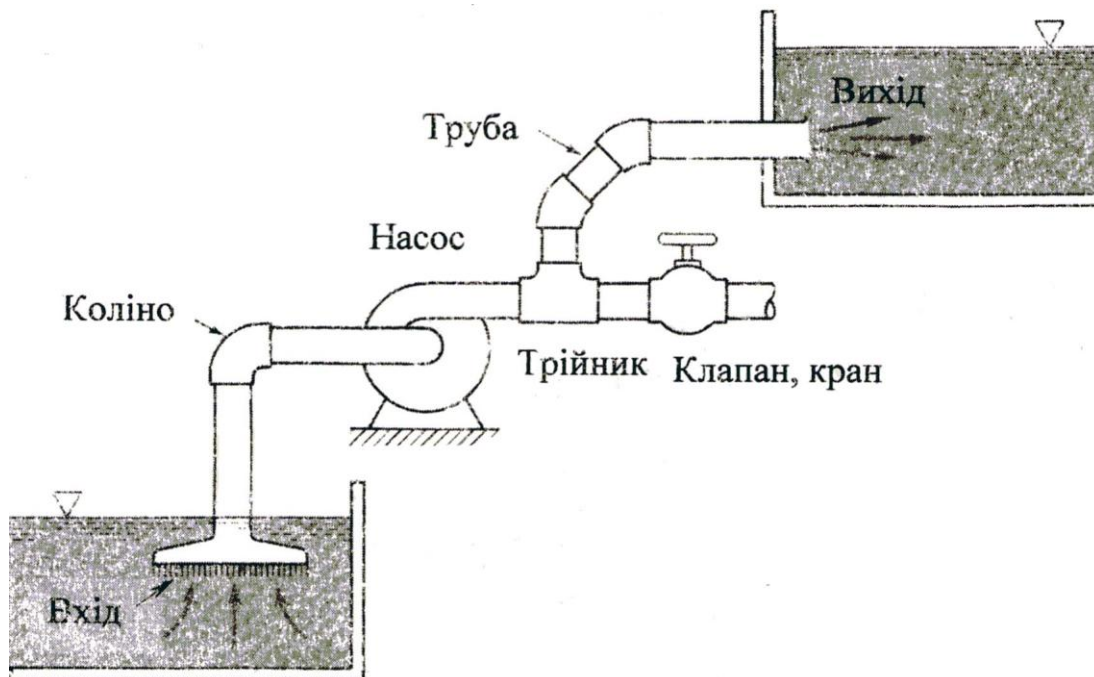


Рис. 7.1

Між ламінарною і турбулентною течією в трубах, про які вже згадувалося в попередніх розділах, існує ще перехідний режим течії. На рис. 7.3 наведено візуалізації трьох режимів за допомогою підфарбовування потоку рідини. Для ламінарного режиму є лише один компонент швидкості  $v = u \xi$ . Для турбулентного потоку основним залишається повздовжній

компонент, але він стає нестабільним та супроводжується нестабільними компонентами, нормальними до осі:  $v = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k}$ , де  $v$  - локальна швидкість.

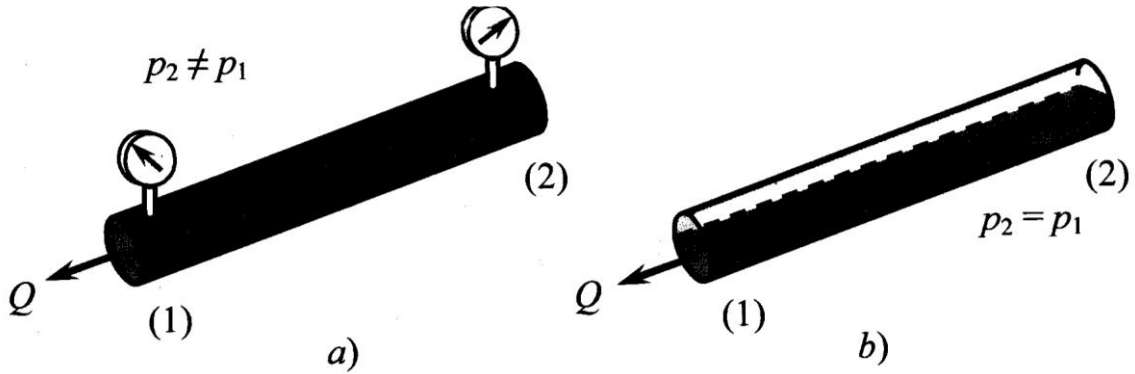


Рис. 7.2

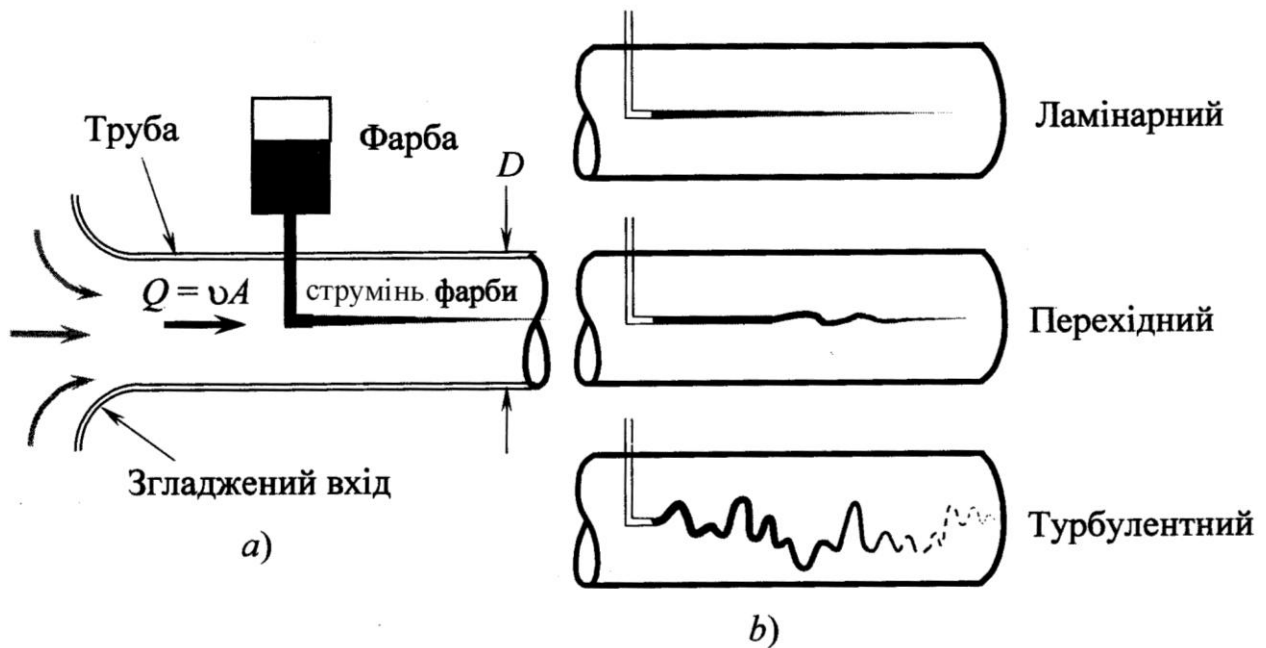


Рис.7.3

Інтервали чисел Рейнольдса, в яких відбуваються три режими течії, точно не можна вказати. Фактичний перехід від ламінарного режиму може відбуватися за різними  $Re$  під впливом вібрації труб, шорсткості початкової ділянки труби тощо. Для інженерних розрахунків приймають, що ламінарна течія має місце до  $Re < 2100$ , для дуже гладких стінок  $Re_{кр} \cong 2300$ , а для

рухомої плівки з відносно гладкою поверхнею стікання за наявності поверхні розділення з газом при двофазному потоці  $Re_{кр} \cong 20...120$ . Розвинений турбулентний режим починається із  $Re_{кр} \cong 4000$ . В інтервалі  $2100 < Re < 4000$  найбільш вірогідним є перехідний режим.

Якщо вхід до труби є плавним (рис. 7.4), тоді спочатку у перерізі (1) потік буде майже одномірним, тобто швидкості майже однаковими в перерізі. За рахунок в'язкості далі починає утворюватися пристінний шар рідини, частинки, які є дотичними до стінки, зупиняються – їх прослизання відносно стінки в практичних умовах не відбувається. Цей факт довели українські вчені О.А. Геращенко та М.М. Назарчук: прослизання для рідин, що не змочують поверхню, може відбуватися для дуже низьких тисків рідини – порядку  $10^{-5}$  мм.рт.ст. (0,0013Па), а для тих, що змочують поверхню – за ще важче доступних градієнтів швидкості рідини біля стінки порядку  $10^{10}$  сек<sup>-1</sup>.



Рис. 7.4

Всередині частинки ще рухаються з однаковою швидкістю, але пристінний шар збільшує свою товщину, наприкінці вхідної ділянки (2)



одновимірного ядра вже немає. Безрозмірна довжина вхідної ділянки залежить від  $Re$ :

$$\frac{\ell}{D} = 0,06 Re \quad \text{для ламінарного потоку,} \quad (7.1)$$

Та

$$\frac{\ell}{D} = 4,4 Re^{1/6} \quad \text{для турбулентного потоку} \quad (7.2)$$

В практичних розрахунках можна приймати

$$10^4 < Re < 10^5 \rightarrow 20D < \ell_{ex} < 30D \quad (7.3)$$

Потік між (2) і (3) є **повністю розвиненим**, швидкість не змінює свого епіюра. На повороті (3) – (4) виникає відцентрова сила, епіюр спотворюється – максимум  $v$  стає ближчим до зовнішнього радіуса повороту, на ділянці (4) – (5) епіюр відновлюється, на ділянці (5) - (6) потік знову є повністю розвиненим.

Найчастіше  $(x_2 - x_3) \gg \ell_{ex}$  та  $(x_6 - x_5) \gg (x_5 - x_4)$ . Якщо фітинги, вентилі та інші збурення зустрічаються часто, потік може зовсім не стати повністю розвиненим.

Залежність витрати рідини  $Q$  через горизонтальну трубу для розвиненого режиму від напору  $\Delta p$  поступово падає (рис.7.5), внаслідок змінення природи напруги зсуву – якщо для ламінарного руху це результат перенесення енергії між окремими молекулами рідини, то для турбулентного – вже для досить великих груп молекул.

Інші параметри також є різними для ламінарного та турбулентного потоків (табл.7.1), причини цієї різниці треба розібрати.

Таблиця 7.1

Параметр	Ламінарний потік	Великі значення Re Турбулентний потік
Середня швидкість, $v$	$Q \sim v$	$Q \sim v$
Падіння тиску, $\Delta p$	$Q \sim \Delta p$	$Q \sim \Delta p^{1/2}$
Густина, $\rho$	$Q \sim \rho^0$ (незалежний)	$Q \sim \rho^{-1/2}$
Динамічна в'язкість, $\mu$	$Q \sim 1/\mu$	$Q \sim \mu^0$ (незалежний)
Діаметр труби, $D$	$Q \sim D^4$	$Q \sim D^{3/2}$
Довжина труби, $\ell$	$\Delta p \sim \ell$	$\Delta p \sim \ell$
Шорсткість труби, $\varepsilon$	$\Delta p \sim \varepsilon^0$ (незалежний)	$\Delta p =$ функція від $\varepsilon$

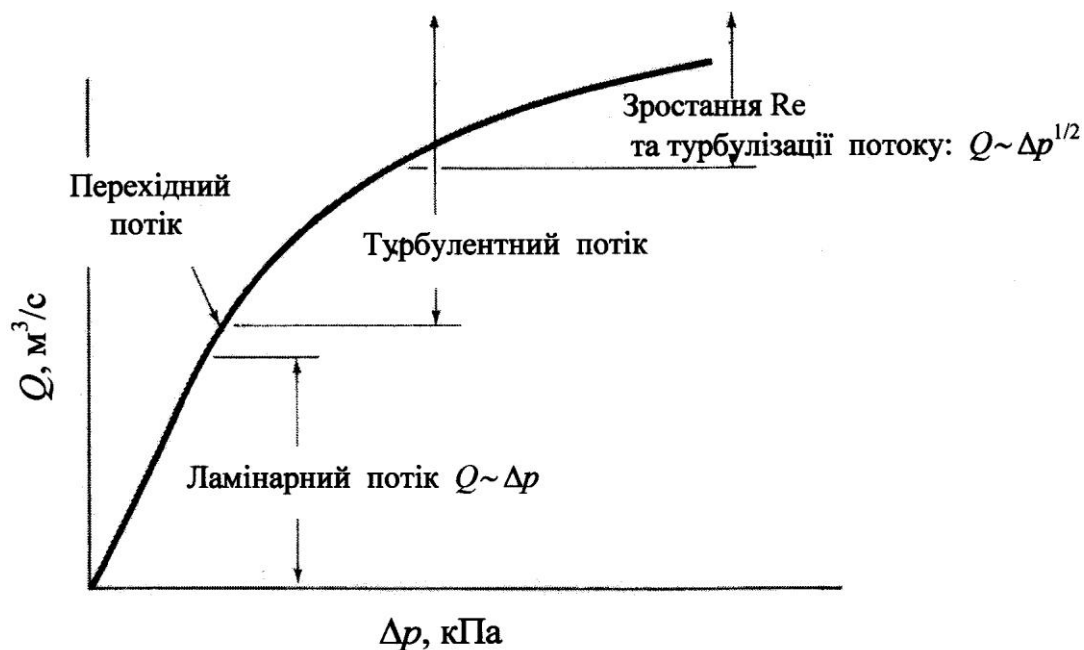


Рис. 7.5

**Повністю розвинена ламінарна течія.** Елемент потоку на рис. 7.6 – це круглий циліндр довжиною  $\ell$ , радіусом  $r$ , коаксіальний із горизонтальною трубою діаметром  $D$ . Оскільки швидкості не однакові у перерізах труби, початкові плоскі торці елемента в мить  $t$  спотворюються до миті  $t + \delta t$ . Потік розвинений та стаціонарний, тому спотворення обох торців буде однаковим. Різниця швидкостей сусідніх прошарків, в купі із в'язкістю рідини, створює напругу зсуву. Ця напруга діє по боковій поверхні циліндра, а напір  $\Delta p = p_1 - p_2$  – по поверхнях торців.

За законом Ньютона  $F_x = m a_x$ . Оскільки прискорень немає,  $a_x = 0$ . Отже

маємо баланс сил

$$(p_1) \pi r^2 - (p_1 - \Delta p) \pi r^2 - (\tau) 2 \pi r \ell = 0, \quad (7.4)$$

де  $\tau$  – напруга зсуву.

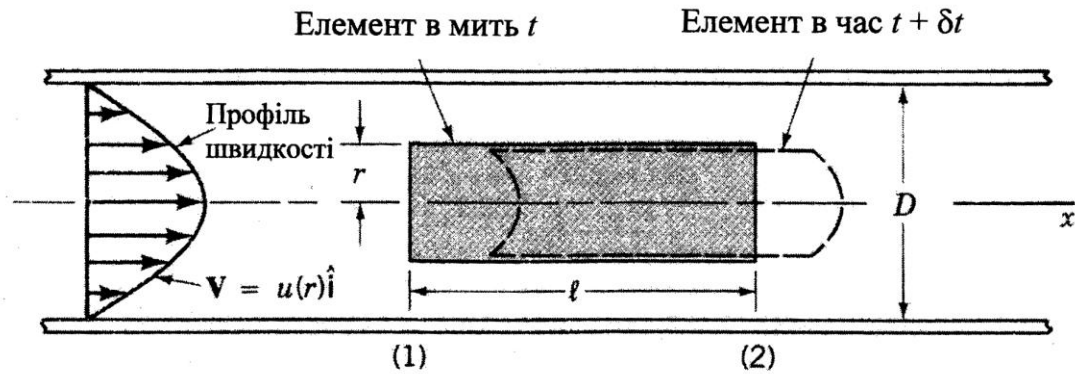


Рис. 7.6

Це можна перетворити на

$$\frac{\Delta p}{\ell} = \frac{2\tau}{r} \quad (7.5)$$

Оскільки ані  $\Delta p$ , ані  $\ell$  не залежать від  $r$ , права частина (7.5) також не залежить від  $r$ . Отже  $F_x = m a_x$ , де  $C$  – постійна. При  $r = 0$  напруги зсуву немає,  $\tau_0 = 0$ . Якщо  $r = D/2$  – напруга є максимальною, позначається  $\tau_{cm}$  та називається *напруга зсуву на стінці*. Отже,  $C = 2 \tau_{cm}/D$ , та розподіл напруги зсуву по радіусу:

$$\tau = \frac{2 \tau_{cm} r}{D} \quad (7.6)$$

Як це показано на рис.7.7, лінійна залежність  $\tau(r)$  є результатом того, що сила тиску пропорційна  $r^2$  (вона діє по торцях, площею  $\pi r^2$ ), а напруга зсуву є пропорційною  $r$ , оскільки діє по боковій поверхні циліндра площею  $2 \pi r \ell$

З рівняння (7.5) та (7.6)

$$\Delta p = \frac{4 \ell \tau_{cm}}{D} \quad (7.7)$$

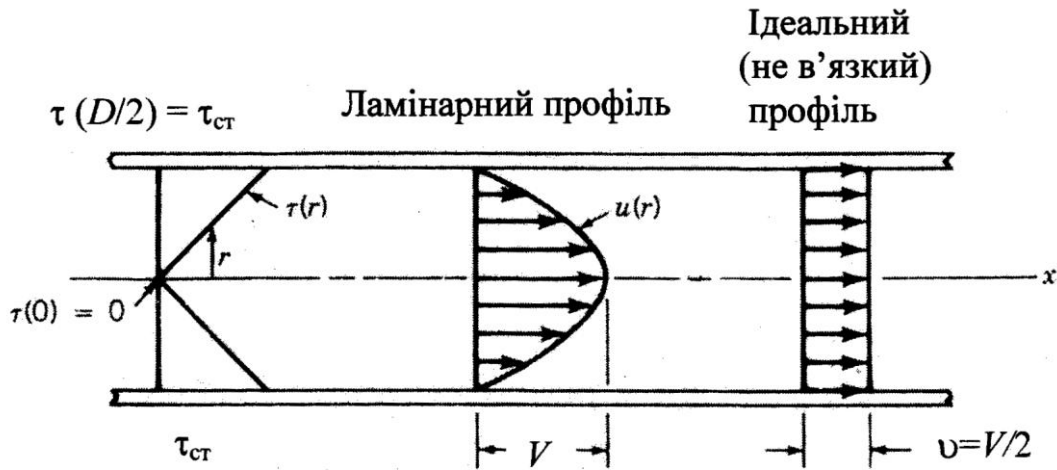


Рис.7.7.

Невелика напруга зсуву може викликати великий перепад тиску, якщо труба є відносно довгою ( $\frac{\ell}{D} \gg 1$ ).

Зауважимо, що аналогічний (7.5 – 7.7) результат можна отримати також для турбулентного режиму, але наступні – лише для ламінарного режиму руху. Так, напруга зсуву є прямо пропорційною градієнту швидкості  $\tau = \frac{du}{dr}$ .

Для нашої задачі

$$\tau = - \frac{du}{dr} \quad (7.8)$$

Знак (-) означає, що швидкість знижується від осі до стінки, а  $\tau$  має бути додатною. Комбінація (7.5) і (7.8) дає

$$\frac{du}{dr} = - \left( \frac{\Delta p}{2 \mu \ell} \right) r,$$

що можна інтегрувати або мати епюри швидкості

$$\int du = - \frac{\Delta p}{2 \mu \ell} \int r dr ,$$

або

$$u = - \left( \frac{\Delta p}{2 \mu \ell} \right) r^2 + C_1$$

де  $C_1$  – постійна.

Оскільки рідина є в'язкою, вона прилипає до стінки ( $u = 0$  при  $r = D/2$ ),

отже  $C_1 = - \frac{\Delta p}{16 \mu \ell} D^2$ .

Звідси профіль швидкості

$$u(r) = \left( \frac{\Delta p D^2}{16 \mu \ell} \right) \left[ 1 - \left( \frac{2r}{D} \right)^2 \right] = v_0 \left[ 1 - \left( \frac{2r}{D} \right)^2 \right], \quad (7.9)$$

де  $v_0 = \frac{\Delta p}{16 \mu \ell} D^2$  - швидкість на осі.

Епюр швидкості на рис.7.7 є параболою.

Витрата рідини визначається інтегруванням профілю швидкості. Оскільки потік є осесиметричним, швидкість є однаковою для кільця радіусом  $r$  та довжиною  $dr$ . Таким чином

$$Q = \int u dA = \int_{r=0}^{r=R} u(r) 2\pi r dr = 2\pi v_0 \int_0^R \left[ 1 - \left( \frac{2r}{R} \right)^2 \right] r dr ,$$

або

$$Q = \frac{\pi R^2 v_0}{2}$$

За визначенням, середня швидкість – це об'ємна витрата, поділена на площу перерізу,  $v_0 = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2}$ ,

$$v = \frac{\pi R^2 V_0}{2\pi R^2} = \frac{V_0}{2} = \frac{\Delta p D^2}{32\mu^\ell} \quad (7.10)$$

$$Q = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu^\ell} \quad (7.11)$$

Розглянута ламінарна течія має назву течія Гагена – Пуазейля, а формула (7.11) – **закон Пуазейля**. Він діє для  $Re < 2100$ .

Для негоризонтальних труб рушійну силу треба коригувати впливом тяжіння, замість  $\Delta p$  в формулах (7.10, 7.11) треба підставляти  $(\Delta p - \gamma^\ell \sin \theta)$ , де  $\theta$  – кут між трубою та горизонталлю (рис.7.8):

$$\frac{\Delta p - \gamma^\ell \sin \theta}{\ell} = \frac{2\tau}{r}, \quad (7.12)$$

Звідси

$$\lambda = \frac{a}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g$$

$$v = \frac{(\Delta p - \gamma^\ell \sin \theta) D^2}{32\mu^\ell} \quad (7.13)$$

Якщо рідина спрямована вниз, тяжіння допомагає потоку (потрібний менший напір,  $\sin \theta < 0$ ), та навпаки. Зауважимо, що  $\gamma^\ell \sin \theta = \gamma \Delta z$ , де  $\Delta z$  - різниця висот. Якщо течії немає,  $v = 0$  та  $\Delta p = \gamma^\ell \sin \theta = \gamma \Delta z$ .

**Повністю розвинена турбулентна течія** зустрічається частіше, ніж ламінарна. Разом з тим, вона є значно складнішою. Згадане перемішування рідини в турбулентному русі, виникнення місцевих малих вихорів активізують процеси тепло- та масопереносу, змішування різних рідин тощо. Значно легше перемішати вершки у філіжанці кави (турбулентна течія), ніж змішати два кольори в'язкої фарби (ламінарна течія).

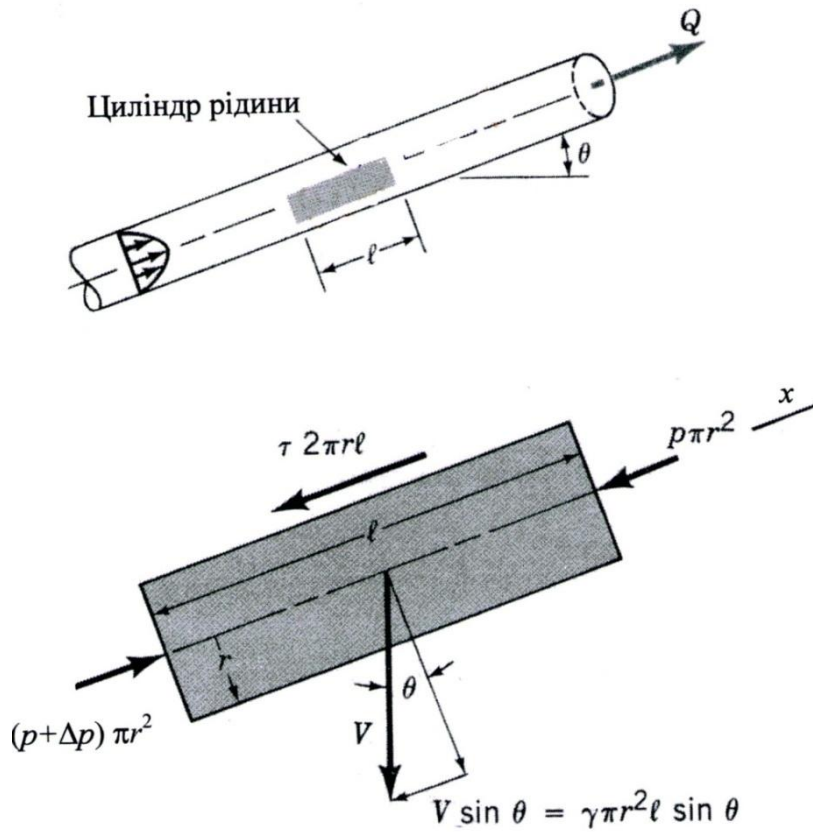


Рис.7.8

$$Q = \frac{\pi D^4 (\Delta p - \gamma \ell \sin \theta)}{128 \mu \ell} \quad (7.14)$$

В окремих випадках ламінарна течія є бажаною. Потрібний напір (отже, й потужність насосу) є меншим, якщо режим ламінарний. Потік крові в артеріях є зазвичай ламінарним, за винятком великих артерій із значною витратою крові.

Основна відмінність турбулентного потоку лежить в хаотичній, випадковій поведінці швидкості, тиску, напруги зсуву, температури тощо. Як показано на рис. 7.9, такий потік можна описувати лише середніми (осередненими) величинами параметрів. Якщо  $u = u(x, y, z, t)$  – де  $x$  – компонент швидкості, тоді середня в часі величина  $\bar{u}$

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(x, y, z, t) dt, \quad (7.15)$$

де інтервал часу  $T$  є значно довший, ніж період найдовшої флуктуації, але значно коротший порівняно з нестационарністю середньої швидкості.



Рис.7.9

Флуктуюча частина швидкості  $u'$  - це змінна частина швидкості

$$u = \bar{u} + u', \text{ або } u' = u - \bar{u} \quad (7.16)$$

Зрозуміло, що середня в часі флуктуація дорівнює нулю:

$$\bar{u}' = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (u - \bar{u}) dt = \frac{1}{T} \left( \int_{t_0}^{t_0+T} u dt - \bar{u} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \right) = \frac{1}{T} (T \bar{u} - T \bar{u}) = 0 \quad (7.17)$$

Флуктуації розподілені однаково по обидва боки від середньої лінії (рис. 7.10), оскільки сума їх квадратів не може бути від'ємною:

$$\overline{(u')^2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (u')^2 dt \succ 0 \quad (7.18)$$



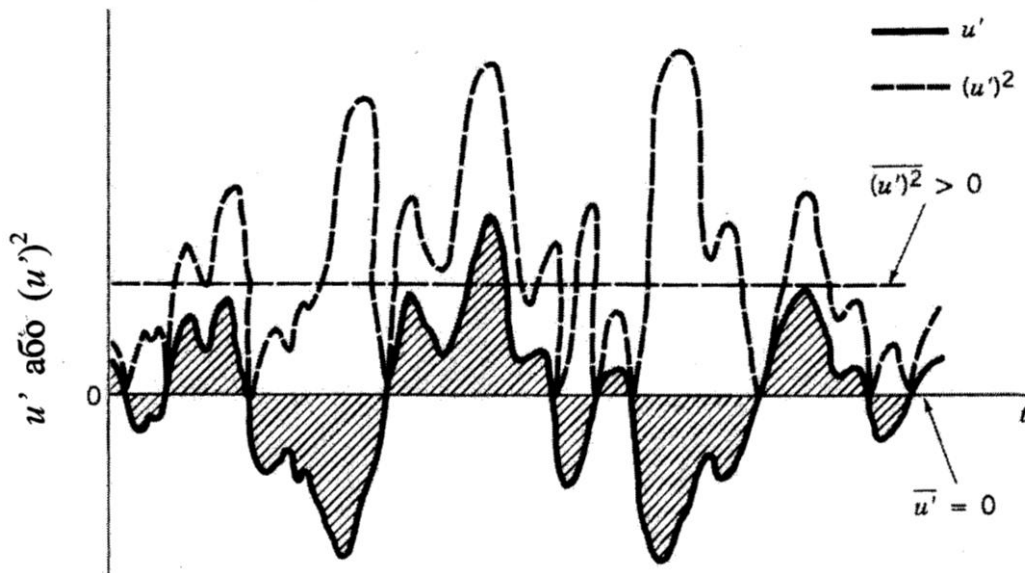


Рис. 7.10

**Інтенсивність турбулентності**  $\mathfrak{I}$  визначається як корінь квадратний із середнього квадрата флуктуації швидкості, поділений на середню в часі швидкість

$$\mathfrak{I} = \frac{\sqrt{\overline{(u')^2}}}{\bar{u}} = \frac{\left( \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (u')^2 dt \right)^{1/2}}{\bar{u}} \quad (7.19)$$

Інший параметр турбулентності – **часовий масштаб**, показаний на рис.7.9, є дуже змінною величиною – від 10-100-1000 циклів за секунду (ц/с) для витікання води з крану, до 1 циклу за годину, день або більше для течії Гольфстріму.

## РОЗДІЛ 8. РОЗРАХУНОК НАПРНИХ ТРУБОПРОВODІВ, ШОРСТКОСТІ, МІСЦЕВИХ ВТРАТ НАПОРУ ТА МЕРЕЖ. ВИТРАТОМІРИ

**Діаграма Моуді.** На підставі матеріалу, що викладений раніше, можна записати для стаціонарного нестисливого турбулентного потоку в горизонтальній круглій трубі діаметром  $D$

$$\Delta p = F(\bar{v}, u, D, \ell, \varepsilon, \mu, \rho) \quad (8.1)$$

де  $\bar{v}$  - середня швидкість,  $u$  - локальна швидкість,  $\ell$  - довжина труби,  $\varepsilon$  - міра шорсткості внутрішньої поверхні труби. Оскільки товщина в'язкого підшарку є малою, шорсткість може суттєво впливати на структуру потоку (рис. 8.1), особливо, якщо висота елементів шорсткості перевищує товщину підшарку.

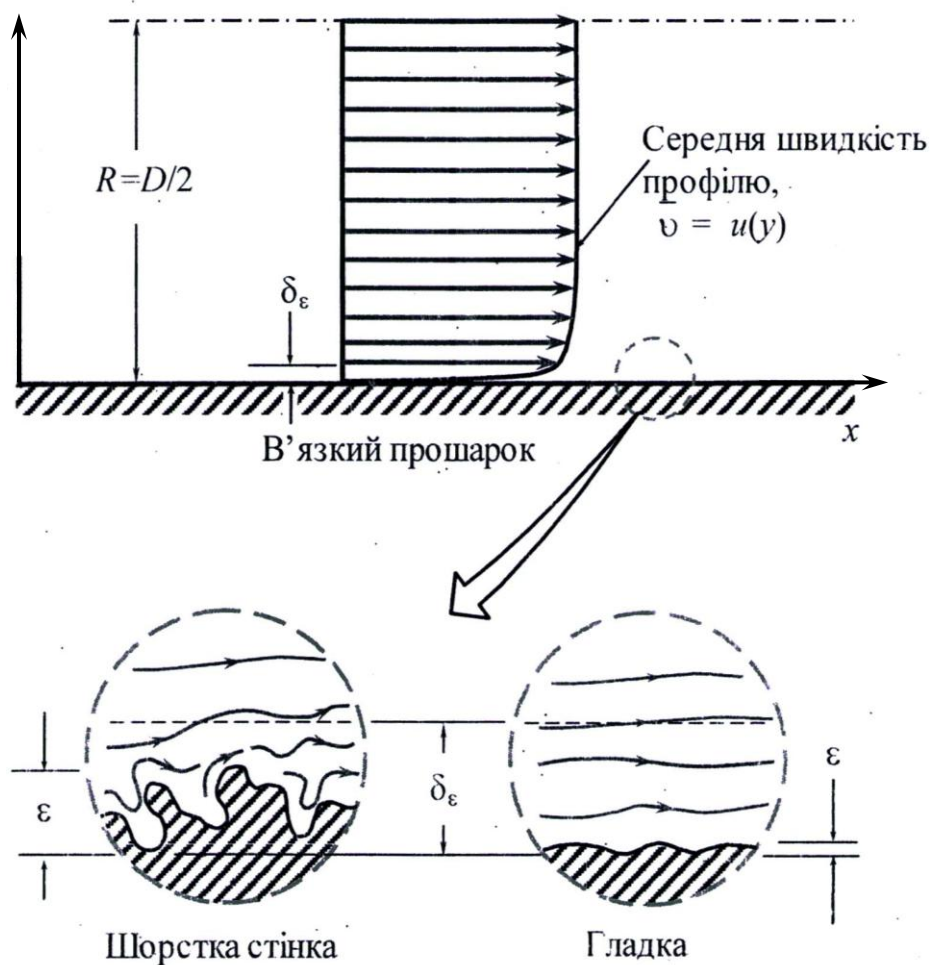


Рис. 8.1

Список параметрів у формулі 8.1 є повним, досліди показали, що впливом поверхневого натягу, тиском пароутворення можна нехтувати. Маємо сім змінних ( $k = 7$ ), три базових розмірностей маса  $M$ , довжина  $L$ , час  $T$  ( $r = 3$ ), отже безрозмірних груп буде чотири ( $k - r = 7 - 3 = 4$ ). Їх побудова вже нам знайома:

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v^2} = \varphi \left( \frac{\rho v D}{\mu}, \frac{\ell}{D}, \frac{\varepsilon}{D} \right) \quad (8.2)$$

Зрозуміло, що  $\Delta p$  прямо пропорційний  $\ell$ , тому  $\frac{\ell}{D}$  можна винести з-під знака  $\varphi$ :

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v^2} = \frac{\ell}{D} \varphi \left( Re, \frac{\varepsilon}{D} \right) \quad (8.3)$$

Величину  $\frac{\Delta p D}{\frac{1}{2} \ell \rho v^2}$  називають фактором або коефіцієнтом гідравлічного тертя  $f$ , тому

$$\Delta p = f \frac{\ell}{D} \frac{\rho v^2}{2}, \quad (8.4)$$

де

$$f = \varphi \left( Re, \frac{\varepsilon}{D} \right) \quad (8.5)$$

Визначити функцію  $\varphi$  у (8.5) можливо лише дослідним шляхом. Основні досліди провів Нікурадзе у 1933 році, але із трубами, які мали штучну шорсткість. На рис. 8.2 та у табл. 8.1 наведено результати подальших досліджень на трубах з реальною шорсткістю.

На базі цих досліджень побудована **діаграма Моуді** (рис. 8.2), тобто функціональна залежність фактора тертя від  $Re$  та  $\varepsilon/D$ . Важливо зазначити, що ця діаграма побудована для нових труб. Після довгого використання труби можуть мати більшу шорсткість внаслідок корозії та інших причин. Дуже старі труби змінюють не лише  $\varepsilon$ , але і  $D$ . Особливо це стосується

трубопроводів на підприємствах агропромислового комплексу – накіп на трубах з гарячою водою та насиченою парою, осад на молокопроводах або трубах з іншими харчовими рідинами тощо. Тому дуже важливо замінювати металеві труби на скляні.

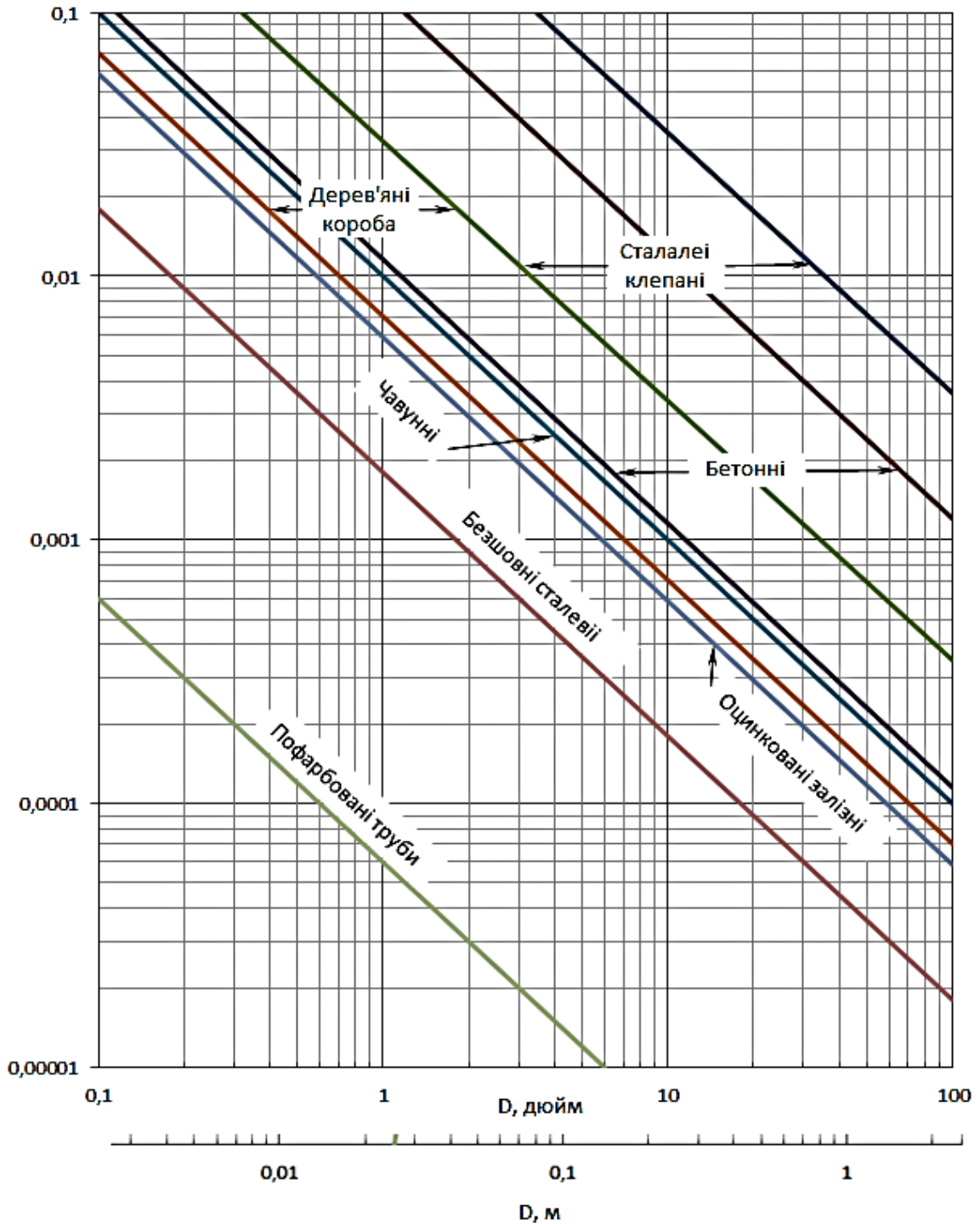


Рис. 8.2

Таблиця 8.1

Труби	Еквівалент шорсткості, $\varepsilon$	
	Фут (1 foot = 0,3048 м)	мм
Клепані стальні	0,003...0,03	0,9...9,0
Бетонні	0,001...0,01	0,3...3,0
Дерев'яні короба	0,0006...0,003	0,18...0,9
Чавунні	0,00085	0,26
Оцинковані залізні	0,0005	0,15
Високоякісні стальні або прокатані суцільні	0,00015	0,045
Пофарбовані	0,000005	0,0015
Пластик, скло	0,0 (загладжені)	0,0 (загладжені)

Розрив дослідних даних в інтервалі  $2100 < Re < 4000$  пояснюється тим, що в цьому інтервалі може утворюватися як ламінарна, так і турбулентна течія, або нестабільна суміш цих потоків, що залежать від багатьох обставин.

За умови дуже великих  $Re$  величина  $f$  перестає залежати від  $Re$ , це **повністю турбулентні потоки**. Навіть для гладких труб ( $\varepsilon = 0$ ) фактор тертя відрізняється від нуля – внаслідок згаданої раніше неможливості прослизання рідини відносно стінки. Такі труби мають назву гідравлічно гладкі.

Діаграма Моуді в турбулентній частині є графічним зображенням емпіричної **формули Колбрука**

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0 \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,7} + \frac{2,51}{Re} \right), \quad (8.6)$$

ка є зручною для комп'ютерних обчислень. Все ж як діаграма, так і формула дають, як правило, до 10% похибки.

**Місцеві втрати напору** в вентилях, поворотах, трійниках як правило визначаються через коефіцієнт втрат  $K_L$

$$K_L = \frac{h_L}{v^2 / 2g} = \frac{\Delta p}{\rho v^2 / 2}, \quad (8.7)$$

Так що

$$\Delta p = K_L \frac{\rho v^2}{2}, \quad (8.8)$$

Коефіцієнт втрат залежить від геометрії елемента та  $Re$  для прямої труби, а при великих  $Re$  – лише від геометрії.

Інший спосіб визначення місцевих втрат  $h_L$  – через еквівалентну довжину труби  $\ell_{екв}$

$$h_L = K_L \frac{v^2}{2g} = f \frac{\ell_{екв}}{D} \frac{v^2}{2g},$$

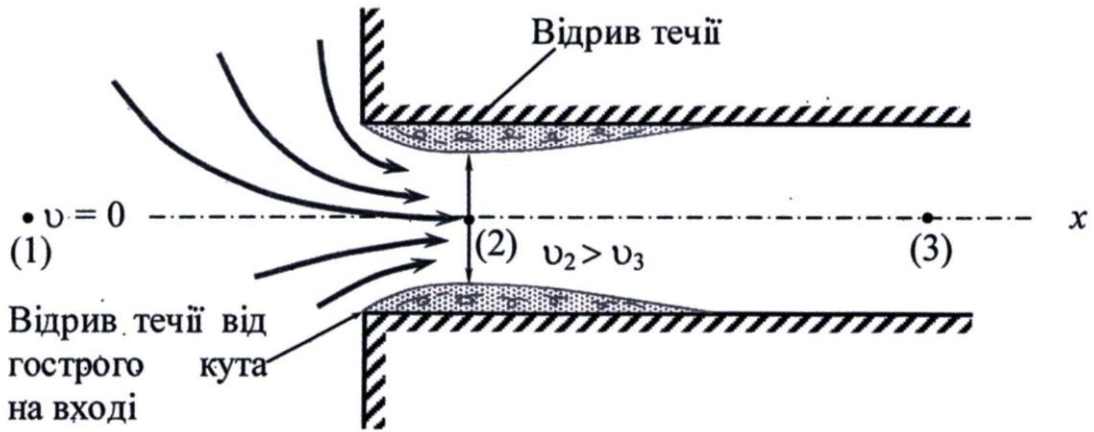
або

$$\ell_{екв} = \frac{K_L D}{f}, \quad (8.9)$$

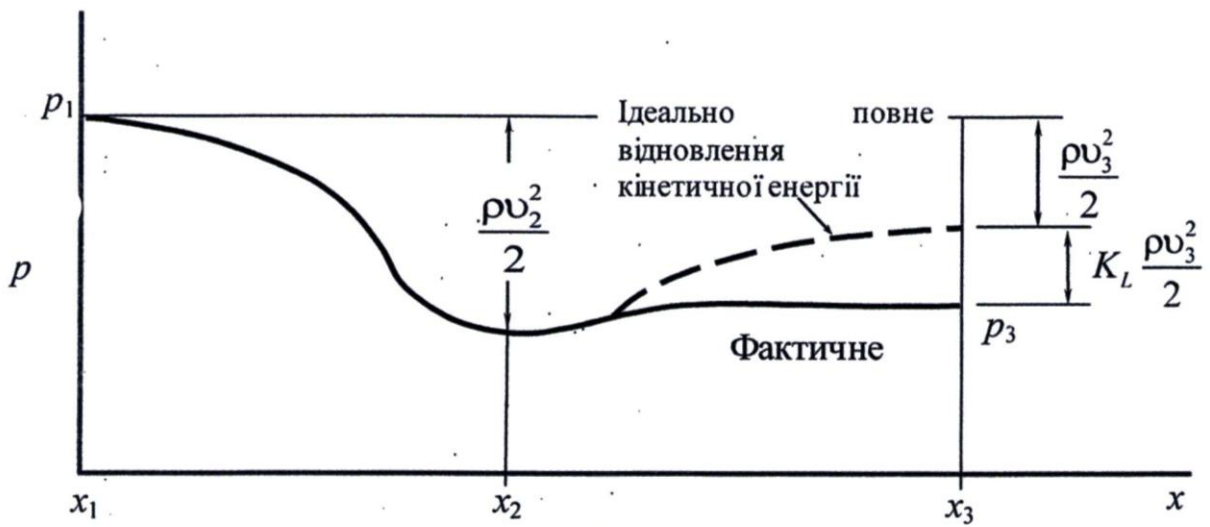
де  $D$  та  $f$  відповідають трубі, яка під'єднана до елемента. Але частіше використовують  $K_L$ .

Вхід з резервуару до труби може мати різну форму – з гострими краями, заокругленнями різного радіусу тощо. Схема потоку та розподіл потоку для входу під прямим кутом показана на рис. 8.3. Місцеві звуження в перерізі (2) із збільшенням швидкості викликається неможливістю потоку «обгинати» прямий кут. Швидкість на осі в точці (2) більше, ніж далі в трубі (точка 3).

Потім кінетична енергія мусила перетворитися у потенціальну у вигляді тиску (ефект Бернуллі). Ідеальний розподіл тиску показаний на рис. 8.3. штриховою лінією, втрата напору на вході мала бути нульовою. Насправді «зайва» кінетична енергія в перерізі (2) частково витрачається на в'язкісну дисипацію, тому тиск не повертається на ідеальний рівень (суцільна лінія на рис. 8.3). Для такої геометрії  $K_L = 0,5$ . Якщо труба входить до резервуару навіть на кілька міліметрів, втрати можуть бути ще більшими. Для зниження вхідних втрат вхід роблять заокругленим (рис. 8.4). Крива  $K_L = f(r/D)$ , де  $r$  – радіус заокруглення, показує різке зниження  $K_L$  із збільшенням  $r/D$  до 0,25. Втрати напору мають місце також під час виходу з труби до резервуару.



a)



b)

Рис. 8.3

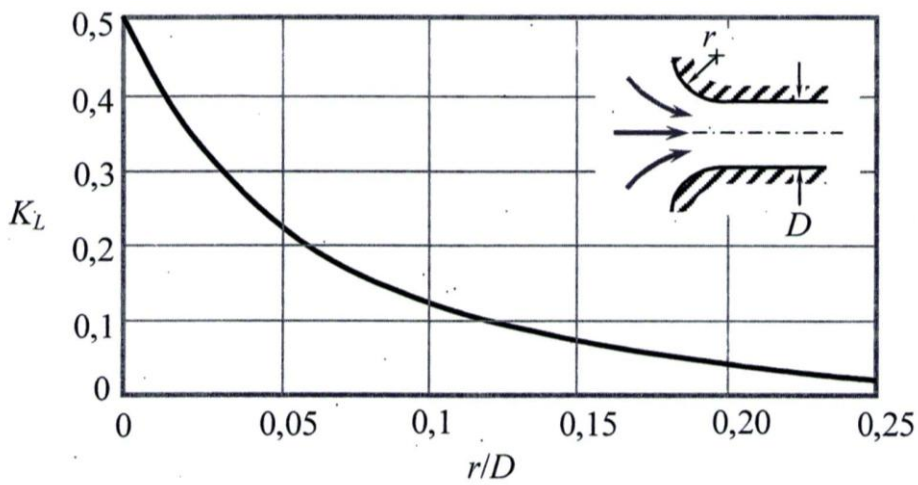


Рис. 8.4

На рис. 8.5 нанесена залежність  $K_L = f(A_2/A_1)$ , де  $A_1$  та  $A_2$  – відповідні

площі перерізу, для різкого звуження, а на рис. 8.6 для різкого розширення потоку.

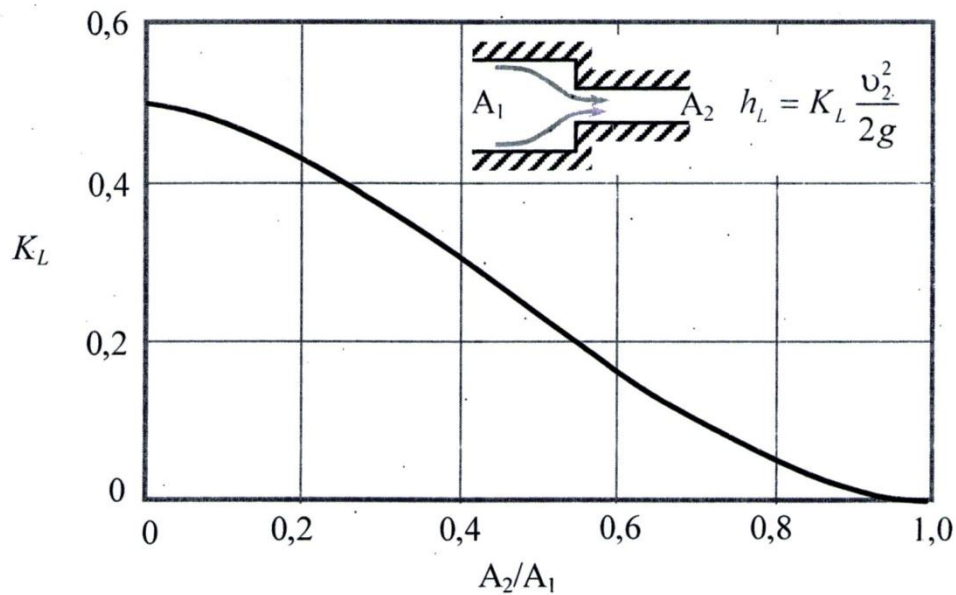


Рис. 8.5

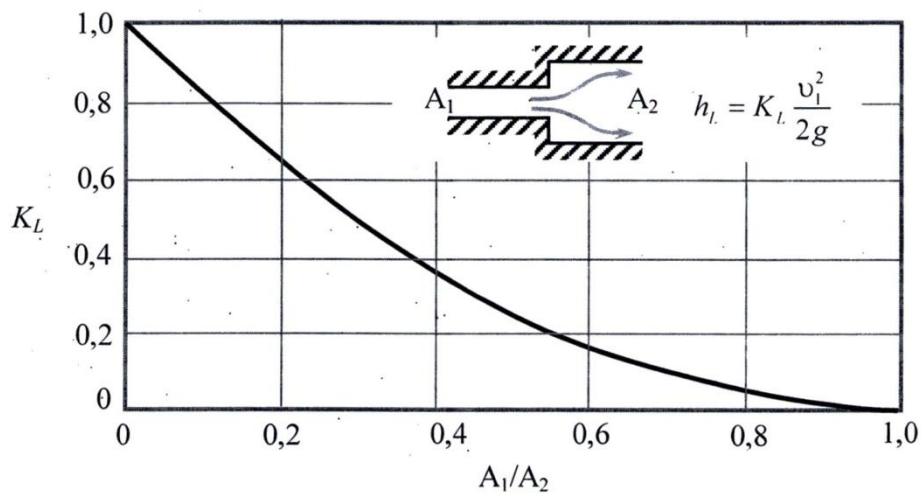


Рис. 8.6

Втрати напору можуть бути різними, якщо звуження або розширення є поступовим. Типовий графік для конічного **дифузора**  $K_L = f(\theta)$ , де  $\theta$  – кут розширення, при фіксованому  $A_2/A_1$ , наведено на рис. 8.7. Для малих значень  $\theta$  (дифузор виходить довгим) втрати тиску відбуваються лише з-за напруги зсуву на стінці,  $K_L$  спадає, із збільшенням  $\theta$  – головним чином внаслідок дисипації кінетичної енергії, тобто перетворення її на внутрішню енергію



ПОТОКУ.

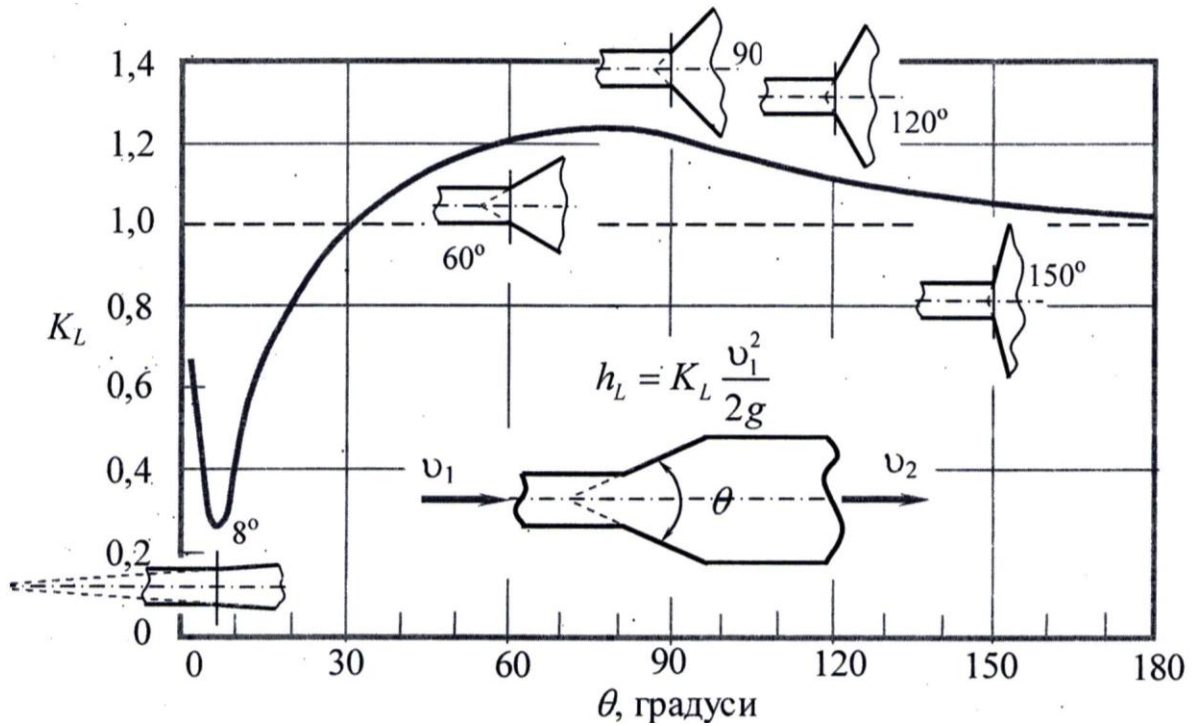


Рис. 8.7

Фактично за умови  $\theta > 35^\circ$  конічний дифузор, як це не парадоксально, менш ефективний, ніж розширення з гострим входом, для якого  $K_L = 1,0$ . Оптимальним кутом є  $\theta = 8^\circ$ , для умов рис. 8.7. Загалом течія в дифузорах є складною,  $K_L$  залежить не лише від  $A_2/A_1$  та  $\theta$ , але від геометричних деталей та від числа  $Re$ . Дослідні дані часто зображують через **коефіцієнт**

**відновлення тиску**  $c_B = \frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{2} \rho v^2}$  - відношення збільшення статичного тиску в

дифузорі до динамічного тиску на вході.

Течія в конфузорах (зворотна до рис. 8.7), та соплах є менш складною порівняно з дифузором,  $K_L$  змінюється від 0,02 для  $\theta = 30^\circ$  до 0,07 для  $\theta = 60^\circ$ .

Повороти суттєво збільшують втрати напору – виникають застійна зона та вторинні вихрові течії (рис. 8.8). Звідси рекомендація ставити внутрішні напрямні (спрямовуючі лопатки) для різних поворотів (рис.8.9).

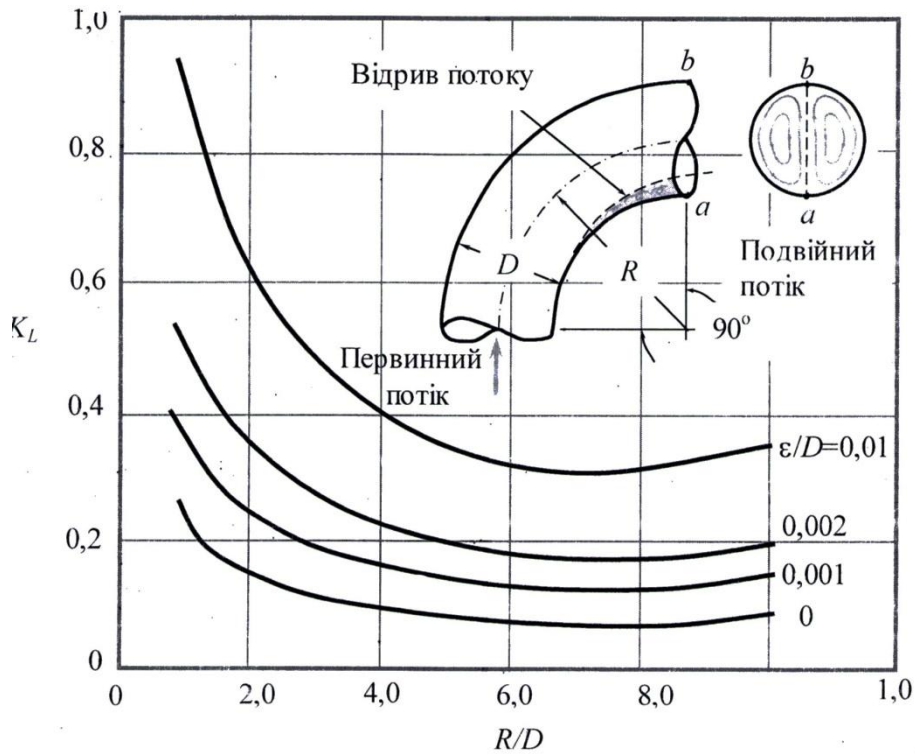


Рис.8.8.

Розрахунки для повністю розвинутого турбулентного потоку проводять на основі діаграми Моуді з використанням  $D_2$  та  $Re_2$ , похибка підвищується до 15%.

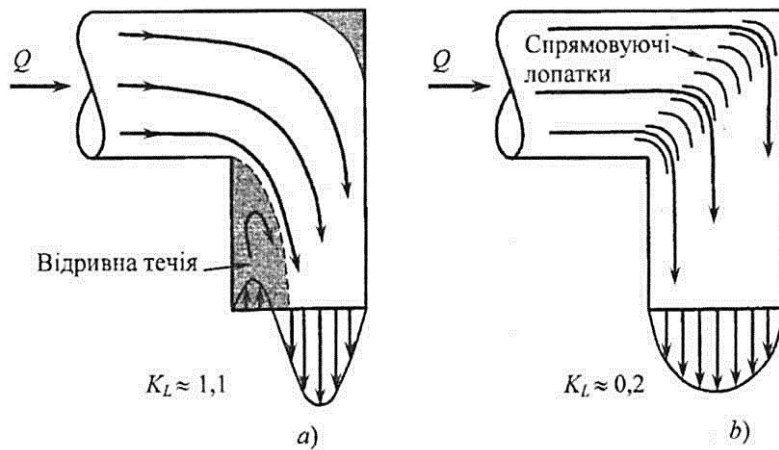


Рис.8.9

**Системи трубопроводів.** Найпростіші системи з'єднання труб показані на рис. 8.10.

Для послідовного з'єднання (рис. 8.10, а) витрати через кожну трубу буде однаковою, а втрати напору додаються

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 \quad (8.10)$$

та

$$h_{L_{A-B}} = h_{L_1} + h_{L_2} + h_{L_3} \quad (8.11)$$

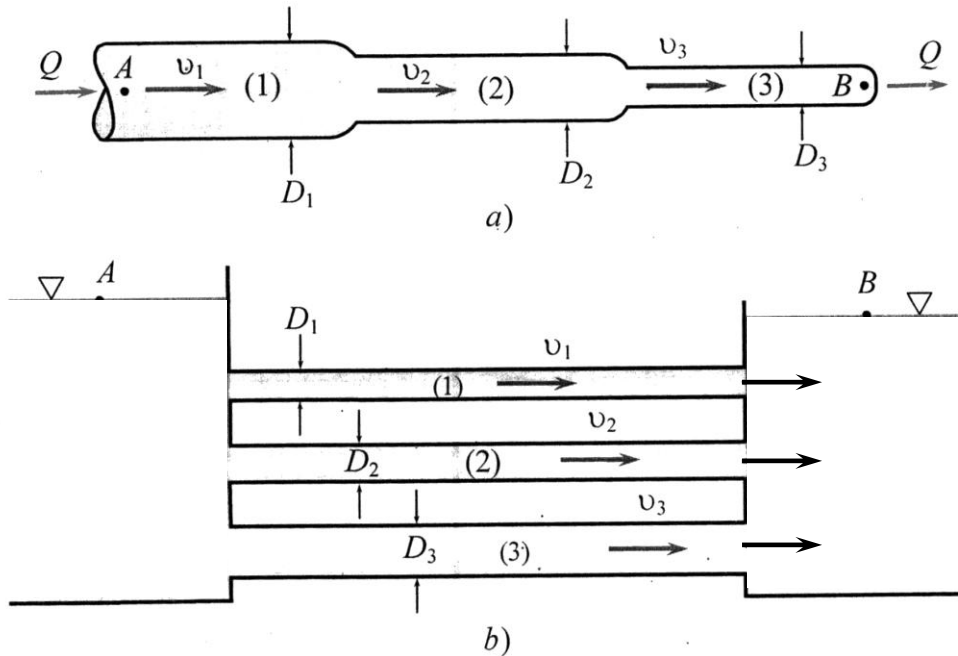


Рис. 8.10

Фактори тертя для кожної труби будуть різними, оскільки різними є  $Re_i = \frac{\rho v_i D_i}{\mu}$  та  $\frac{\varepsilon_i}{D_i}$ . Якщо витрата  $Q$  є змінною, визначити  $\Delta p$  та  $h_L$  досить просто, якщо задана  $\Delta p$ , а треба визначити  $Q$  або  $D_i$  – необхідно звертатися до ітераційних схем розрахунку.

При паралельному з'єднанні (рис. 8.10, b) загальна витрата дорівнює сумі витрат, а втрати напору будуть однаковими

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (8.12)$$

та

$$h_{L_1} = h_{L_2} = h_{L_3} \quad (8.13)$$

Знов спосіб розв'язання цих рівнянь залежить від того, що задано, а що треба обчислити.

Має відмінності схема на рис. 8.11. Витрата через трубу (1) дорівнює

сумі витрат (2) та (3). Втрати напору в трубах (2) та (3) однакові, незважаючи на те, що діаметри труб та витрати через (2) та (3) є різними.

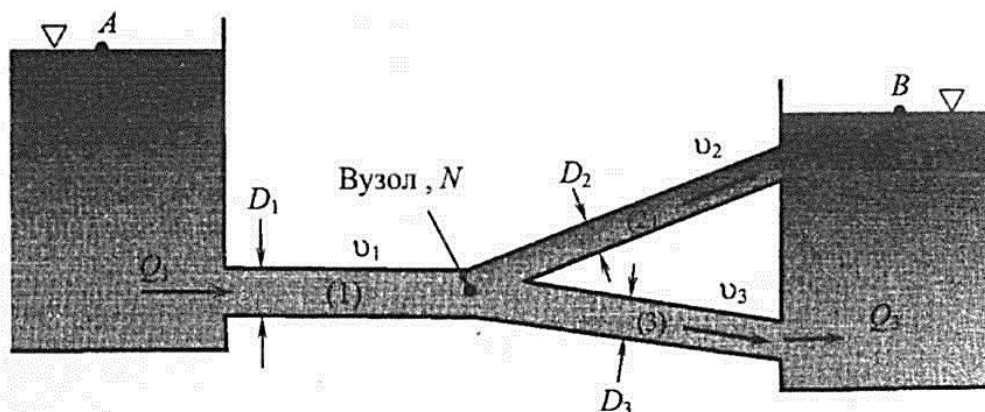


Рис. 8.11

Рівняння енергії для частинок, що проходять трубами (1) та (2)

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} + Z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} + Z_B + h_{L_1} + h_{L_2} \quad (8.14)$$

та

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} + Z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} + Z_B + h_{L_1} + h_{L_3} \quad (8.15)$$

Комбінація рівнянь дає  $h_{L_2} = h_{L_3}$  - це стверджує факт, що частинки в трубах (2) і (3) проходять за тих самих умов від вузла N та закінчують шлях в однакових умовах.

Схема трубопроводів між трьома резервуарами (рис.8.12) є складнішою за попередні. Якщо є відомими рівні рідини в резервуарах, довжина, діаметр, шорсткість поверхонь труб, залишається питання напрямку потоків – до або з резервуару. Якщо клапан (1) закритий, рідина перетікатиме з резервуару В до С, витрату легко підрахувати. Та ж сама ситуація виникає, коли закритий клапан (2) або (3). Якщо ж усі три клапани є відкритими, навіть напрямок потоків не є очевидним. Зрозумілим є лише, що з резервуару А буде витікати рідина, оскільки його рівень є найвищим. Чи рідина буде втікати до резервуару В чи витікати з нього – залежить від його рівня та властивостей усіх трьох труб.

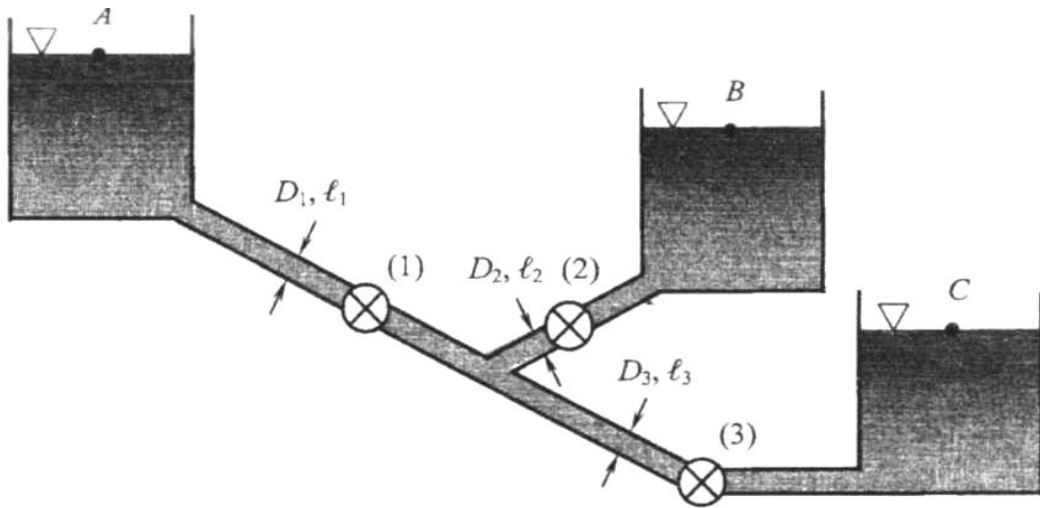


Рис. 8.12

Найбільш складними системами трубопроводів є мережі (рис. 8.13), наприклад *тепломережі* або *водопровідні мережі*.

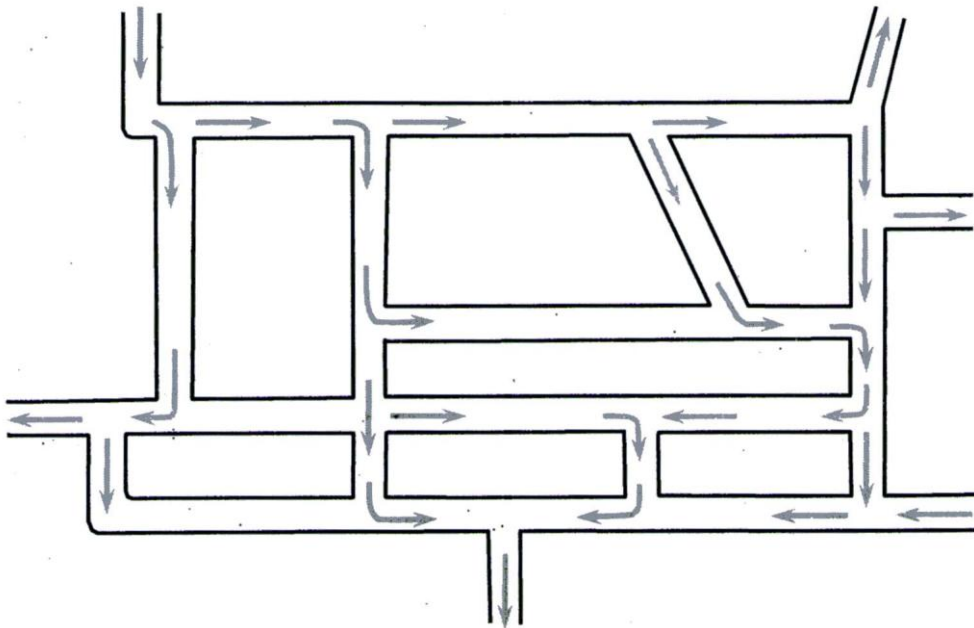


Рис. 8.13

Напрямок потоків в окремих трубах може навіть мінятися час від часу. Є тільки певність, що в місцях з'єднання двох або кількох труб є баланс між вхідною і вихідною витратою. Також якщо має місце петля, то повний напір по всій петлі є нульовим. Розв'язуються такі задачі методом проб і помилок, вони є найкращими для роботи комп'ютерів.

Вимірювання витрати рідини. Крім згаданої раніше *трубки Вентурі*, для вимірювання витрати рідини через труби використовуються *мірні шайби, сопла* а також *ротаметри*.

У перших трьох типах витратомірів використовується той факт, що із зменшенням площі перерізу труби швидкість рідини зростає, а тиск знижується. Для горизонтальної труби (рис. 8.14), нехтуючи впливом в'язкості, рівняння Бернуллі між точками (1) і (2) дає

$$Q_{\text{ідеал}} = A_2 v_2 = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - \beta^4)}} \quad (8.16)$$

де  $\beta = D_2 / D_1$

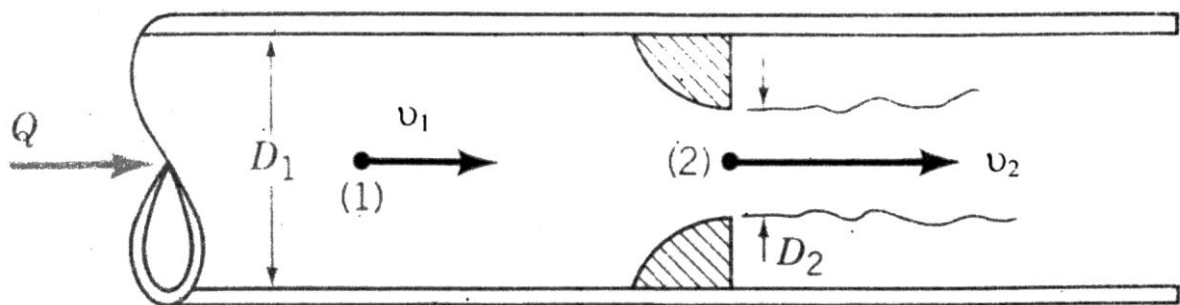


Рис. 8.14

З попереднього тексту зрозуміло, що

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2,$$

та

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_L$$

В ідеалі  $h_L = 0$ . Складнощі виникають внаслідок того, що виміряти  $h_L$  є дуже важко. Враховуючи наявність впливу в'язкості, використовують емпіричні коефіцієнти.

Типовий витратомір із шайбою показаний на рис. 8.15. Тиск в точці (2) з найбільшим звуженням потоку менше, ніж в точці (1). Тому  $A_2 = C_{36} A_1$  ( $C_{36} < 1$ ). Змінює цей коефіцієнт наявність вихорів біля поверхні шайби.

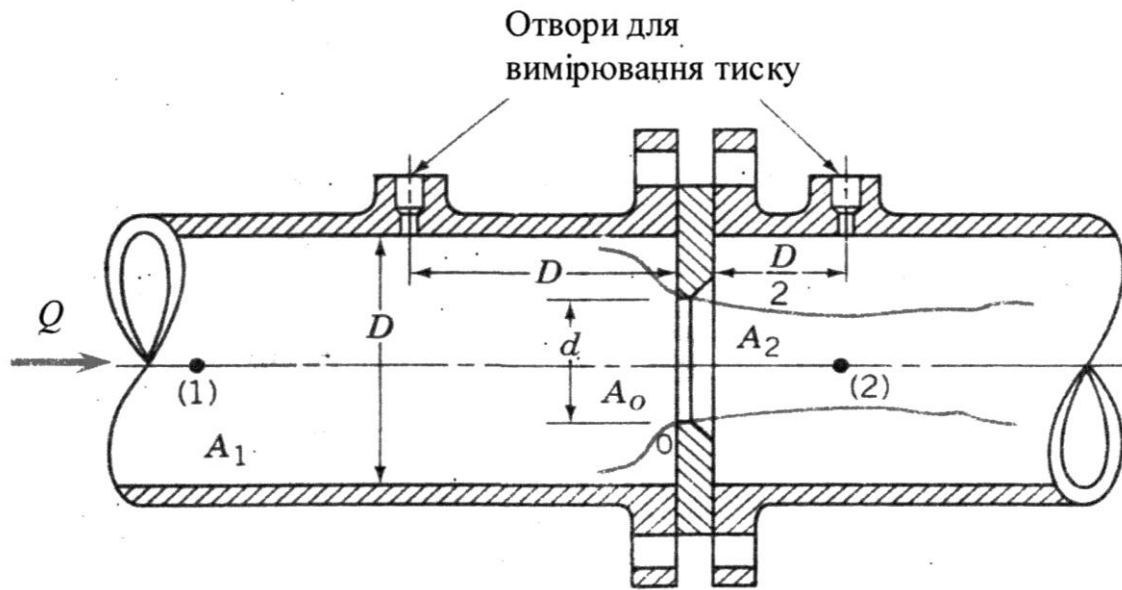


Рис. 8.15

Вислідний *коефіцієнт шайби*  $C_0$  є мірою пропорційності між ідеальною і реальною витратою.

$$Q = C_0 Q_{\text{ідеал}} = C_0 A_0 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - \beta^4)}}, \quad (8.17)$$

де  $A_0 = \pi d^2/4$  – площа отвору у шайбі. Величина  $C_0$  є функцією від  $\beta = d/D$  та  $Re = \rho v D/\mu$ , де  $D = Q/A_1$  (рис. 8.16), а також від форми отвору у шайбі – прямокутного або з фаскою.

Якщо замість шайби поставити звужуюче сопло, величина  $C_0$  буде більшою, ніж для шайби, тобто сопло є більш ефективним за рахунок меншої дисипації енергії.

Найбільш точним з цієї групи приладів є трубка Вентурі (рис. 8.16), оскільки її геометрія дозволяє звести втрати напору до мінімуму. Витрата рідини цього разу визначається за формулою

$$Q = C_B Q_{\text{ідеал}} = C_B A_n \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - \beta^4)}}, \quad (8.17)$$

де  $A_n = \pi d^2/4$  – площа перерізу у найвужчому місці.

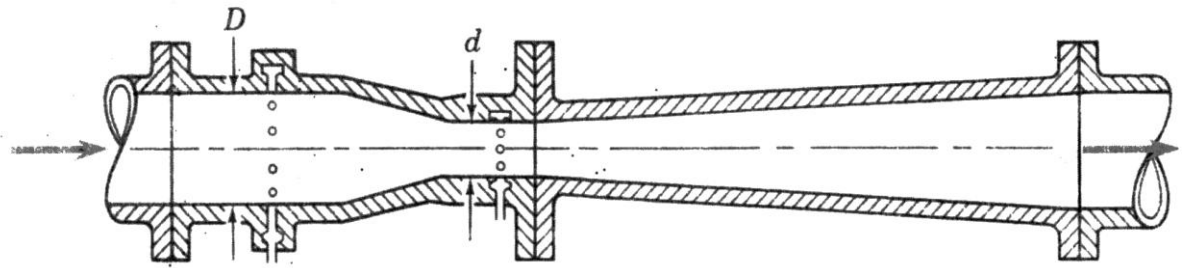


Рис. 8.16

Рівень величин  $C_V$  зображений на рис. 8.17. Крім  $\beta$  та  $Re$ , на нього впливають також довжини конфузornoї та дифузornoї частин.

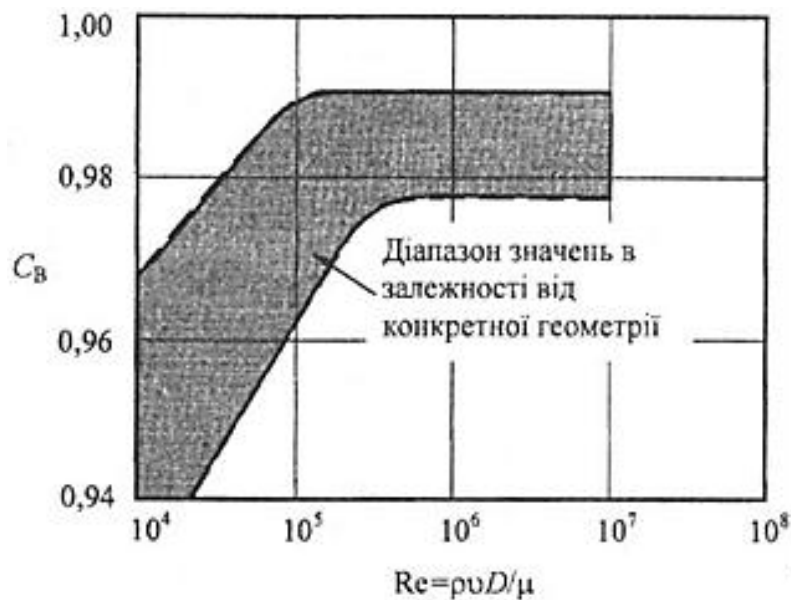


Рис. 8.17

Інший принцип – «змінної площі перерізу» використовують у досить точному та недорогому ротаметрі. У вертикальній прозорій, злегка конічній мірній трубці розташовується поплавець. Рідина піднімає поплавець до рівноваги – її рівень пропорційний витраті.

Інший витратомір має «турбінку» - малий вільно обертовий пропелер на осі потоку. Кутова швидкість турбінки майже пропорційна середній швидкості потоку. Турбінка має магнітний елемент, а за турбінкою розташовується відповідний магнітометр.



## РОЗДІЛ 9. ГІДРАВЛІЧНИЙ УДАР. ВИТІКАННЯ РІДИНИ З ОТВОРІВ ТА НАСАДОК. ВІЛЬНІ СТРУМЕНІ

**Гідравлічний удар. Гідравлічний таран.** Зазвичай гідравлічні розрахунки проводять для стаціонарних потоків рідини. В реальних умовах майже усі потоки є в якомусь сенсі нестабільними. Розрізняють неперіодичні, періодичні та випадкові нестационарні потоки. Впорскування суміші «бензин - повітря» до циліндра автомобільного двигуна є прикладом періодичного нестационарного потоку. Закручування вентиля або крану з метою зупинення потоку води призводить до типового неперіодичного нестабільного руху рідини. Якщо кран на трубі швидко закрити, рідина за рахунок інерції буде давити на нього та на стінки труби, якщо рідина (наприклад, вода) є практично нестисливою. Цей тиск викличе *гідравлічний удар*. Аналогічним чином гідравлічний удар відбудеться, якщо різко закрити кран або вентиль на трубі.

Він може сягати значних величин, тому в окремих випадках його треба враховувати під час розрахунку товщини стінок труби.

Гідравлічний удар  $h_{уд}$  вимірюють як відношення гідродинамічного тиску в зоні збурення потоку  $p_{уд}$  до питомої ваги рідини  $\gamma$ , тобто він має одиниці довжини  $[Н/м^2: Н/м^3 = м]$ .

Нехай швидкість рідини біля частково відкритого крану  $K$  (рис. 9.1) дорівнює  $v_0$ . В момент часу  $t = 0$  кран додатково буде перекритий. Швидкість в перерізі 2–2 зменшилася на  $\Delta v$ . Межею збурення є переріз 1–1 в момент часу  $t_1 = t_0 + \delta t$ :

$$l = c \delta t, \quad (9.1)$$

де  $c$  – швидкість розповсюдження збурення або швидкість розповсюдження пружної деформації рідини (завжди  $c \gg v_0$ ).

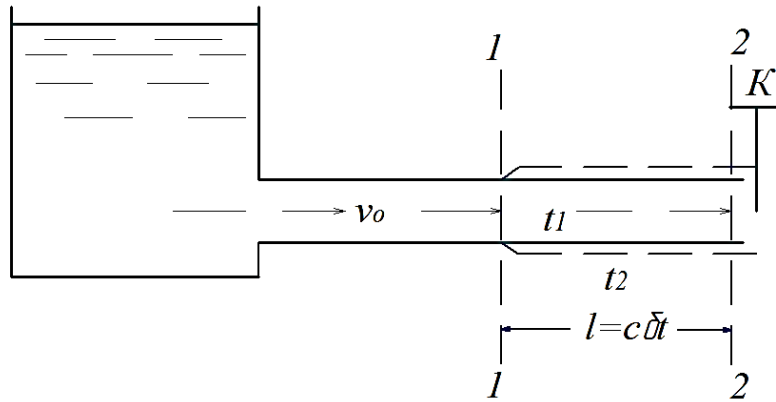


Рис. 9.1

Застосовуючи закон збереження маси (рівняння безперервності) і теорему кількості руху для частки рідини між перерізами 1-1 і 2-2, одержимо вираз для втрати напору  $h_{y\partial}$ :

$$h_{y\partial} = \frac{P_{y\partial}}{\gamma} = -\frac{c}{g} \Delta v \quad (9.2)$$

де  $\Delta v$  - додатне або від'ємне (для цього прикладу) змінення швидкості.

Якщо кран повністю закривається  $\Delta v = -v_0$ . Тоді

$$h_{y\partial} = \frac{c}{g} v_0 \quad (9.3)$$

Величина  $c$  залежить від модулів пружності рідини  $E_p$  та матеріалу стін труби  $E_T$  (стінка деформується під час різкого змінення тиску в трубі), для круглої труби

$$c = \sqrt{\frac{g}{\gamma} E_p \left(1 + \frac{D}{b} \frac{E_p}{E_T}\right)^{-1}}, \quad \text{м/с} \quad (9.4)$$

де  $D$  – внутрішній діаметр труби, м;  $b$  – товщина стінки труби, м.

Перший множник у формулі (9.4) є швидкість розповсюдження звуку у рідині, що знаходиться у стані спокою  $c_{зв}$ , для води  $c_{зв} = 1425$  м/с.

Таким чином, для води, що протікає в круглій тонкостінній трубі

$$c = 1425 \left(1 + \frac{D}{b} \frac{E_p}{E_T}\right)^{-1}, \quad \text{м / с} \quad (9.5)$$

Явище гідравлічного удару інколи використовують для корисних цілей, наприклад, в особливих насосах для підняття рідини. Ці насоси мають назву *гідравлічні тарани*.

**Витікання рідини через отвори та насадки. Вільні струмені.** В апаратах, що використовуються в обох галузях АПК – сільськогосподарській та переробній – часто зустрічаються процеси витікання рідини із отворів. В розділі 5 застосовано рівняння Бернуллі під час виведення формули для визначення швидкості витікання ідеальної рідини з великого резервуару через невеликий отвір в центрі його днища (формула 5.20):

$$v = \sqrt{2gh} \quad (9.6)$$

Це рівняння (формула Торрічеллі) лежить в основі визначення швидкості витікання в реальних умовах. Частинки рідини рухаються в резервуарі по криволінійних траєкторіях (одна з них показана на рис. 5.5), тому на виході із резервуару за інерцією продовжують рухатися доцентрово – струмінь стискується, його діаметр  $d_c$  стає меншим за діаметр отвору  $d_o$ . Відношення площ отвору та мінімального перерізу струменя має назву *коефіцієнт стиску (стискування) струменя*

$$\varepsilon = \frac{A_c}{A_o} = \frac{d_c^2}{d_o^2} \quad (9.7)$$

Якщо отвір є круглим, відстань від внутрішньої поверхні стінки до стиснутого перерізу, відповідно до дослідних даних, може бути прийнята як  $l_o = 0,5 d_o$ .

Після «стиснутого» перерізу за рахунок збільшення швидкості (перепад  $h$  зростає) струмінь має продовжувати стискуватися, але за рахунок опору повітря на поверхні струменя, а також аерації рідини струмінь розширюється.

Швидкість рідини в стиснутому перерізі

$$v_c = \varphi \sqrt{2gh} \quad (9.8)$$

де  $h_c = h + \Delta h$ ,  $\Delta h$  – відстань по висоті від центра отвору до стиснутого перерізу.

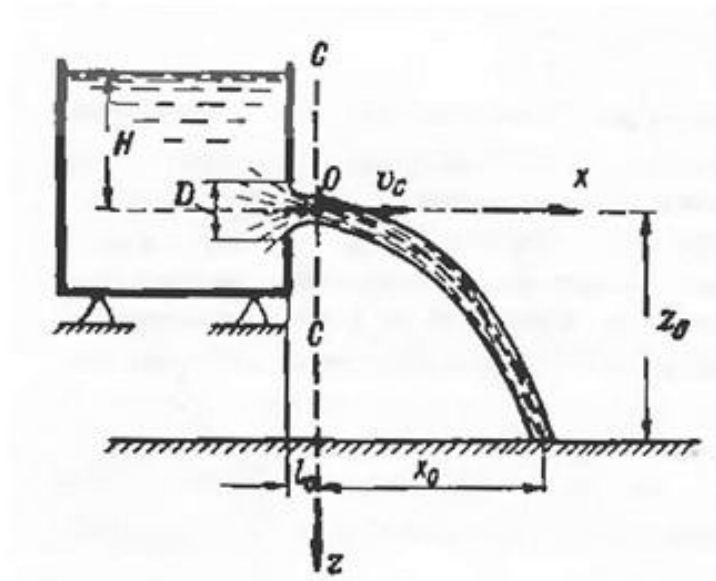
$\varphi$  – *коефіцієнт швидкості*, він залежить від втрат напору за рахунок взаємодії струменя із повітрям на шляху до стиснутого перерізу.

Витрата рідини  $Q$  з отвору

$$Q = A_c v_c = \varepsilon \varphi A_c \sqrt{2gh_c} = \mu A_c \sqrt{2gh_c} \quad (9.9)$$

де  $\mu = \varepsilon \varphi$  – коефіцієнт витрати отвору ( $\mu \approx 0,6$ ).

*Траєкторією струменя* називають вісь струменя рідини, яка вільно падає після витікання з отвору (рис. 9.2).



Для виведення рівняння осі струменя скористуємося рівнянням руху «важкої» частинки, швидкість якої дорівнює  $v_c$  (опором повітря нехтуємо):

$$x = v_c t ; \quad z = gt^2 \quad (9.10)$$

Звідси рівняння параболічної траєкторії частинки

$$z = \frac{gx^2}{2v_c^2} \quad (9.11)$$

де

$$v_c = \varphi \sqrt{2gh}$$

Підставляння до (9.11) заданої величини  $z_o$  (рис. 9.2) дає  $x_o$  – дальність биття струменя.

Якщо отвір зроблено в похилій під кутом  $\Theta$  стінці посудини, рівняння осі струменя виходить таким самим, але початкова швидкість  $v_c$  матеріальної частинки приймається похилою до горизонту під заданим кутом  $\Theta$ .

**Витікання з малого отвору під рівень.** Витікання рідини із *затопленого отвору* (рис. 9.3) також часто зустрічається на практиці.

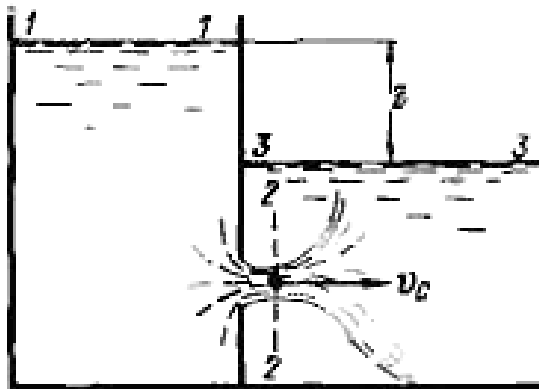


Рис. 9.3

Якщо з'єднати рівнянням Бернуллі перерізи 1-1 і 3-3 та виразити втрати напору між цими перерізами, одержимо формулу

$$z = (\zeta_{1-2} + \zeta_{2-3}) \frac{v^2}{2g} \quad (9.12)$$

де  $\zeta$  – коефіцієнт опору, однозначно пов'язаний із коефіцієнтом швидкості  $\varphi$ :

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta}} \quad (9.13)$$

Формула для визначення витрати  $Q$  через затоплений отвір виглядає так само, як для витікання у повітря, тільки замість повної висоти у посудині з більш високим рівнем стоїть різниця рівнів  $z$ :

$$Q = \mu A_c \sqrt{2gz} \quad (9.14)$$

Поняття «невеликий отвір» можна використовувати, якщо швидкістю рідини всередині посудини, з якої вона витікає, можна нехтувати. Якщо ця швидкість стає помірною, отвір треба визнати великим. Розрахунки швидкості струменя та витрати рідини проводять по тих самих формулах, але величини  $\varphi$ ,  $\zeta$  та  $\mu$  треба визначати в спеціальних дослідах.

За умови невеликих  $h$  та  $z$ , особливо якщо отвір в дні посудини можуть утворюватися рідинні воронки – кругові рухи рідин – очевидно за рахунок появи тангенціальних напруг. В разі затопленого струменя, навпаки можуть з'явитися повітряні воронки на поверхні посудини, в яку перетікає рідина.

Якщо отвір не є круглим, то форма перерізу струменя може змінюватися по його довжині під час витікання як в атмосферу, так і під затоплений рівень (інверсія струменя). Це відбувається за рахунок того, що швидкості підходу до отвору стають різними для різних ділянок периметра отвору. На рис. 9.4 показана зміна перерізу струменя для квадратного отвору.

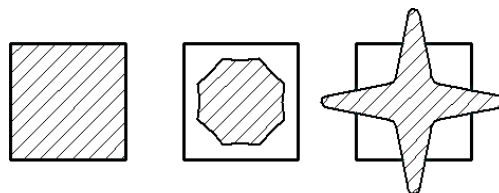


Рис.9.4

**Витікання рідин з насадків.** Для підвищення витрати  $Q$  через отвір, швидкості  $v$  або коефіцієнта витрати отвору  $\mu$  використовують **насадки**.

**Насадок** – це коротка напрямна трубка, яку закріплюють із зовнішнього або внутрішнього боку посудини, з якої має витікати рідина.

Поняття «коротка труба» використовується в гідравліці, якщо для неї можна нехтувати втратами напору, пов'язаними з довжиною труби. Відповідно, для «довгої труби», обчислюють тільки самі ці втрати, а місцевими втратами нехтують. Наприклад, для міських водопровідних труб (діаметром до 200–500 мм) довгим трубопровід називають, якщо його довжина більше, відповідно 200 або 1000 м. Якщо довжина є меншою, місцеві втрати напору можуть бути більше 5%, отже їх треба враховувати.

Розрізняють основні типи насадків (рис. 9.5): зовнішній циліндричний насадок, або насадок Вентурі (а), внутрішній циліндричний насадок, або насадок Борда (b), конічні насадки східна (c) та розхідна (d), коноїдальний насадок (e), тобто насадок, що має форму струменя, що витікає з отвору в тонкій стінці.

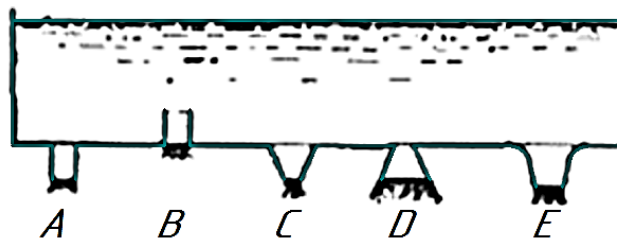


Рис. 9.5

Стінку називають *товстою*, якщо витікання через циліндричний отвір в ній відбувається як в насадку Вентурі. Така назва надана цьому насадкові тому, що течія в ньому є аналогічною потоку рідини в трубці Вентурі (рис. 9.6).

Звужування струменя відбувається в насадку, навкруги нього утворюється так звана *водоворотна* або *вальцьова* зона В. Решта потоку має назву *транзитний струмінь*, а поверхня, що відокремлює вальцьову зону від транзитного струменя – *поверхня розділення*. Окремі водовороти (вальці) можуть потрапляти в транзитний струмінь та уноситись ним, поверхня розділення відновлюється – водоворотна зона має нестійкий характер.

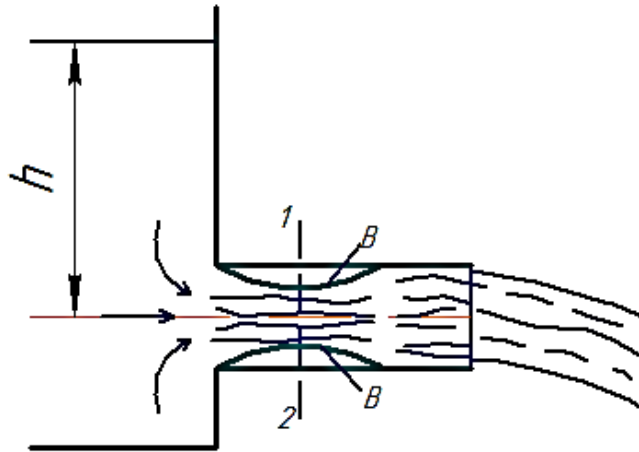


Рис. 9.6

Вальцьова зона, рівно як і транзитний струмінь в її межах, знаходяться під вакуумом, оскільки в цій зоні швидкість, а значить і кінетична енергія, є більшою, ніж за її межами, а оскільки енергія в насадку не додається, потенційна енергія, а разом з нею тиск, мають бути меншими. Максимальний вакуум має місце в перерізі стиснутого струменя 1-1. Він становить  $(0,75 \div 0,8)h$  (рис. 9.6). Ця величина має обмеження: найбільший тиск в перерізі стиснутого струменя треба підтримувати вищим за тиск пароутворення, який залежить від роду рідини та її температури. Для води при  $t = 20^{\circ}\text{C}$  він становить  $2940 \text{ Н/м}^2$ . Інакше утворюється кавітація, що призводить до зниження коефіцієнта витрати та відриву струменя від внутрішніх поверхонь насадка.

Розрахункові залежності для  $v_c$  та  $Q$  залишаються тими ж, що й (9.8) та (9.9), але величина  $\mu$  є більшою, ніж для отворів в тонкій стінці (0,82 проти 0,62). Швидкість витікання рідини в атмосферу, навпаки, знижується в 1,3 рази.

Для випадку витікання під рівень, в формули для розрахунку  $v_c$  та  $Q$  треба, як для випадку витікання через отвір, ставити різницю рівнів в посудинах  $z$ .

Насадок Борда відрізняється від насадка Вентурі лише більш сприятливими умовами входу рідини до неї, оскільки цей вхід є віддаленим від стінки посудини. Характер водоворотної зони є аналогічним.



Стискування та швидкість в стиснутому перерізі є більшими, ніж для насадка вен турі, тому насадок Борда збільшує витрату рідини порівняно з простим отвором, але дещо менше, ніж насадок Вентурі.

В східних (9.5,C) та розхідних (рис. 9.5,D) конічних насадках також утворюються водоворотні зони. Якщо діаметр отворів та загальний напір в обох насадках є однаковими, маємо співвідношення:

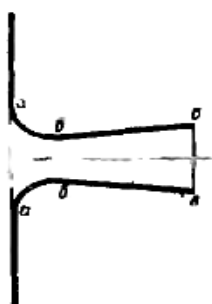
$$v_{cx} > v_B > v_{розх} \quad (9.15)$$

$$Q_{cx} < Q_B < Q_{розх} \quad (9.16)$$

Таким чином, для одержання більшої витрати рідини влаштовують розхідні насадки, а для одержання більшої швидкості на виході – східні насадки.

В насадку зі округленими вхідними кромками (рис. 9.5, E) стискування струменя зменшується, отже площа не збільшується. Втрати напору в насадку зменшуються, а швидкість витікання збільшується. Коефіцієнти витрати в такому насадку можна довести до  $\mu=0,95$ .

З точки зору збільшення витрати особливо вигідною є комбінація коноїдального та розхідного насадків (рис.9.7).



Крім збільшення витрати як у розхідного так і коноїдального насадків, у останнього ще й зменшуються втрати напору.

Якщо напір в посудині є змінним, задача ускладнюється, особливо, якщо до посудини, з якої витікає рідина, наливається така ж рідина. Доводиться вдаватися до ітераційних розрахунків за допомогою комп'ютера. Для практичного випадку – потребі у визначенні часу  $t_0$  повного випорожнення циліндричної посудини з початковою висотою рідини над рівнем отвору  $H$  формула є досить простою:

$$t_0 = \frac{2 A_n \sqrt{H}}{\mu_0 A \sqrt{2g}} = \frac{2 A_n H}{\mu_0 A \sqrt{2gH}} = 2 \frac{A_n H}{Q} \quad (9.17)$$

де  $A_n$  – площа поперечного перерізу посудини;  $Q$  – витрати рідини на початку випорожнення.

**Вільні (гідравлічні) струмені.** В курсах гідравліки *вільними* або *гідравлічними струменями* називають потоки рідини, не обмежені твердими стінками. За цим означенням рідину, що витікає із отвору або насадка, теж треба називати вільним струменем, але ця назва закріплена за потоками, що витікають під напором та мають інше призначення. Їх поділяють також на затоплені, коли струмінь оточений рідиною, та незатоплені – оточені газом (найчастіше повітрям). Приклад затопленого струменя – водяний струмінь, що випускається у водойму для вимучування наносів. до незатоплених вільних струменів належать пожежні, фонтанні, бризкальні, а також струмені, що одержують у меліоративних, дощувальних апаратах, гідромоніторах тощо.

Струмінь, що витікає в масу однорідної рідини, поступово розширюється та розсіюється в ній (рис. 9.8).

Розсіювання відбувається за рахунок турбулентного обміну між струменем та рідиною. Турбулентні вихори гальмують струмінь та захоплюють частинки нерухомої рідини. Це відбувається в місцях турбулентного суміжного шару А, який межує з *ядром постійних швидкостей* В та нерухомою рідиною С. Ці межі сходяться в *полюсі* О. Ділянка струменя до точки ліквідації ядра називається *початковою*, а за нею – *основною*.

Параметри затопленого струменя можна визначити лише на підставі дослідних даних.

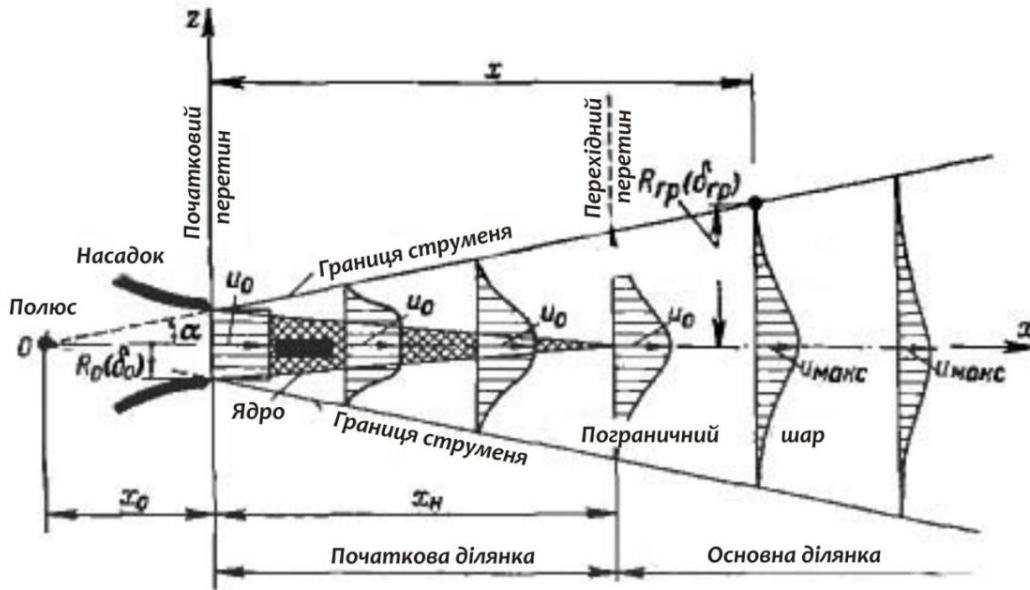


Рис.9.8

Для визначення радіуса струменя можна користуватися формулою

$$R = 0,208 K (l + nR_0) \quad (9.18)$$

$$K = \frac{1}{1 + 2,55 \sqrt{\frac{v_n}{v_0}}}$$

$$n = 17,3 - 13,3 \frac{u_0}{v_0},$$

де  $v_n$  – середня швидкість потоку;  $v_0$  – середня швидкість витікання;  $u_0$  – швидкість на осі в початковому перерізі,  $u_0 = (0,85 - 0,90)v_0$ ;  $R_0$  – радіус струменя в початковому перерізі;  $L$  – відстань від початкового до визначуваного перерізу струменя.

Незатоплений вільний струмінь найчастіше буває турбулентним, його можна розбити на три частини (рис. 9.9): компакту, частково роздрібнену та розпорошену.

В межах *компактної частини* зберігаються циліндрична форма струменя і суцільність (безперервність) потоку.

В *частково роздрібненій частині* суцільність струменя порушується, при цьому потік поступово розширюється.



Рис. 9.9

В межах *розпорошеної частини* відбувається остаточний розпад потоку на окремі краплини.

Руйнування компактного струменя протягом другої та третьої ділянки пояснюється *аерацією* потоку рідини, яка обумовлюється турбулентним обміном через межі струменя між повітряним та водним середовищами.

На практиці до струменів різного призначення ставлять різні умови. Так, пожежний струмінь мусить мати великий радіус дії та ударну силу. Гідромоніторний струмінь має розвинену компактну частину. Навпаки, струмені дощувальних апаратів мають добре розвинену розпорошену частину. В курсах водопостачання додаються формули для визначення «дальності польоту» вертикальних та похилих пожежних струменів, в курсі гідромеханізації – довжини компактної частини струменя, в курсі інженерної меліорації – параметрів дощувальних струменів.

## РОЗДІЛ 10. ГІДРАВЛІЧНІ МАШИНИ ТА ГІДРОПРИВОДИ

Гідравлічні машини призначені для створення або використання потоків рідкого середовища як носія енергії. Це насоси, гідродвигуни та гідроперетворники. Гідроприводи є комбінацією цих машин. Усі гідромашини поділяють на *динамічні* та *об'ємні*.

**Насос** — це машина для створення потоку рідини. В динамічному насосі рідина рухається під силовою дією на неї в камері, яка постійно сполучається зі входом та виходом насоса. В об'ємному насосі рідина рухається за рахунок періодичної зміни об'єму камери, що поперемінно сполучається з входом та виходом насоса.

**Гідродвигун** призначений для перетворення енергії потоку рідини в енергію вихідної ланки. Динамічні гідродвигуни – це гідротурбіни, а об'ємні – це гідроциліндри, поворотні гідродвигуни та гідромотори. Гідроциліндр забезпечує зворотно-поступальний рух вихідної ланки — штока або плунжера, поворотний гідродвигун – обмежений поворотний рух вихідної ланки – вала. Гідротурбіна та гідромотор забезпечують необмежене обертання вала.

### Основи розрахунку гідромашин.

**Напір** насоса  $H$  визначається як

$$H = \frac{P}{\rho g}, \quad (10.1)$$

де  $p$  – тиск насоса.

Обчислюється  $H$  з рівняння Бернуллі

$$H = (z_{вих} - z_{вх}) + \frac{P_{вих} - P_{вх}}{\rho g} + \frac{v_{вих}^2 - v_{вх}^2}{2g}, \quad (10.2)$$

або

$$H = \Delta z + \frac{p_{ман} - p_{вак}}{\rho g} + \frac{v_{вих}^2 - v_{вх}^2}{2g}, \quad (10.3)$$

де  $z_{вх}$  та  $z_{вих}$  – висота центру тяжіння перерізу входу та виходу з насоса;  
 $p_{вих}$  та  $p_{вх}$  – тиск на виході та вході в насос;  $v_{вих}$  та  $v_{вх}$  – швидкість рідини на  
виході та вході в насос;  $p_{ман}$  та  $p_{вак}$  – тиск на виході та вакуум на вході в насос;  
 $\Delta z$  – відстань по вертикалі між точками підключення вакуумметра і  
манометра (рис.10.1).

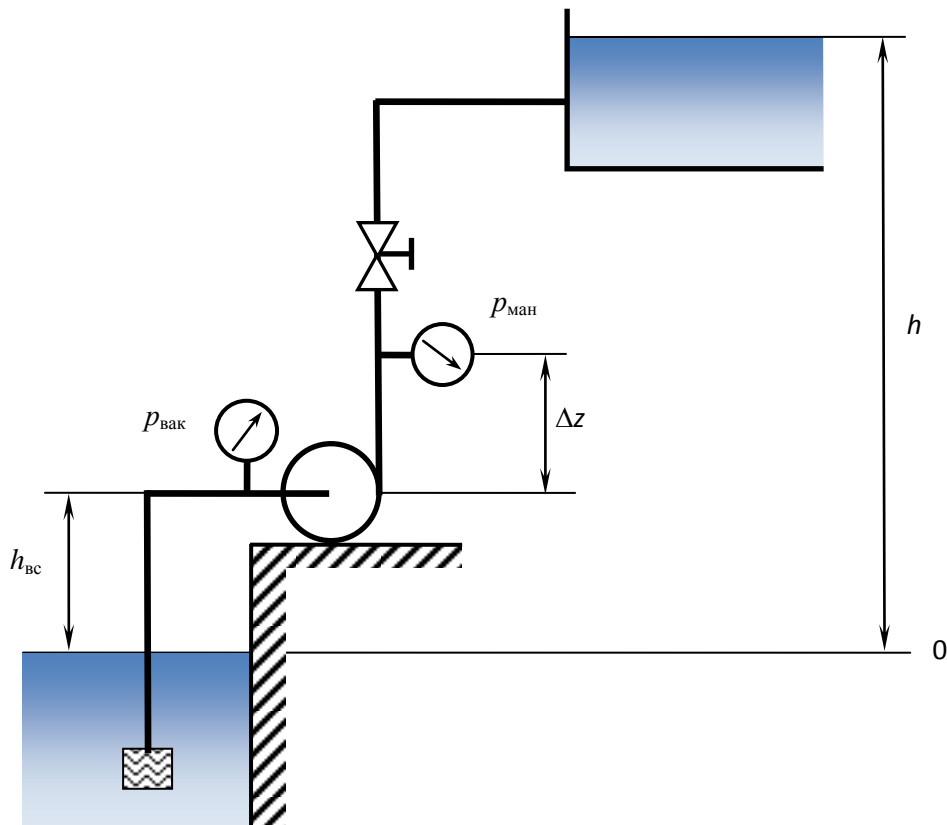


Рис. 10.1.

Тиск насоса  $p$  визначається з формули

$$p = p_{вих} - p_{вх} + \frac{\rho}{2}(v_{вих}^2 - v_{вх}^2) + \rho g(z_{вих} - z_{вх}). \quad (10.4)$$

Напір рідини, що подається на гідромотор, визначається з (10.2), але  
вхід та вихід міняються місцями.

Перепад тиску на гідромоторі

$$\Delta p_{z.m} = p_1 - p_2, \quad (10.5)$$

або

$$\Delta p_{z.m} = \rho g H_{z.m}, \quad (10.6)$$

де  $p_1$  та  $p_2$  – тиск на вході та виході гідромотора.

Витрату рідини насосом  $Q$  називають **об'ємною подачею**. Ідеальна подача насоса  $Q_i$  – це сума об'ємної подачі та об'ємних втрат насоса, визначається:

для динамічних насосів

$$Q_i = k R_2 n, \quad (10.7)$$

де  $k$  – конструктивний параметр;  $R_2$  – радіус робочого колеса на виході потоку рідини;  $n$  – частота обертання робочого колеса;

для об'ємних насосів

$$Q_i = V_0 n, \quad (10.8)$$

де  $V_0$  – робочий об'єм насосу.

**Корисна потужність насосу**  $N_k$  – потужність, що передається рідині

$$N_k = p Q = \rho g Q H. \quad (10.9)$$

Потужність, що споживається насосом  $N$ :

$$N = M \omega, \quad (10.10)$$

де  $M$  – крутний момент на валу насоса;  $\omega$  – кутова швидкість обертання вала.

Ефективність насосу

$$\eta = \frac{N_k}{N} = \frac{\rho g Q H}{M \omega} = \frac{p Q}{M \omega}. \quad (10.11)$$

Комбінація рівнянь (10.9) та (10.11) дає

$$N = \frac{\rho g Q H}{\eta} = \frac{p Q}{\eta}. \quad (10.12)$$

Залежність (10.12) дає можливість підібрати двигун для привода насоса та обчислити потужність необхідну для його роботи

Корисна потужність гідромотора

$$N_k = M_{z.m} \omega, \quad (10.13)$$

де  $M$  – крутний момент на вихідному ланцюгу гідромотора;  $\omega$  – кутова швидкість обертання вихідного ланцюга – вала.

Потужність гідромотора

$$N = \rho g Q H_{z.m} = \Delta p_{z.m} Q, \quad (10.14)$$

де  $\Delta p_{гм}$  – перепад тиску в гідромоторі з виразу (10.6).

Об'ємна витрата гідромотора  $Q$  більше за ідеальну витрату  $Q_i$ , оскільки на відміну від насоса, об'ємні витрати гідромотора спрямовані в той же бік, що й основний потік рідини. **Об'ємний ККД** гідромотора

$$\eta_{o.z.m} = \frac{Q_i}{Q} = \frac{Q_i}{Q_i - q_{втр}}, \quad (10.15)$$

де  $q$  – об'ємні втрати в гідромоторі (витоки),  
або

$$\eta_{z.m} = \frac{N_k}{N} = \frac{M_{z.m} \omega}{\Delta p_{z.m} Q}. \quad (10.16)$$

Частота обертання вала гідромотора  $n$  може бути обчислена за формулами (10.8) та (10.15), а саме



$$n = \frac{Q}{V_0} \eta_{o.гм}. \quad (10.17)$$

Крутний момент  $M$  на валу гідромотора

– ідеальний

$$M_i = \frac{\Delta p_{гм} V_0}{2\pi}, \quad (10.18)$$

– реальний

$$M = \frac{\Delta p_{гм} V_0}{2\pi} \eta_{м.гм}, \quad (10.19)$$

де  $\eta_{м.гм}$  – механічний ККД гідромотора.

Для циліндрів потужність обчислюють за формулою (10.14), корисну потужність — з виразу

$$N_k = Rv, \quad (10.20)$$

де  $R$  – зусилля на штоку;  $v$  – швидкість штока.

ККД гідроциліндра

$$\eta_{гц} = \frac{N_k}{N} = \frac{Rv}{N}. \quad (10.21)$$

Втрати потужності в гідромашинах ділять на три види, відповідні ККД (для насосів):

– гідравлічний ККД  $\eta_r$  – відношення корисної потужності до суми корисної та витраченої на додання гідравлічних опорів в насосі;

– механічний ККД  $\eta_m$  – це відносна частка механічних втрат в насосі;

– об'ємний ККД  $\eta_o$  – відношення корисної потужності насоса до суми корисної та витраченої з витокami.

ККД будь-якої гідромашини – це добуток цих ККД

$$\eta = \eta_z \eta_m \eta_o. \quad (10.22)$$

**Відцентрові насоси** належать до групи динамічних лопатевих насосів, як і осьові, в яких рідина рухається через робоче колесо в напрямку його осі. На рис. 10.2 зображена схема одноступінчатого відцентрового насоса консольного типу: 1 – вхід; 2 – робоче колесо; 3 – спіральний вихід (равлик); 4 – дифузор. Робоче колесо складається з двох дисків, між якими знаходяться лопаті, зігнуті у напрямку, протилежному обертанню колеса. Відцентрова сила відкидає рідину у спіральний відвід із збільшенням її швидкості та тиску. У відводі та дифузорі кінетична енергія рідини перетворюється на потенціальну (енергію тиску).

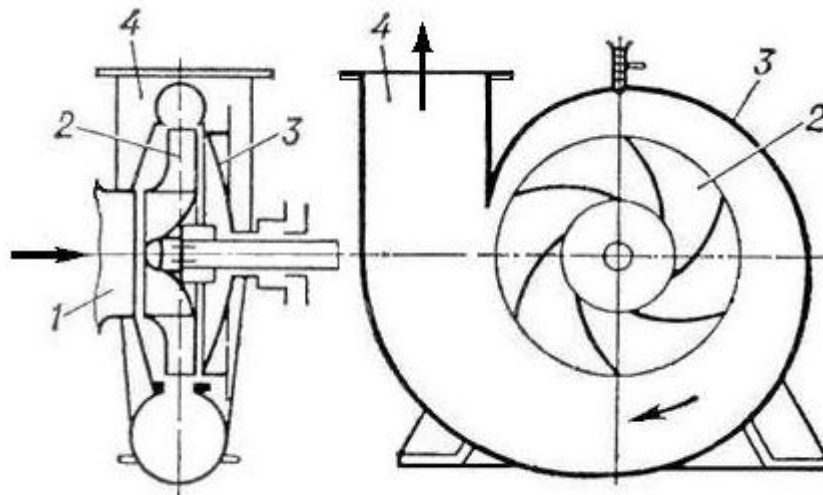


Рис. 10.2.

В робочому колесі рідина рухається разом з колесом та її швидкість  $u$  перпендикулярна до радіуса колеса, а також уздовж лопатей з відносною швидкістю  $w$ , яка за умови нескінченної кількості лопатей спрямована по дотичній до профілю лопаті. Абсолютна швидкість  $v$  дорівнює геометричній сумі складових швидкостей (рис.10.3)

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}. \quad (10.23)$$

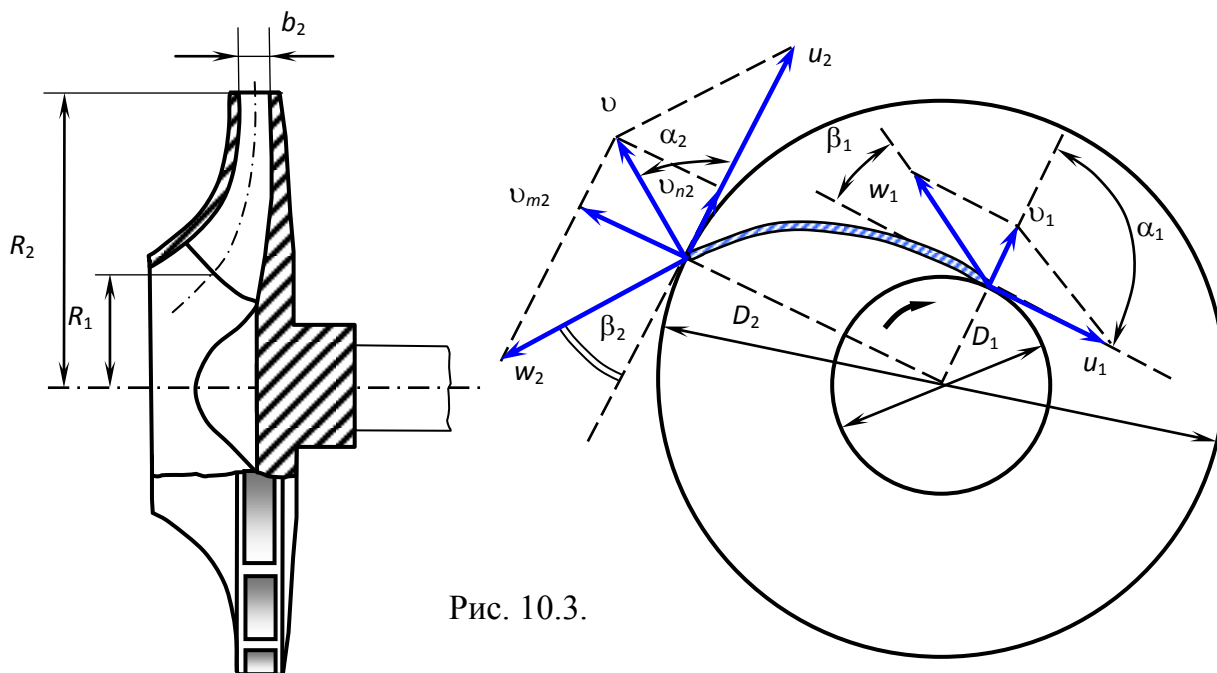


Рис. 10.3.

Кут між  $\vec{v}$  та  $\vec{u}$  позначимо  $\alpha$ , а між дотичними до лопаті та до кола –  $\beta$ . Величини на вході до лопаті мають індекс 1, на виході 2.

Розкладемо  $\vec{v}$  на дві взаємно перпендикулярні складові:  $v_n$  – обводову та  $v_m$  – меридіональну – проекцію  $\vec{v}$  на площину, що проходить через вісь колеса та актуальну точку.

Можна вважати, що розподіл меридіональних швидкостей по ширині колеса є рівномірним, тоді витрата рідини через колесо

$$Q = v_{2m} A_2 \psi_2 \eta_o = 2\pi R_2 b_2 \psi_2 \eta_o v_{2m}, \quad (10.24)$$

де  $A_2$  – площа нормального перерізу меридіонального потоку;  $b_2$  – ширина робочого колеса на виході;  $\eta_o$  – об'ємний ККД;  $\psi_2$  – коефіцієнт стиснення на виході з робочого колеса, визначаємо з рівняння

$$\psi_2 = 1 - \frac{z\delta}{2\pi R_2 \sin \beta_2}, \quad (10.25)$$

де  $z$  – кількість лопатей,  $\delta$  – товщина лопаті.

Використання припущення, що кількість лопатей є нескінченно великою, а втрат потужності в насосі немає, дає формулу для обчислення ідеального напору

$$H_{id} = \frac{v_2 u_2 \cos \alpha_2 - v_1 u_1 \cos \alpha_1}{g} = \frac{v_2 u_2 - v_1 u_1}{g}. \quad (10.26)$$

Якщо на вході  $\alpha = 90^\circ$  (наприклад у прямоосевому конфузори) (10.26) спрощується до

$$H = \frac{v_2 u_2 \cos \alpha_2}{g} = \frac{v_{n2} u_2}{g}. \quad (10.27)$$

Реальний напір насоса з врахуванням скінченної кількості лопатей та втрат напору

$$H = \frac{v_2 u_2 \cos \alpha_2}{g} \eta_r k_z, \quad (10.28)$$

де  $\eta_r$  – гідравлічний ККД;  $k_z$  – безрозмірний коефіцієнт впливу кінцевої кількості лопатей:

$$k_z = \frac{1}{1 + \frac{2\varphi}{z \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right]}}, \quad (10.29)$$

де  $\varphi$  – коефіцієнт, що враховує вплив спрямовуючого апарату ( $\varphi = 0,8 \dots 1,0$  за наявністю спрямовуючого апарату,  $\varphi = 1,0 \dots 1,3$  за його відсутністю);  $z$  – кількість лопатей.

**Робочими характеристиками насоса** є залежність напору  $H$ , потужності  $N$ , ККД  $\eta$  та припустимої вакууметричної висоти всмоктування  $h_{вак}^{дон}$  (див.  $h_{вс}$  на рис 10.1) від подачі (витрати)  $Q$ . Всі ці характеристики визначають дослідним шляхом (рис. 10.4).

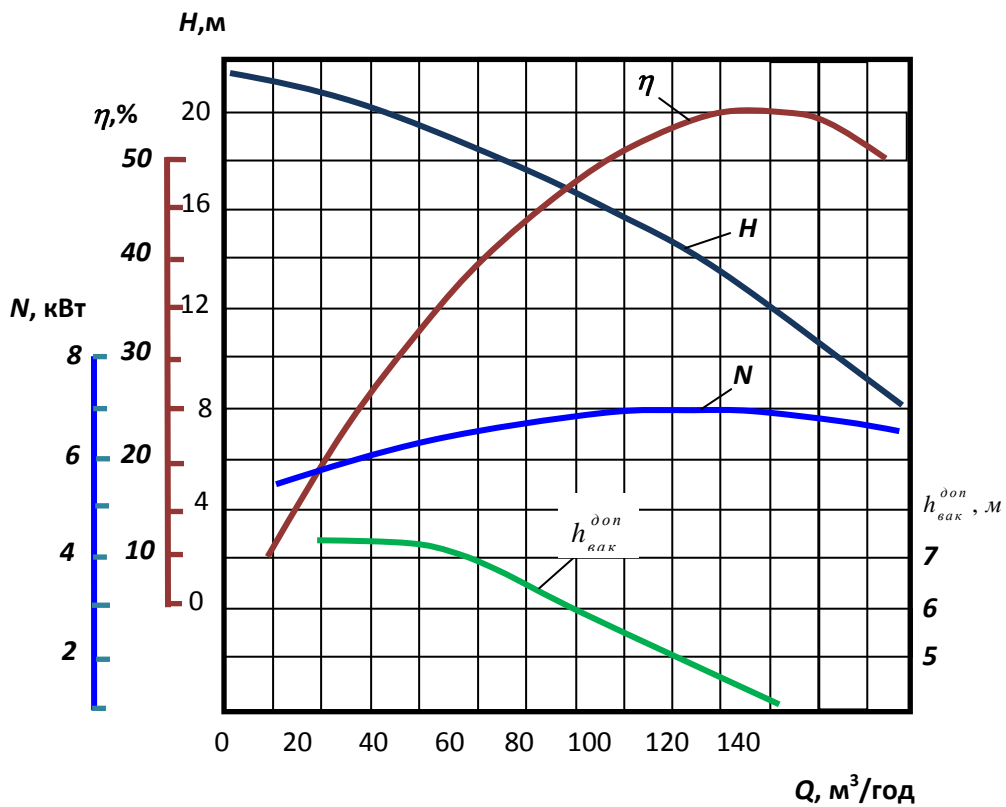


Рис. 10.4.

**Поршневі насоси** належать до об'ємних гідромашин. Їх різновид – плунжерні насоси – служать наприклад, для подачі палива в двигуни внутрішнього згорання.

Найбільш простим є поршковий насос односторонньої дії (рис.10.5).

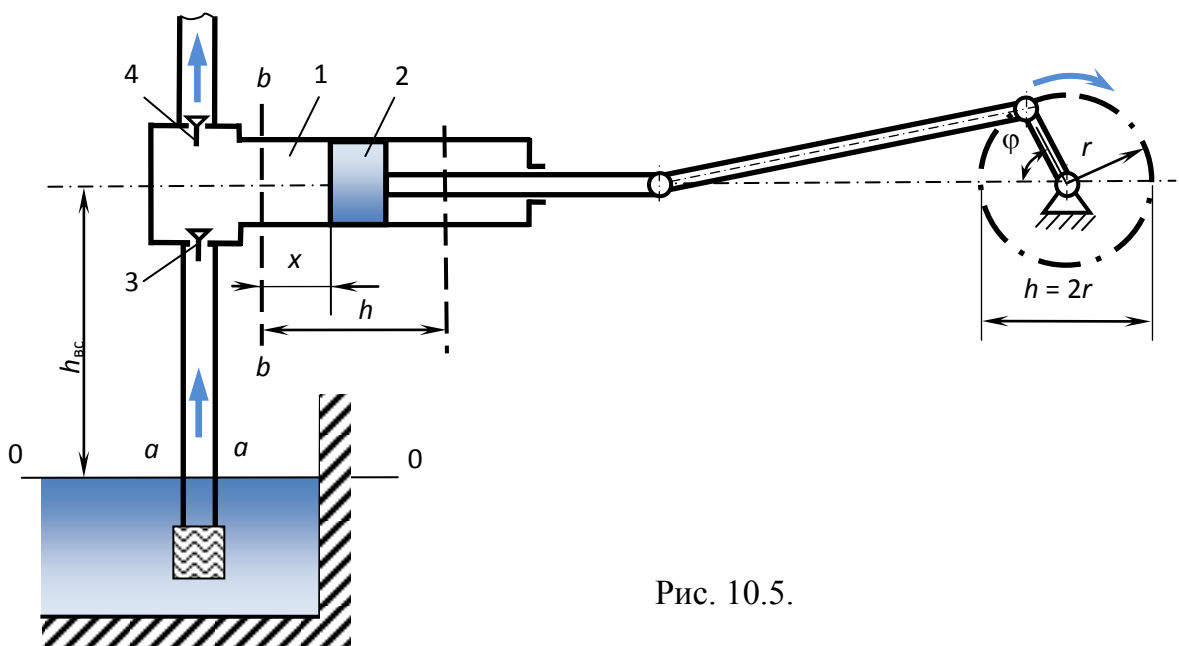


Рис. 10.5.

Рух поршня 2 вправо збільшує об'єм замкненої камери 1, в ній утворюється вакуум, що відкриває всмоктувальний клапан 3. Рідина заповнює камеру 1. Зворотний рух поршня збільшує тиск в камері, відкривається нагнітальний клапан 4, рідина потрапляє до напірного трубопроводу.

Насос двосторонньої дії (рис. 10.6) не має недоліку цього насоса – зупинки подачі під час всмоктування. Рух поршня вправо супроводжується заповненням рідиною лівої робочої камери та виштовхування рідини з лівої камери, та навпаки.

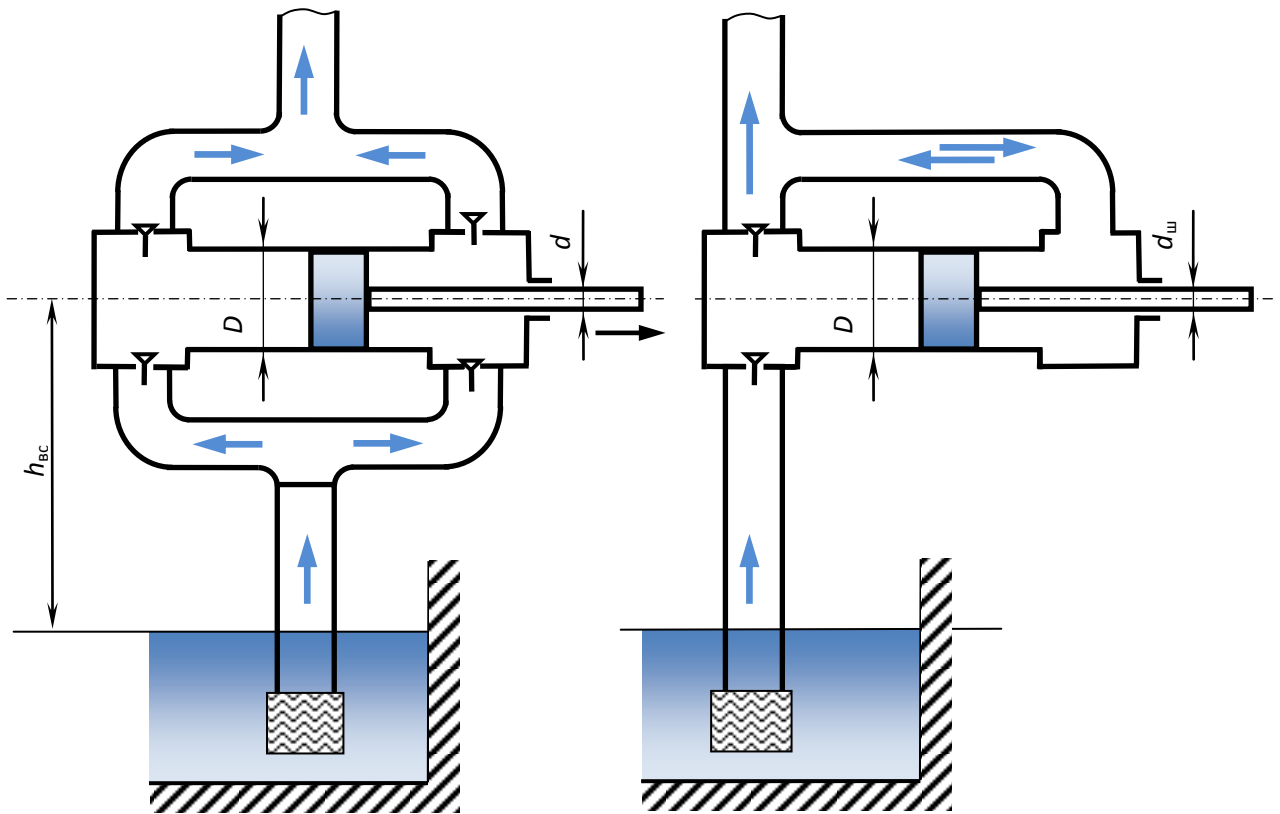


Рис. 10.6.

Рис. 10.7.

Насос диференціальної дії (рис. 10.7) відрізняється від попереднього тим, що всмоктувальний трубопровід під'єднаний тільки до лівої камери, а на виході із правої камери немає нагнітального клапана. Всмоктування відбувається як в насосі односторонньої дії, а під час витискання рідина одночасно потрапляє до нагнітального трубопроводу та правої камери.

Всмоктування до лівої камери супроводжується витисканням з правої камери. Таким чином, подача (витрата) відбувається за подвійний хід поршня, а всмоктування – за один хід.

***Ідеальна подача насоса***

$$Q_{i\partial} = \frac{V_0 n}{60}, \quad (10.30)$$

де  $V_0$  – робочий об'єм;  $n$  – частота обертання вала за хвилину.

***Реальна подача***

$$Q_p = \frac{V_0 n}{60} \eta_o, \quad (10.31)$$

де  $\eta_o$  – об'ємний ККД.

***Робочий об'єм насоса***

– односторонньої дії

$$V_0 = A h, \quad (10.32)$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу поршня;  $h = 2r$  – хід поршня ( $r$  – радіус кривошипа);

– двосторонньої дії

$$V_0 = A h + (A - A_{uu}) h = (2A - A_{uu}) h, \quad (10.33)$$

де  $A_{uu}$  – площа перерізу штока;

– диференціальної дії

$$V_0 = A h + (A - A_{uu}) h + (A - A_{uu}) h = A h. \quad (10.34)$$

Залежність переміщення поршня  $x$  від кута повороту кривошипа  $\varphi$ , наближено

$$x = r (1 - \cos \varphi). \quad (10.35)$$

де швидкість переміщення поршня

$$v_n = \frac{dx}{dt} = r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = r\omega \sin \varphi, \quad (10.36)$$

де  $\omega$  – кутова швидкість кривошипу; прискорення поршня, а, відповідно, і рідини, що прямує за ним

$$a_n = \frac{dv_n}{dt} = r\omega^2 \cos \varphi. \quad (10.37)$$

Поточне ідеальне значення подачі

$$Q_{id.m} = Av_n = r\omega A \sin \varphi. \quad (10.38)$$

На рис.10.8 наведено графіки подачі насосів:

a) односторонньої дії;

b) двосторонньої дії;

c) тристоронньої дії із зміщенням фаз робочих циклів на  $120^\circ$ .

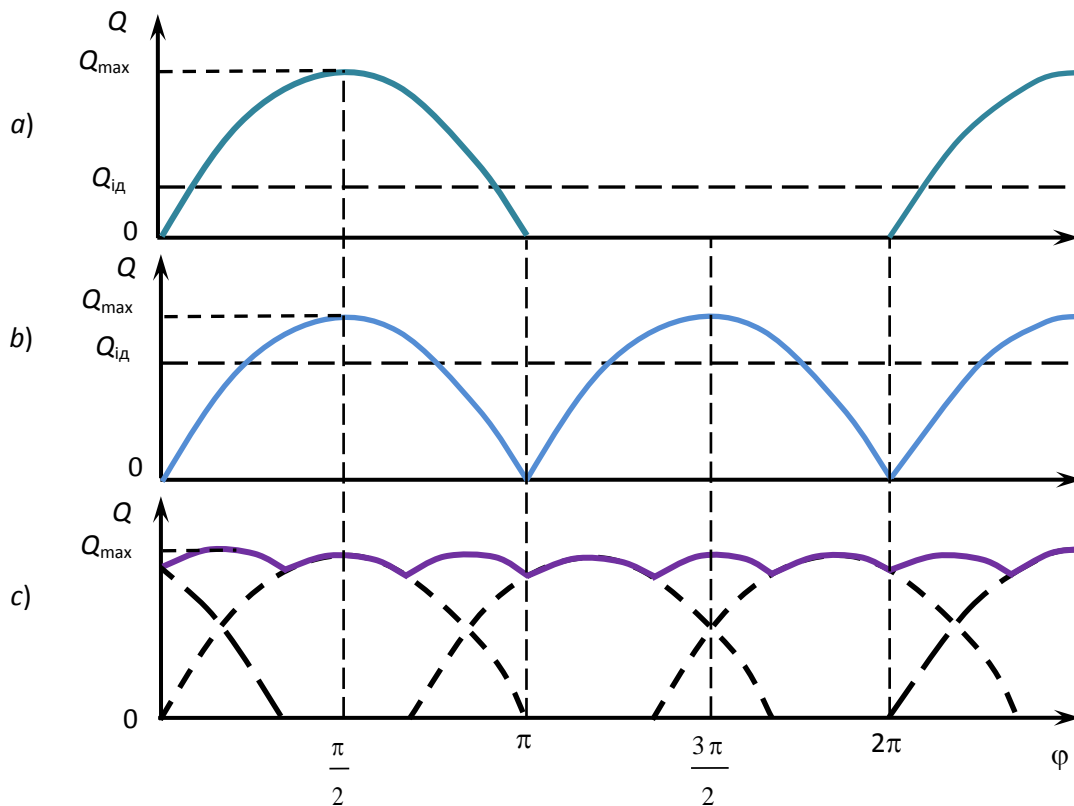


Рис. 10.8.

Нерівномірність подачі визначається коефіцієнтом нерівномірності  $\sigma$



$$\sigma = \frac{Q_{\max} - Q_{\min}}{Q_{id}}, \quad (10.39)$$

де  $Q_{\max}$  та  $Q_{\min}$  – відповідно максимальна та мінімальна витрати насосу.

Для варіантів *a)*  $\sigma = 3.14$ ; *b)*  $\sigma = 1.57$ ; *c)*  $\sigma = 1.05$ .

**Роторні насоси та гідромотори.** Роторна гідромашина є об'ємною, її робочі органи мають обертальний, а можливо й зворотно-поступальний рух. Найбільш розповсюдженими є *шестеренні гідромашини* (рис.10.9), які мають працювати в режимі насоса або гідромотора. Під час обертання шестерень насоса рідина, яка заповнює їх западини, переходить із зони всмоктування до зони нагнітання (на рис.10.9 — догори). В режимі гідромотора рідина крутить шестерні.

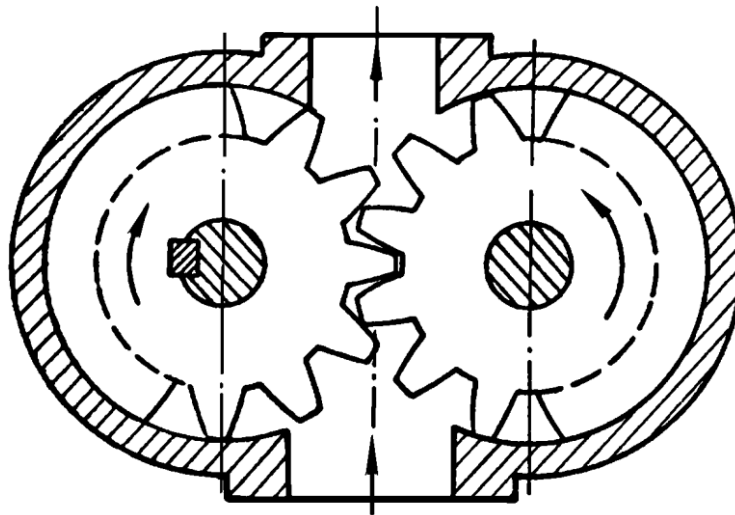


Рис. 10.9.

Робочий об'єм шестеренної гідромашини

$$V_0 = 2\pi m^2 z b = 2\pi D_n m b, \quad (10.40)$$

де  $m$  – модуль зачеплення;  $z$  – кількість зуб'ів;  $b$  – ширина шестерні;  $D_n$  – діаметр кола впадин зуб'ів.

Подача шестеренного насоса

$$Q = V_0 n \eta_o = 2 \pi m^2 z b n \eta_o, \quad (10.41)$$

де  $\eta_o$  – об'ємний ККД;  $\eta_o = 0,7 \dots 0,95$ .

Частоту обертання вала та крутний момент шестеренного гідромотора можна підрахувати за формулами (10.17 та 10.19).

**Об'ємний гідропривод**, як правило, включає в себе насос, гідродвигун (гідроциліндр або гідромотор), гідроапаратуру (гідроклапани, гідродроселі, гідророзподільники), що з'єднуються між собою гідролініями, та допоміжні пристрої – фільтри, гідробаки, теплообмінники тощо. За характером руху вихідної ланки розрізняють гідроприводи поступального, обертального та поворотного рухів. Якщо є необхідність змінювати швидкість робочих органів різних машин, застосовують гідропривод з дросельним, машинним керуванням або з їх комбінацією.

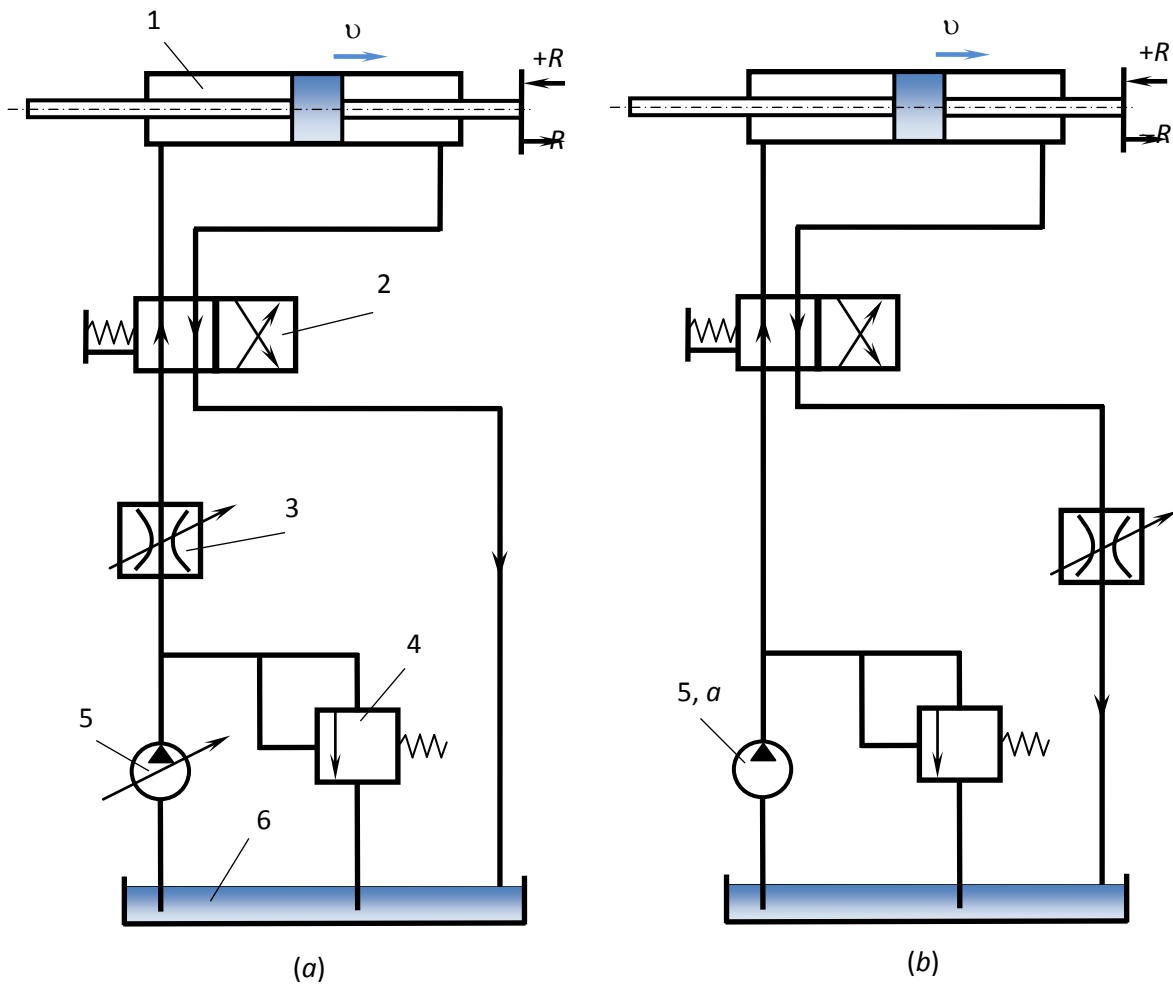
За умовою послідовного підключення дроселя (місцевого регульованого гідравлічного опора) (рис.10.10,*a*) постійний тиск в нагнітальному трубопроводі підтримується шляхом безперервного зливання робочої рідини за допомогою переливного клапана. Витрата рідини, що надходить до гідроциліндра, дорівнює витраті через дросель:

$$Q = Q_{dp} = \mu A_{dp} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)}, \quad (10.42)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт витрати;  $A_{dp}$  – площа прохідного отвору дроселя;  $p_1$ ,  $p_2$  – тиск відповідно перед та за ним. Якщо нехтувати втратами тиску в гідролінії та в гідророзподільнику, тоді тиск  $p_2$  визначається з формули

$$p_2 = \frac{R}{A_n}, \quad (10.43)$$

де  $A_n$  – площа поршня;  $R$  – зусилля на штоку гідроциліндра.



1 — гідроциліндр двосторонньої дії; 2 — гідророзподільник ; 3 — регульований дросель; 4 — напірний клапан; 5 — насос з регулюванням та постійним напрямом потоку; 5, *a* — нерегульований насос з постійним напрямом потоку; 6 — відкритий резервуар з водою.

Рис. 10.10.

Отже, середня швидкість поршня гідроциліндра

$$v_n = \frac{Q}{A_n} = \mu \frac{A_{dp}}{A_n} \sqrt{\frac{2}{\rho} \left( p_1 - \frac{R}{A_n} \right)}. \quad (10.44)$$

Якщо дросель поставлено після гідродвигуна (рис.10.10, *b*), тиск підтримують постійним також за допомогою переливного клапана. Швидкість поршня в цьому варіанті

$$v_n = \mu \frac{A_{dp}}{A_n} \sqrt{\frac{2}{\rho} \left( p_1 \pm \frac{R}{A_n} \right)}. \quad (10.45)$$

Необхідність переливного клапана відпадає (а разом з цим частини робочої рідини, що не виконує корисної роботи), якщо дросель встановлюється в гідролінії, що з'єднує нагнітальний трубопровід із зливним (рис.10.11). Замість переливного клапана встановлюється запобіжний клапан. Якщо нехтувати тертям, тиск дорівнює

$$p_1 = \frac{R}{A_n}. \quad (10.46)$$

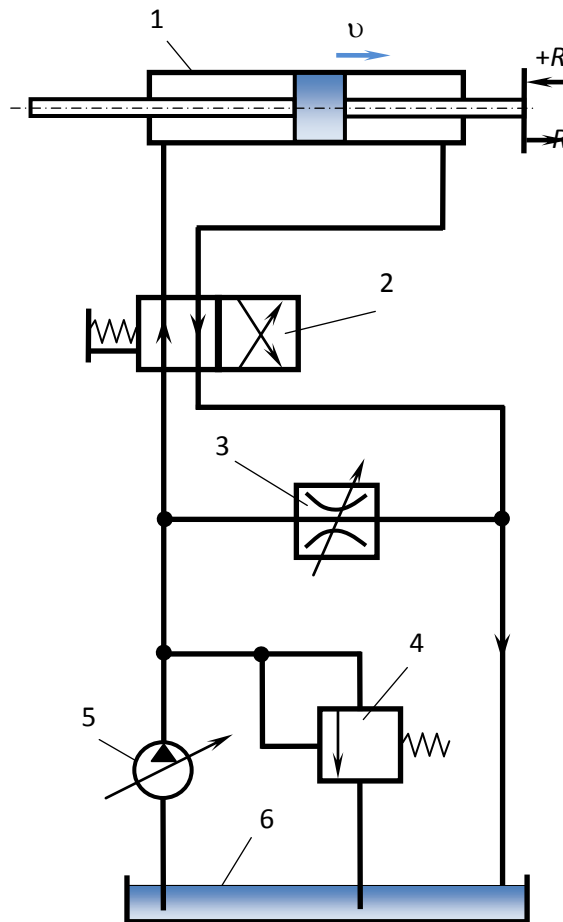


Рис. 10.11.

В цьому випадку подача насоса  $Q_n$  поділяється на два потоки;  $Q_{гд}$  – до гідродвигуна,  $Q_{др}$  – через дросель до бака. Отже

$$Q_{\text{зд}} = Q_n - Q_{\text{дп}}, \quad (10.47)$$

а швидкість поршня

$$v_n = \frac{Q_{\text{зд}}}{A_n} = \frac{Q_n}{A_n} - \mu \frac{A_{\text{дп}}}{A_n} \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{R}{A_n}}. \quad (10.48)$$

За *машинного керування* змінюється робочий об'єм насоса або гідродвигуна, або обох. Для усіх схем (рис.10.12) справедливими є формули

$$Q_n = Q_{\text{зм}}; \quad V_{\text{он}} n_n = V_{\text{зм}} n_{\text{зм}}, \quad (10.49)$$

де  $Q_n$  – подача насоса ;  $Q_{\text{гд}}$  – витрата через гідромотор;  $V_{\text{он}}$  та  $V_{\text{гм}}$  – робочі об'єми насоса і гідромотора;  $n_n$  та  $n_{\text{гм}}$  – частота обертання насоса і гідромотора. Із рівняння (10.49) частота обертання гідромотора дорівнює

$$n_{\text{зм}} = n_n \frac{V_{\text{он}}}{V_{\text{зм}}}. \quad (10.50)$$

Тиск в системі змінюється залежно від навантаження гідромотора

$$p_n = \Delta p_{\text{зм}} + \Delta p_{\text{тп}} = 2\pi \frac{M_{\text{зм}}}{V_{\text{зм}}} + \Delta p_{\text{тп}}, \quad (10.51)$$

де  $\Delta p_{\text{гм}}$  та  $M_{\text{гм}}$  – перепад тиску та крутний момент на валу гідромотора;  $\Delta p_{\text{тп}}$  – втрати тиску на тертя в трубопроводах.

Таким чином для гідропривода із регульованим насосом, коли  $n_n = \text{const}$ ;  $V_{\text{гм}} = \text{const}$ ;  $\Delta p_{\text{гм}} = \text{const}$

$$M_{\text{зм}} = \frac{1}{2\pi} V_{\text{зм}} \Delta p_{\text{зм}} = \text{const}, \quad (10.52)$$

$$N_n = N_{\text{зм}} = Q_{\text{зм}} \Delta p_{\text{зм}} \neq \text{const}, \quad (10.53)$$

тобто ідеальний момент на валу гідромотора є постійним, потужність прямопропорційна витраті та перепаду тиску на гідромоторі (рис.10.12, *a*). для схеми з регульованим гідромотором (рис.10.12, *b*), коли  $n_H = \text{const}$ ;  $V_{OH} = \text{const}$ ;  $\Delta p_{ГМ} = \text{const}$  маємо залежності:

$$M_{\text{гм}} = \frac{1}{2\pi} V_{\text{гм}} \Delta p_{\text{гм}} = \frac{1}{2\pi} V_{OH} \frac{n_H}{n_{\text{гм}}} \neq \text{const}, \quad (10.54)$$

$$N_{\text{гм}} = Q_{\text{гм}} \Delta p_{\text{гм}} = \text{const}, \quad (10.55)$$

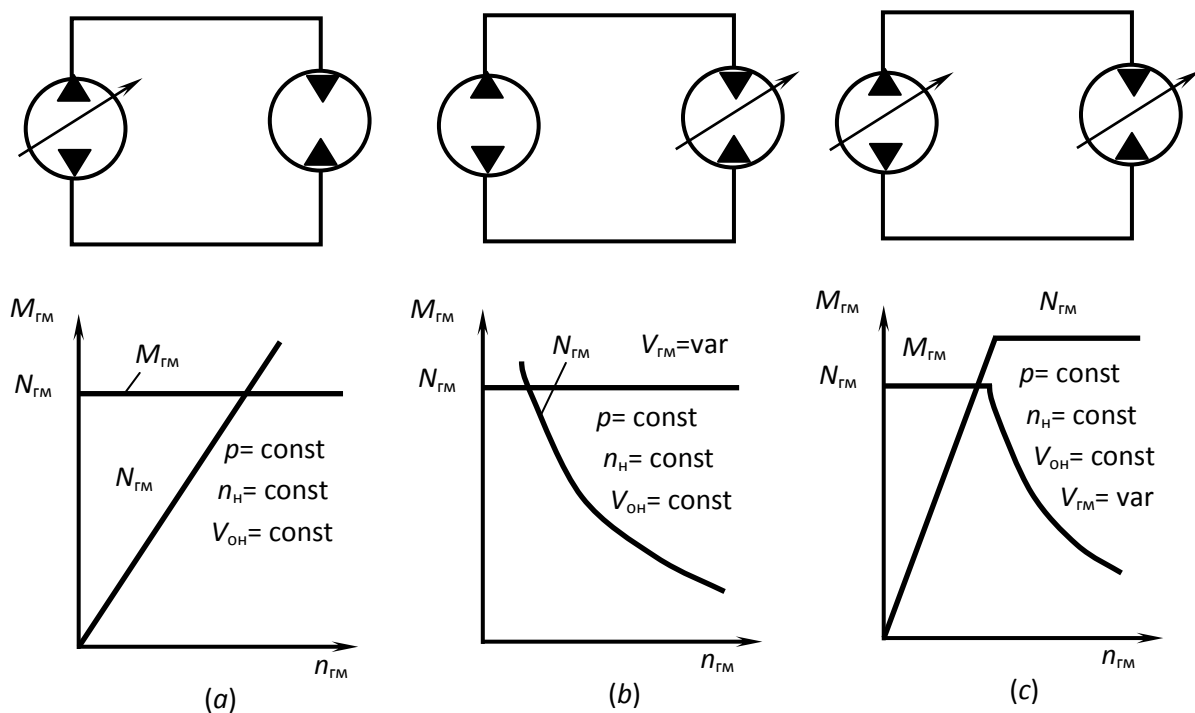


Рис. 10.12.

Ідеальний момент на валу гідромотора при цьому є зворотно пропорційним частоті його обертання, потужність не змінюється.

Якщо регульованими є робочі об'єми насоса та гідромотора (рис.10.12, *c*), це дає можливість реалізувати найбільший діапазон регулювання частоти обертання гідромотора.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Агроскин И.И., Дмитриев Г.Т., Пикалов Ф.И., Гидравлика. 4-е изд. переработанное – М. –Л.: изд. «Энергия», 1964. - 352 с.
2. Алешко П.И. Механика жидкости и газа. Харьков. Изд. при «Харьк. Авиаци. ин-т» изд. объедин. Вища шк., 1977. – 320 с.
3. Вейннк А.И. Техническая термодинамика и основы теплопередачи. 3-е изд, доп – М.; изд. «Металлургия», 1965. – 376 с.
4. Геращенко О.А., Назарчук М.М. Об учете смачиваемости поверхности при решении задач гидродинамики / Журнал технической физики, Том XXVII, №12, 1957. С. 2797-2798.
5. Гидрогазодинамика: электрон. учеб. пособие в формате pdf / В.А. Кулагин, Е.П. Грищенко. – Красноярск: ИПК СФУ, 2009. – 277 с.
6. Гідрогазодинаміка: навч. посіб. / В.І. Дешко, В.О. Виноградов-Салтиков, В.Г. Федоров; за ред. В.Г. Федорова. – К.: НТТУ «КПІ», 2014. – 416 с.
7. Дідур В.А. Гідравліка, сільськогосподарське водопостачання та гідропневмопривод / В.А. Дідур, О.Д. Савченко, С.І. Пастушенко, С.І. Мовчан. – Запоріжжя: Прем'єр, 2005. – 464 с.
8. Зуев Ф.Г. и др. Механизация погрузочно-разгрузочных, транспортных и складских работ / Ф.Г. Зуев, Н.А. Левачев, Н.А. Лотков, Под ред Ф.Г. Зуева. – М. Агропромиздат, 1988. – 447 с.
9. Калинушкин М.П. Вентиляторные установки. 5-е изд., доп. – М.: Изд. «Высш шк.», 1979. – 229 с.
10. Кривцов В.С., Олейников А.М., Яковлев А.И. Неисчерпаемая энергия. Кн.2 Ветроэнергетика. – Учебник. – Харьков: Нац. Аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», Севаст. нац. техн. ун-т, 2004. – 519 с.

11. Машиностроительная гидравлика Примеры расчетов / В.В. Вакина, И.Д. Денисенко, А.Л. Столяров. – К.: Вища шк. Головне вид-во, 1986. – 208 с.
12. Повх И.Л. Техническая гидромеханика. 2-е изд., доп. – Л., «Машиностроение» (Ленингр. отд-ние), 1976. – 504 с.
13. Fundamentals of fluid mechanics/Bruce R. Munson, Donald F. Young, Theodore H. Okiishi. Published in Canada, John Wiley & Sons, Inc. 1990. – 845 с.



Наукове видання

В. Г. Федоров, Н.С. Мамелюк, О.І. Кепко, О.С. Пушка

# Гідравліка і гідропривод

ДОВІДНИК

для студентів спеціальності  
«Агроінженерія»

*За редакцією д-ра техн. наук, проф. В.Г. Федорова  
Рекомендовано Вченою радою Уманського НУС*

Підписано до друку 11.05.2017 р. Формат 60x84/16.  
Папір офсетний. Ум. друк. арк.7,84  
Тираж 300 прим. Замовлення № 497

Видавничо-поліграфічний центр «Візаві»  
20300, м. Умань, вул. Тищика, 18/19  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК № 2521 від 08.06.2006.  
тел. (04744) 4-64-88, 4-67-77, (067) 104-64-88  
vizavi-print.jimdo.com  
e-mail: vizavi08@mail.ru