Графічний метод розв'язування рівнянь

Особливості та доцільність застосування

У статті автори розкривають суть графічного методу розв'язування рівнянь, проведено класифікацію рівнянь за типами. Для демонстрації актуальності проблеми було використано завдання зовнішнього незалежного оцінювання, що містять рівняння та системи рівнянь і розв'язують графічно.

Олена МЕЛЬНИЧЕНКО, доцент кафедри вищої математики і фізики Білоцерківського національного аграрного університету, кандидат сільськогосподарських наук
Тетяна ЧЕРНОВА, учениця 10-го класу Білоцерківської ЗОШ I—III ст. № 11, Київська обл.

Актуальність і доцільність. У курсі шкільної алгебри значну частину становлять рівняння та методи їх розв'язування. Вивчаючи лінійні, квадратні, дробово-раціональні, ірраціональні, логарифмічні, показникові чи тригонометричні рівняння, варто розглядати не лише алгебраїчні методи їх розв'язання, але й альтернативні, наприклад графічний.

Для вчителя важливо володіти різноманітними способами правильного оформлення алгоритму розв'язування рівнянь, який би не містив громіздких записів, за допомогою яких учні змогли б продемонструвати яскраві, ефективні, а інколи й несподівані застосування теоретичного матеріалу.

Нестандартний метод привчає учнів не задовольнятися шаблонами, алгоритмами, а вдумливо підходити до пошуку оригінальних розв'язань. Таким підходом є графічний метод [1, 4].

Аналізуючи рівняння, які можуть бути розв'язані графічно, можна виділити **три типи:** 1) рівняння типу $f(x) = 0$; 2) рівняння типу $f(x) = g(x)$; 3) завдання на встановлення кількості розв'язків рівняння.

Рівняння типу f(x) = 0. Графічний метод розв'язання рівнянь такого типу зводиться до побудови графіка функції $f(x)$ й візуального визначення точок, у яких він перетинає вісь абсцис [3].

Приклад 1

Розв'язати рівняння: $\dfrac{1}{x-1}+2=0.$

Розв'язання

Побудуємо графік функції $y=\dfrac{1}{x-1}+2$. Це — гіпербола, зміщена на 1 одиницю вправо і на 2 вгору *(рис. 1)*.

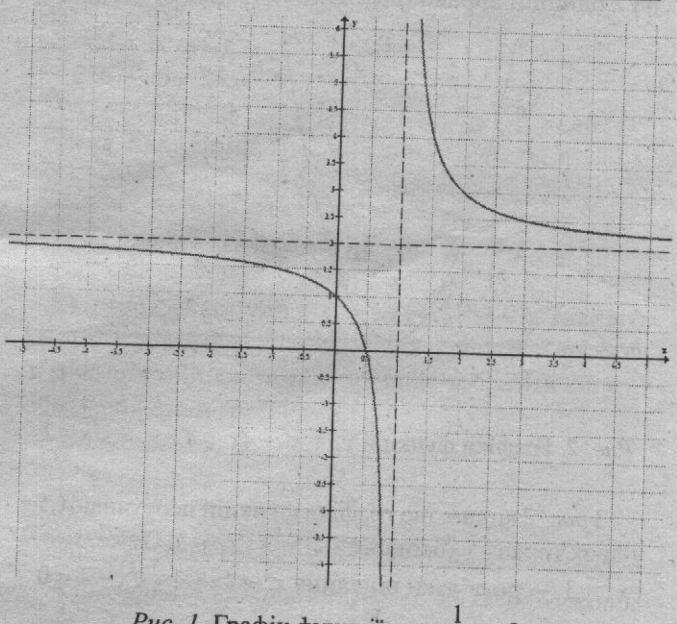

Рис. 1. Графік функції $y=\dfrac{1}{x-1}+2.$

З графіка можемо побачити, що гіпербола перетинає вісь абсцис у точці $x=\dfrac{1}{2}$. Отже, $x=\dfrac{1}{2}$ — це розв'язок рівняння $\dfrac{1}{x-1}+2=0.$

Рівняння типу f(x) = g(x). Іноді побудова графіка функції $f(x) = 0$ складна, але рівняння можна переписати у вигляді $f(x) = g(x)$, де $f(x)$ та $g(x)$ функції, графіки яких є відомими, або легко будуються. Цього можна досягти, якщо попередньо над даним рівнянням виконати деякі перетворення, які приводять до рівняння, еквівалентного початковому: такі перетворення інколи зводяться до перенесення деяких членів рівняння з однієї його частини в другу [4].

Після зазначених дій будуємо графіки функцій $y_1 = f(x)$ і $y_2 = g(x)$. Загальним розв'язком рівняння буде множина абсцис усіх спільних точок побудованих графіків.

Приклад 2

Розв'язати рівняння: $x^2 - 4x + 4 - \sqrt{x-2} = 0$.

Розв'язання

Запишемо рівняння у вигляді: $x^2 - 4x + 4 = \sqrt{x-2}$.

Побудуємо графіки функцій $y_1 = x^2 - 4x + 4$ і $y_2 = \sqrt{x-2}$. Графік функції $y_1 = x^2 - 4x + 4$ — парабола, напрямлена гілками вгору, з вершиною в точці (2; 0). Графік $y_2 = \sqrt{x-2}$ є графіком функції $y = \sqrt{x}$, зміщений на 2 одиниці вправо *(рис. 2)*.

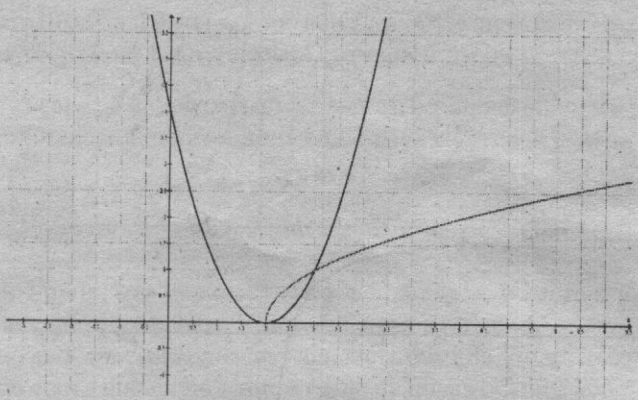

Рис. 2. Графіки функцій $y_1 = x^2 - 4x + 4$ і $y_2 = \sqrt{x-2}$.

З *рис. 2* видно, що графіки функцій перетинаються у двох точках з абсцисами $x_1 = 2$ і $x_1 = 3$. Отже, $x_1 = 2$ і $x_1 = 3$ — розв'язки рівняння $x^2 - 4x + 4 - \sqrt{x-2} = 0$.

Досить актуальним є графічний метод тоді, коли перед учнем стоїть завдання на встановлення кількості розв'язків рівняння. Графічний метод особливо ефективний під час якісного аналізу рівняння, коли потрібно визначити, чи існує корінь взагалі, або потрібно знайти кількість можливих коренів [1].

Приклад 3

Визначити кількість розв'язків рівняння: $5 - 2x = x^2 - \frac{6}{x}$.

Розв'язання

Перенесемо деякі доданки і одержимо рівняння: $\frac{6}{x} = x^2 + 2x - 5$. Графіком функції $y = x^2 + 2x - 5$ є парабола, напрямлена гілками вгору, з вершиною в точці (–1; –6). Графіком функції $y = \frac{6}{x}$ є гіпербола. Вони перетинаються в трьох точках *(рис. 3)*.

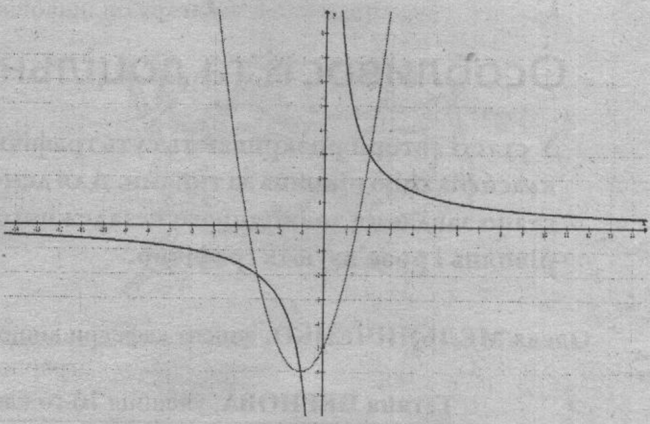

Рис. 3. Графіки функцій $y_1 = \frac{6}{x}$ *і* $y_2 = x^2 + 2x - 5$

Отже, рівняння має три корені: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Рівняння, що розв'язуються графічним методом, трапляються в зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, як у тестовій формі, так і у відкритих завданнях [2]. Розглянемо деякі з них.

Приклад 4

(Завдання в тестовій формі, 2007 р., основна сесія.)

Скільки дійсних коренів має рівняння $x^3 - 4|x| = 0$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	більше трьох

Відповідь. **Г.**

Примітка: побудувати графіки функцій $y = x^3$ та $y = 4|x|$. Графіки матимуть три точки перетину.

Приклад 5

(Завдання в тестовій формі, 2010 р., основна сесія.)

На *рисунку 4* зображено графік функції $f(x)$, яка визначена на відрізку [–4; 6]. Скільки всього коренів має рівняння $f(x) = x$ на цьому відрізку?

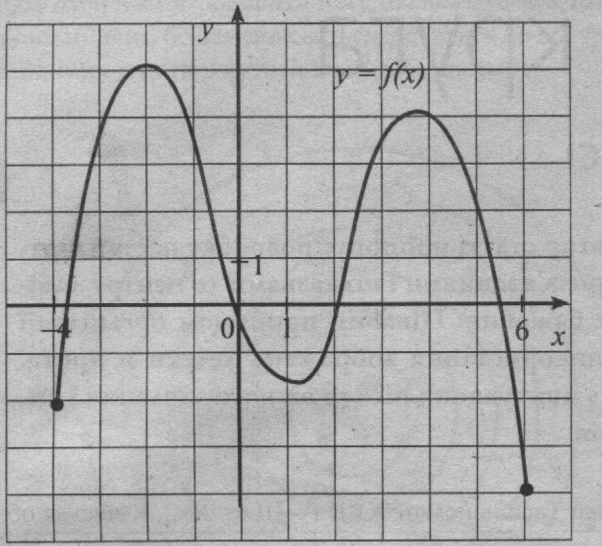

Рис. 4

А	Б	В	Г	Д
Два	три	чотири	жодного	один

Відповідь. **В.**

Порада. Побудуйте в цій самій системі координат графік функції $y = x$.

Приклад 6

(Завдання на встановлення відповідності, 2014 р., основна сесія.)

Установіть відповідність між функцією (1—4) та кількістю спільних точок (А—Д) графіка цієї функції з графіком функції $y = \frac{x}{5}$.

Функція	Кількість спільних точок		1	2	3	4
1 $y = x + 5$	А Жодної	А				
2 $y = 5^x$	Б лише одна	Б				
3 $y = \sqrt{x}$	В лише дві	В				
4 $y = \sin x$	Г лише три	Г				
	Д більше трьох	Д				

Відповідь. 1 — Б, 2 — А, 3 — В, 4 — Г.

Приклад 7

(Завдання у відкритій формі, 2006 р., основна сесія.)

Знайти найменше значення параметра a, за якого система $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ (x-7)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Відповідь. 36.

Приклад 8

(Завдання у відкритій формі, 2007 р., основна сесія.)

Знайдіть найбільше ціле значення параметра a, за якого система рівнянь $\begin{cases} y - x = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ має два розв'язки.

Відповідь. 1.

Приклад 9

(Завдання у відкритій формі, 2008 р., основна сесія.)

Використовуючи графік рівняння $|y| = 1 - |x - 12|$, знайдіть усі значення параметра a, за яких система $\begin{cases} |x-12| + |y| = 1, \\ (x-a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ має єдиний розв'язок. У відповідь запишіть їх суму.

Відповідь. 24.

Приклад 10

(Завдання у відкритій формі, 2009 р., основна сесія.)

Задано функції $f(x) = x^2 + 1$ і $g(x) = 7 - x$. Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій $f(x)$ і $g(x)$. У прямокутній системі координат зобразіть фігуру, обмежену цими графіками.

Відповідь. –3; 2.

Приклад 11

(Завдання у відкритій формі, 2012 р., основна сесія.)

За якого найменшого цілого значення параметра a рівняння $\sqrt{2x+15} \cdot \left(\sqrt{x^2+18x+81} - \sqrt{x^2-10x+25}\right) = a \cdot \sqrt{2x+15}$ має лише два різні корені?

Відповідь. –10.

Використані джерела

1. Гайштут О. Г. Алгебра. Розв'язування задач та вправ. Київ: Магістр, 1997. 255 с.
2. Захарійченко Ю. О., Школьний О. В., Захарійченко Л. І., Школьна О. В. Повний курс математики в тестах. Харків: Ранок, 2012. 496 с.
3. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б. , Якір М. С. Алгебра: підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики. Харків: Гімназія, 2013. 384 с.
4. Назаренко О. М., Назаренко Л. Д. Тисяча і один приклад. Рівності і нерівності: посібник для абітурієнтів. Суми: Слобожанщина, 1994. 272 с.