DOI: 10.32347/2786-7269.2023.6.276-292
УДК 528.482.5
кандидат технічних наук **Гладілін В.М.,**
vgladilin@gmail.com ORCID: 0000-0002-0492-3510,
доктор технічних наук **Мазницький А.С.,**
amaznitskyi@gmail.com ORCID: 0009-0000-3527-2442,
кандидат економічних наук **Сіроштан Т.М.,**
tanya3031@i.ua ORCID: 0000-0001-6791-7081,
Свідерська Т.О., tsv245@gmail.com ORCID: 0000-0001-7623-6958,
кандидат географічних наук **Гамалій І П.,**
gurgev@gmail.com ORCID: 0000-0002-3469-4798,
Білоцерківський національний аграрний університет,
Шудра Н.С., shudranatasha1984@gmail.com ORCID: 0000-0001-5416-7680,
Чуланов П.О., chulanov.po@knuba.edu.ua ORCID: 0000-0002-6735-3770,
Київський національний університет будівництва та архітектури

ПРОБЛЕМА НАДІЙНОСТІ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖ

В наш час теорія надійності широко використовується в будівельному виробництві, а також використовується і в області геодезії. Шляхом абстрагування її положення можна з успіхом перенести і на системи, які, здавалося б, не знаходяться в динамічному стані. Візьмемо, наприклад, пункти полігонометричної (*нівелірної*) *мережі в місті. Здавалося б, що така мережа знаходиться в статичному стані, однак з плином часу вона зазнає змін, тобто вона знаходиться в непомітній динаміці і надійність її поступово знижується.*

Під надійністю в широкому сенсі цього слова розуміють здатність технічного пристрою (системи, мережі) до безперебійної (безвідмовної) роботи упродовж заданого проміжку часу у певних умовах. Такий проміжок часу зазвичай зумовлено часом виконання деякої задачі, яка здійснюється приладом чи системою і є частиною загальної операційної задачі в вирішенні топографо-геодезичних робіт.

В даний час проблема надійності стає однією з вузлових проблем техніки та організації управління. Забезпечення надійної роботи всіх елементів системи – є першорядною важливістю.

Ключові слова: надійність, пункти полігонометричної (*нівелірної*) *мережі, структурні функції, розрахунок кількості пунктів.*

Постановка проблеми. Сучасне тлумачення терміну надійність у геодезії пов’язують з теорією надійності Баарда, за якою надійність визначається як «здатність мережі до самоконтролю від грубих помилок» [1]. Одним з показників надійності є мінімальна величина грубої помилки, яку можна виявити після статистичного аналізу поправок, які одержані після зрівнювання. На цьому шляху виникає багато труднощів [2], більшість яких треба вирішувати, а саме неможливість виділення грубої помилки, кількісну оцінку надійності, методи проектування надійних геодезичних мереж. Незадовільний стан теорії надійності обмежує її практичне застосування, але водночас проблема надійності геодезичної продукції – в сучасному виробництві головна і вона весь час зростає.

Основна частина. В основі теорії надійності [8] лежить уявлення про те що знаходиться ймовірність безвідмовної роботи пристрою, який випадково може вийти з ладу, при цьому ймовірність може визначатись як з урахуванням так і без урахування строку служби (експлуатаційної довго строковості) приладу. Для характеристики експлуатаційної придатності приладу є поняття індикатора несправності або індикатора стана який є випадковою величиною X. Якщо пристрій придатний до експлуатації то $X = 1$, якщо не придатний то $X = 0$, тому ймовірність безвідмовної роботи пристрою є ніщо інше як математичне сподівання випадкової величини X, $P(X = 1)$

Якщо ймовірність справності [6] (придатності пристрою до експлуатації) дорівнює p, а його несправність $q = 1 - p$, то ймовірністю безвідмовної роботи пристрою буде сума додатків:

$$1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p. \qquad (1)$$

Розподіл подовженості строку служби пристрою [5] T описується функцією F. Якщо справність пристрою означає, що він безвідмовно працює з плином часу t і якщо визначена індикаторна функція X, то

$$X(u) = \begin{cases} 0, & u < t \\ 1, & u \geq t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$

функція надійності (ймовірність безвідмовної роботи як функція часу) має вид:

$$\int_0^t 0 \cdot dF(u) + \int_t^\infty 1 \cdot dF(u) = 1 - F(t) \qquad (2)$$

Пристрій може бути елементом системи, взаємо замінний або змінний блок, або й цілою системою.

Надійність системи визначається надійністю її елементів і їх взаємо зв’язаністю і структурою самої системи [17]. Надійність системи може бути підвищеною шляхом резервування елементів, використання запасних елементів, профілактичного ремонту і заміщення елементів до або під час відмови.

Оскільки закони розподілу безвідмовної роботи елементів системи [7] достеменно не відомі то виникає необхідність в оцінці її надійності на основі існуючих статистичних даних.

Структурні властивості систем.

Розглянемо систему із n елементів $c_1, c_2, \ldots, c_n$ які мають індикатори станів $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо елемент } c_i \text{ справний}, \\ 0, & \text{якщо елемент } c_i \text{ несправний} \end{cases}$$

Індикаторна функція φ системи визначається таким чином

$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{якщо система працездатна}, \\ 0, & \text{якщо система не працездатна}. \end{cases}$$

Передбачається, що інформації про систему достатньо щоби визначити її стан через стани усіх елементів які в неї входять, тоді

$$\varphi = \varphi(x), \tag{3}$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор станів системи.

Функція (3) є структурною функцією системи.

Система послідовно з’єднаних елементів $c_1, c_2, \ldots, c_n$ працездатна тільки тоді коли кожний елемент справний, структурна функція (3) тоді має такий вид

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{n} X_i = min(X_1, X_2, \cdots, X_n) \tag{4}$$

Система паралельно з’єднаних елементів працездатна тільки тоді, коли один із паралельних елементів справний, структурна функція (3) має такий вид

$$\varphi(x) = max(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - X_i) \equiv \bigvee_{i=1}^{n} X_i. \tag{5}$$

Система елементів яка з’єднана за схемою (k із n), працездатна тоді коли k із n елементів справні. Таким чином послідовне з’єднання елементів є з’єднанням типу (n із n), а паралельне з’єднання типу (k = 1 із n). Структурна функція (3) з’єднання елементів за схемою (k із n) має вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \text{якщо } \sum_{i=1}^{n} X_i \geq k \\ 0, \text{якщо } \sum_{i=1}^{n} X_i < k, \end{cases} \tag{6}$$

або $\varphi(x) = \vee X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_k} = max(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_k})$ де операція $\vee$, і знаходження максимального значення структурної функції системи виконується за всіма цілими значеннями k які вибрані із n цілих значень елементів.

Наприклад, структурна функція системи елементів з’єднаних за схемою (2 із 3) може мати різні представлення, а саме

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} 1, \text{якщо } X_1 + X_2 + X_3 \geq 2 \\ 0, \text{якщо}, X_1 + X_2 + X_3 < 2 \end{cases},$$

або

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = X_1 \cdot X_2 \vee X_2 \cdot X_3 = 1 - (1 - X_1X_2)(1 - X_1X_3)(1 - X_2X_3) =$$
$$= X_1X_2X_3 + X_1X_2(1 - X_3) + X_1X_3(1 - X_2) + X_2X_3(1 - X_1)$$

Зв'язані системи

Основна теорема декомпозиції. Будь – яка структурна функція порядку n може бути визначена у вигляді

$$\varphi(x) = X_i\varphi(1_i, x) + (1 - X_i\varphi)\varphi(0_i, x) \tag{6}$$

для усіх $i = 1, 2, \cdots, n$ і усіх x, або

$$\varphi(x) = \sum_y \prod_{j=1}^{n} X_j^{Y_j}\left(1 - X_j\right)^{1-Y_j}\varphi(y), \tag{7}$$

де додавання виконується за всіма 2^n векторами y n – порядку. Символи $(1_i, x)$ і $(0_i, x)$ позначають вектор x_i- компонента якого замінена на 1 або 0, тобто $(1_i, x) = (X_1, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ та $(0_i, x) = (X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n)$.

Якщо надійність (працездатність) системи не залежить від справності деякого елементу, то такий елемент є несуттєвим. Якщо система не має несуттєвих елементів і її структурна функція є зростаючою по кожному аргументу, то така система є зв'язаною.

Для структурної функції порядку n зв'язаної системи виконується таке співвідношення

$$\prod_{i=1}^{n} X_i \le \varphi(x) \le \bigvee_{i=1}^{n} X_i \tag{8}$$

сенс цього співвідношення полягає в тому, що зв'язана система, яка складається з n – елементів не менш надійна ніж система послідовно з'єднаних елементів і не більш надійна ніж система паралельно з'єднаних елементів, при цьому $X_i \neq 0$.

Для будь – якої структурної функції зв'язної системи можна записати

$$\begin{gathered}\varphi(x \vee y) \ge \varphi(x) \vee \varphi(y),\\ \varphi(x \cdot y) \le \varphi(x) \cdot \varphi(y),\end{gathered} \tag{9}$$

при цьому

$$\begin{gathered}x \vee y = (X_1 \vee Y_1, \cdots, X_n \vee Y_n),\\ x \cdot y = (X_1Y_1, \cdots X_nY_n).\end{gathered} \tag{10}$$

Вираз (9) вказує на те, що паралельне з'єднання елементів більше ефективніше ніж паралельне з'єднання систем, із виразу (10) витікає, що послідовне з'єднання систем ефективніше послідовного з'єднання елементів.

У полігонометричному ході у відповідності з інструкцією [8] найбільша кількість пунктів для полігонометрії 4-го класу, 1-го і 2-го розряду може бути n=14, найбільша кількість сторін $n + 1 = 15$. Для подальшого функціонування полігонометричного (нівелірного) ходу необхідно щоб було щонайменше два справних пункти від яких є можливість розвити нову мережу, тому структурну

функцію системи з'єднаних елементів знаходимо за схемою (k із n), тобто (2 із 14), така схема буде мати таке представлення:

$$
\begin{aligned}
&\varphi(X_1, X_2, ..., X_{14}) = 1-(1-X_1X_2)\cdot(1-X_1X_3)\cdot(1-X_1X_4)\cdot(1-X_1X_5)\cdot(1-X_1X_6)\cdot\\
&\cdot(1-X_1X_7)\cdot(1-X_1X_8)\cdot(1-X_1X_9)\cdot(1-X_1X_{10})\cdot(1-X_1X_{11})\cdot(1-X_1X_{12})\cdot(1-X_1X_{13})\cdot\\
&\cdot(1-X_1X_{14})\cdot(1-X_2X_3)\cdot(1-X_2X_4)\cdot(1-X_2X_5)\cdot(1-X_2X_6)\cdot(1-X_2X_7)\cdot(1-X_2X_8)\cdot\\
&\cdot(1-X_2X_9)\cdot(1-X_2X_{10})\cdot(1-X_2X_{11})\cdot(1-X_2X_{12})\cdot(1-X_2X_{13})\cdot(1-X_2X_{14})\cdot(1-X_3X_4)\cdot\\
&\cdot(1-X_3X_5)\cdot(1-X_3X_6)\cdot(1-X_3X_7)\cdot(1-X_3X_8)\cdot(1-X_3X_9)\cdot(1-X_3X_{10})\cdot(1-X_3X_{11})\cdot\\
&\cdot(1-X_3X_{12})\cdot(1-X_3X_{13})\cdot(1-X_3X_{14})\cdot(1-X_4X_5)\cdot(1-X_4X_6)\cdot(1-X_4X_7)\cdot(1-X_4X_8)\cdot\\
&\cdot(1-X_4X_9)\cdot(1-X_4X_{10})\cdot(1-X_4X_{11})\cdot(1-X_4X_{12})\cdot(1-X_4X_{13})\cdot(1-X_4X_{14})\cdot(1-X_5X_6)\cdot\\
&\cdot(1-X_5X_7)\cdot(1-X_5X_8)\cdot(1-X_5X_9)\cdot(1-X_5X_{10})\cdot(1-X_5X_{11})\cdot(1-X_5X_{12})\cdot(1-X_5X_{13})\cdot\\
&\cdot(1-X_5X_{14})\cdot(1-X_6X_7)\cdot(1-X_6X_8)\cdot(1-X_6X_9)\cdot(1-X_6X_{10})\cdot(1-X_6X_{11})\cdot(1-X_6X_{12})\cdot\\
&\cdot(1-X_6X_{13})\cdot(1-X_6X_{14})\cdot(1-X_7X_8)\cdot(1-X_7X_9)\cdot(1-X_7X_{10})\cdot(1-X_7X_{11})\cdot(1-X_7X_{12})\cdot\\
&\cdot(1-X_7X_{13})\cdot(1-X_7X_{14})\cdot(1-X_8X_9)\cdot(1-X_8X_{10})\cdot(1-X_8X_{11})\cdot(1-X_8X_{12})\cdot\cdot(1-X_8X_{13})\cdot\\
&\cdot(1-X_8X_{14})\cdot(1-X_9X_{10})\cdot(1-X_9X_{11})\cdot(1-X_9X_{12})\cdot\cdot(1-X_9X_{13})\cdot(1-X_9X_{14})\cdot(1-X_{10}X_{11})\cdot\\
&\cdot(1-X_{10}X_{12})\cdot(1-X_{10}X_{13})\cdot(1-X_{10}X_{14})\cdot(1-X_{11}X_{12})\cdot\cdot(1-X_{11}X_{13})\cdot(1-X_{11}X_{14})\cdot\\
&\cdot(1-X_{12}X_{13})\cdot(1-X_{12}X_{14})\cdot(1-X_{13}X_{14})\cdot
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Загальна кількість поєднань 2-х елементів із 14 буде визначена за формулою кількості комбінацій (*k* із *n*) [16]:

$$N = C_n^k = \frac{n(n-1)}{k} = C_{14}^2 = \frac{14(14-1)}{2} = 91 \tag{12}$$

У зв'язку з цим є гостра необхідність у висвітлені нових поглядів на рішення цієї проблеми в галузі проектування і створення геодезичних мереж.

Пропонується така схема побудови основ теорії надійності геодезичних мереж послідовним аналізом [3]:

1.Визначення надійності та її якісних і кількісних показників.

2.Формування системи допусків для мереж із заданими показниками надійності.

3.Класифікація геодезичних мереж за надійністю.

4.Методи локалізації грубих помилок. Проектування додаткових вимірювань для однозначного виділення грубих і систематичних помилок.

5.Визначення систематичних помилок за методом Аббе.

Дамо визначення надійності геодезичних вимірювань. Надійністю є кількісна величина, яка характеризує однорідність сукупних вимірювань, під кількісною оцінкою надійності розуміється ймовірність виявлення результатів з викидами при використанні допуску Δ. Граничним випадком є повністю надійні вимірювання в яких є тільки випадкові помилки, які підкоряються нормальному закону розподілу помилок. Це впливає на те, що в цьому випадку результати з викидами буде виявлено з ймовірністю близькою до одиниці при витримані умови, що викиди за абсолютною величиною $|x| \geq \Delta$.

Нехай величина допуску буде як зазначено Δ, тоді надійність вимірювань які вийшли безконтрольними, знаходять згідно з [14] за формулою

$$\gamma = 1 - Q_2(\Delta), \tag{13}$$

де: $Q_2(\Delta) = \int f_2\,(x)\,dx,$ **при** $|x| < \Delta$ - ймовірність помилки другого роду; $f_2(x)$ – щільність розподілу ймовірностей з врахуванням впливу випадкових і грубих помилок.

Як показано в роботі [15], вигляд функції $f_2(x)$ залежить від прийнятої ймовірнісної моделі грубої помилки. Для дискретної моделі, коли груба помилка має величину $k\sigma_{x_i}$, то

$$f_2(x) = \left(\sigma_x\sqrt{2\pi}\right)^{-1} e^{-\frac{\left(x - k\sigma_{x_i}\right)^2}{2\sigma_x^2}}, \tag{14}$$

де σ_x – середнє квадратичне відхилення функції, яка контролюється; σ_{x_i} – середнє квадратичне відхилення для окремого вимірювання.

Для рівномірної моделі розподілу, коли груба помилка знаходиться в інтервалі [*a*, *b*],

$$f_2(x) = \frac{1}{b-a}\left[\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma_x}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-b}{\sigma_x}\right)\right], \tag{15}$$

де Φ_0 – функція Лапласа, позначення якої $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}$ прийняте в теорії ймовірностей.

Якісно надійність можна оцінювати за такими критеріями:

1. диференційний критерій надійності;
2. інтегральний критерій надійності;
3. критерій міні-максимуму грубої помилки;
4. критерій систематичної помилки.

Диференційний критерій дозволяє знайти точкову оцінку надійності γ_T, якщо у формулі (13) використати дискретну модель грубої помилки (14):

$$\gamma_{T_i} = 0.5 - \Phi_0\left(\frac{\Delta - k\sigma_{x_i}}{\sigma_x}\right). \tag{16}$$

Інтегральний критерій оцінки дає інтервальну оцінку надійності, яку одержимо після підстановки у формулу (13) функції (15):

$$\gamma_i = 1 - \int_\Delta^\infty \frac{1}{b-a}\left[\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma_x}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-b}{\sigma_x}\right)\right]dx. \tag{17}$$

Критерій мінімуму грубої помилки витікає з диференційного критерію. Він дає змогу отримати оцінку величини грубої помилки, яка визначається із заданою надійністю γ_T при використанні для контролю допуску Δ:

$$k\sigma_{x_i} = \Delta + \sigma_x\Phi_0^{-1}(\gamma - 0.5). \tag{18}$$

Другою важливою проблемою теорії надійності є визначення допусків, вони розраховуються за критеріями Шовене, Шарльє [18], Поупа інших авторів. Головним недоліком цих критеріїв є те, що вони засновані на нормальному законі розподілу і тому не дозволяють оцінити їх ефективність у виявленні грубих та систематичних помилок. Це можна виправити, якщо для визначення допусків використовувати статистичні методи перевірки гіпотез. Відповідно до критерію Неймана-Пірсона значення допуску є розв'язком рівняння

$$\int f_1(x)\,dx = \frac{Q_1}{2} \quad \textbf{при}\ |x| \geq \Delta\,. \tag{19}$$

Розв'язок цього рівняння є:

$$\Delta = \sigma_x \Phi_0^{-1}\left(0.5 - \frac{Q_1}{2}\right), \tag{20}$$

де Q_1 – ймовірність помилки першого роду.

Наведемо приклад визначення допуску і надійності вимірювань, які пройшли контроль, у трикутнику тріангуляції. Приймемо точність вимірювання кута $\sigma_{x_i} = 1''$; точність вимірювання суми трьох кутів $\sigma_x = \sqrt{3}''$; Q_1=0.05 – помилка першого роду. Допустиме значення нев'язкі трикутника знайдемо за формулою (20):

$$\Delta = \sqrt{3}''\Phi_0^{-1}\left(0.5 - \frac{0.05}{2}\right) = 3.4''.$$

Для визначення надійності вимірювань, які пройшли контроль цим допуском, скористаємось диференційним критерієм (табл. 1).

Таблиця 1

Диференційний контроль допуску

Q_1	Δ	Точкова оцінка надійності γ_T						
		$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
0,05	3,40			0,41	0,64	0,82	0,93	0,98

Інтегральний критерій дає таку інтервальну оцінку надійності [*a*, *b*]:

$$\gamma_i = 0.72,\ a = 3'',\ b = 7''.$$

Якщо прийняти $\gamma_T = 0.95,$ то за критерієм мінімуму грубої помилки знайдемо: $k\sigma_{x_i} = 5.7''$, отже можна зробити висновок, що користуючись допуском $\Delta = 3{,}4''$ з ймовірністю 0,95 будуть відбраковані грубі помилки величиною більше ніж $5{,}7''$.

Розрахунок середньої кількості станів пунктів міської полігонометрії (нівелювання) методом динаміки середніх посередництвом марковських випадкових процесів

Міська полігонометрична і нівелірна мережа с плином часу має значні зміни, це викликано тим, що вулиці міст, підземні мережі, наземні лінії електропередачі, освітлення, які підвержені реконструкції, а також будівництво нових промислових споруд, житлових будівель, все це впливає на існуючу мережу пунктів полігонометрії і нівелювання, як зазначено у роботі [12]. Природньо, що значна кількість пунктів полігонометрії і нівелювання у процесі ведення будівельних робіт або ремонту підземних комунікацій пошкоджується і в подальшому не придатна для застосування.

Через визначені строки, наприклад через 10 років, виконується інвентаризація пунктів полігонометрії (нівелювання), тобто підраховується кількість пунктів в непорушеному стані і кількість знищених або пошкоджених пунктів. За проміжок часу між інвентаризаціями мережа поповнюється якоюсь кількістю нових пунктів.

Для опису цього процесу застосуємо математичне моделювання [13] в такій послідовності: пункти міської мережі полігонометрії (нівелювання) будуть виходити з ладу під дією інтенсивності знищення (порушення) λ і відновлюватися під дією інтенсивності μ. Такі інтенсивності можливо одержати з матеріалів інвентаризації мережі, тобто кількість знищених і кількість закладених (нових) пунктів за визначений проміжок часу t.

Підрахуємо в якому стані буде знаходитися мережа полігонометрії (нівелювання) в майбутньому між інвентаризаціями у визначений моменту часу t, це можливо зробити, якщо використати теорію методу динаміки середніх [4]. Таке прогнозування стану мережі полігонометрії (нівелювання) є важливим для подальшої достовірної експлуатації пунктів, знаючи яка кількість пунктів буде в справному стані можна зробити висновок про те, чи може така кількість пунктів забезпечити своєчасне виконання топографо-геодезичних та розмічувальних робіт в місті. Якщо кількість непорушених пунктів виявиться недостатньою, тоді в майбутньому періоді між інвентаризаціями необхідно збільшити інтенсивність відновлення мережі полігонометрії (нівелювання) μ.

В методі динаміки середніх [4] знаходять математичне очікування $m_i(t)$ кількості пунктів, які знаходяться на момент t в стані S_i, із стандартом $\sigma_i(t)$. Таке математичне сподівання є середньою кількістю стану S_i на момент часу t. Якщо елемент (пункт мережі) може знаходитись в декількох станах, тоді для кожного моменту часу t визначаються середні кількості цих станів і розкидання фактичних чисельностей від середніх.

Нехай, міська мережа полігонометрії (нівелювання) на якийсь початковий момент часу $t = 0$ складається з N пунктів. Кожний пункт може знаходитись в одному із станів:

S_1 – не порушений, його значення координат і висот достовірні;

S_2 – знищений (порушений) не придатний для застосування.

Тоді для початкового моменту часу $t = 0$ середня чисельність першого стану S_1 буде $m_1 = N$ пунктів, а середня чисельність другого стану S_2 буде $m_2 = 0$ пунктів.

Для знаходження середніх чисельностей станів пунктів полігонометрії (нівелювання), які відповідають будь – якому моменту часу t, побудуємо граф станів пунктів, який наведений на рис. 1.

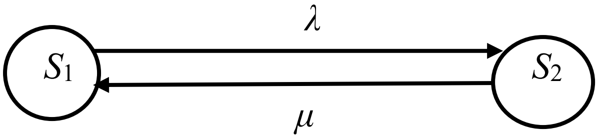

Рис. 1. Граф станів пунктів полігонометрії

На графі станів вказано, що будь-який із пунктів мережі може переходити із стану S_1 в стан S_2 під дією потоку знищення з інтенсивністю λ, і навпаки під дією потоку відновлення з інтенсивністю μ будуть переходити із стану S_2 в стан S_1.

Користуючись графом станів, складемо диференційні рівняння динаміки середніх за мнемонічним правилом. Похідна середньої чисельності стану дорівнює сумі стількох членів, скільки стрілок пов’язано з цим станом, якщо стрілка виходить із стану, то він буде від’ємним, а якщо входить в стан то додатнім. Кожен член дорівнює добутку середньої чисельності того стану, із якого входить або виходить стрілка, на відповідну інтенсивність.

Тоді диференційні рівняння Колмогорова-Чепмена [11] динаміки середніх чисельностей станів набудуть вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dm_1}{dt} = -\lambda \cdot m_1 + \mu \cdot m_2, \\ \frac{dm_2}{dt} = -\mu \cdot m_2 + \lambda \cdot m_1. \end{cases} \tag{21}$$

В рівняннях (21) невідомими функціями є безпосередньо середні чисельності станів $m_i(t)$, які є рішенням некоректної задачі [10].

Досить важливим є та обставина, що для будь-якого моменту часу сума середніх чисельностей станів є величиною постійною, тобто

$$m_1 + m_2 = N \tag{22}$$

Враховуючи цю умову обмежимося рішенням одного диференційного рівняння, підставивши $m_2 = N - m_1$ в перше рівняння системи (21), одержимо

$$\frac{dm_1}{dt} = -(\lambda + \mu) \cdot m_1 + \mu \cdot N, \tag{23}$$

яке представимо у вигляді

$$\frac{dm_1}{\mu \cdot N - (\lambda + \mu) \cdot m_1} = dt \tag{24}$$

про інтегруємо рівняння (24), тобто

$$-\frac{1}{\lambda+\mu}\int \frac{d[\mu \cdot N - (\lambda+\mu)]m_1}{\mu \cdot N - (\lambda+\mu) \cdot m_1} = \int dt. \tag{25}$$

Тоді

$$-\frac{1}{\lambda+\mu}\ln[\mu \cdot N - (\lambda+\mu) \cdot m_1] = t \ln e + \ln C, \tag{26}$$

де C – деяка постійна величина.

Рівняння (26) представимо у вигляді

$$\ln[\mu \cdot N - (\lambda+\mu) \cdot m_1]^{-\frac{1}{\lambda+\mu}} = \ln Ce^t, \tag{27}$$

або

$$[\mu \cdot N - (\lambda+\mu) \cdot m_1]^{-\frac{1}{\lambda+\mu}} = Ce^t. \tag{28}$$

Возведемо обидві частини рівняння (28) в степінь – $(\lambda + \mu)$, одержимо

$$\mu \cdot N - (\lambda+\mu) \cdot m_1 = C^{-(\lambda+\mu)} e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{29}$$

Позначимо

$$C^{-(\lambda+\mu)} = C_1, \tag{30}$$

тоді середня чисельність першого стану виразиться рівнянням

$$m_1 = \frac{\mu \cdot N}{\lambda+\mu} - \frac{C_1}{e^{-(\lambda+\mu)t}(\lambda+\mu)}. \tag{31}$$

Враховуючи, що при $t = 0$ чисельність першого стану $m_1 = N$, тоді рівняння (31) набуде вигляду:

$$N = \frac{\mu \cdot N}{\lambda + \mu} - \frac{C_1}{e^{-(\lambda+\mu)t}(\lambda+\mu)}. \quad (32)$$

Із рівняння (32) знайдемо, що постійна величина

$$C_1 = -\lambda N. \quad (33)$$

Підставивши (33) в рівняння (31), одержимо остаточний вираз для визначення середньої чисельності першого стану, тобто скільки буде справних пунктів

$$m_1 = \frac{N}{\lambda+\mu}\left[\mu + \frac{\lambda}{e^{(\lambda+\mu)t}}\right]. \quad (34)$$

Підставимо вираз (34) у друге рівняння системи (21) остаточно одержимо вираз для середньої чисельності другого стану, тобто скільки буде порушених пунктів

$$m_2 = \frac{\lambda \cdot N}{\lambda+\mu}\left[1 - \frac{1}{e^{(\lambda+\mu)t}}\right]. \quad (35)$$

Стандарти або середні квадратичні відхилення середніх чисельностей першого і другого станів визначаються за формулами:

$$\begin{cases} \sigma_1(t) = \sqrt{m_1\left(1 - \frac{m_1}{N}\right)}, \\ \sigma_2(t) = \sqrt{m_2\left(1 - \frac{m_2}{N}\right)}. \end{cases} \quad (36)$$

Підставимо значення середніх чисельностей станів m_1 і m_2 із рівнянь (34) і (35) у формули (36), одержимо

$$\sigma_1(t) = \sigma_2(t) = \sqrt{\frac{\lambda N}{(\lambda+\mu)^2}\left[\mu + \lambda \cdot e^{-(\lambda+\mu)\cdot t}\right] \cdot \left[1 - e^{-(\lambda+\mu)\cdot t}\right]}. \quad (37)$$

Припустимо, що на будь-який початковий момент часу $t = 0$ кількість пунктів полігонометрії в місті складає $N = 2500$, за даними інвентаризації виявлено, що пункти полігонометрії знищуються з інтенсивністю $\lambda = 1$ пункт за рік, відновлюються з інтенсивністю $\mu = 1$ пункт за рік. Необхідно визначити кількість справних (непорушених) пунктів і кількість знищених пунктів у перспективі на 10 років.

Підставивши приведені значення у формули (34), (35), (36) і (37) визначимо значення середніх чисельностей пунктів в кожному стані, і їх стандарти в залежності від часу експлуатації, ці значення наведені у табл. 2.

Таблиця 2

Значення середніх кількостей пунктів мережі
від часу експлуатації та їх стандартів

t, роки	$m_1(t)$, справні пункти	$m_2(t)$, порушені пункти	$\sigma_1(t) = \sigma_2(t)$, стандарти
0	2500	0	0
0,05	2381,0	119,0	10,6
0,1	2273,4	226,6	14,4
0,2	2087,9	412,1	18,6
0,3	1936,0	564,0	20,9
0,4	1811,7	688,3	22,3
0,5	1709,8	790,2	23,2
1,0	1419,2	1080,8	24,8
1,5	1312,2	1187,8	25,0
2,0	1272,9	1227,1	25,0
3,0	1253,1	1246,9	25,0
3,5	1251,1	1248,9	25,0
4,0	1250,4	1249,6	25,0
5,0	1250,1	1249,9	25,0

За значеннями середніх чисельностей станів та їх стандартів, які наведені у табл. 2 побудовані графіки, які вказані на рис. 2 і рис. 3.

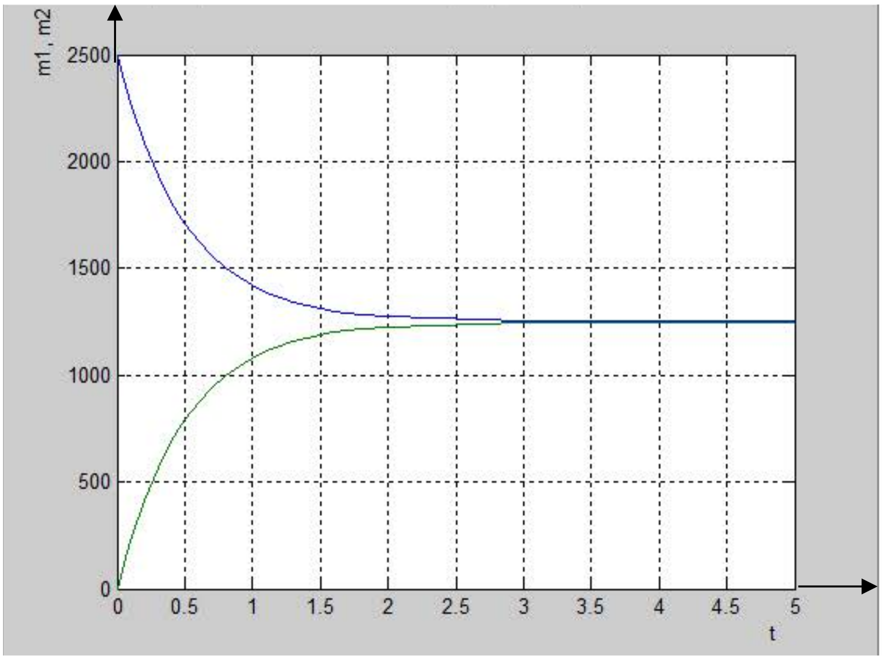

Рис. 2. Середня чисельність непошкоджених m_1 і пошкоджених m_2 пунктів полігонометрії (нівелювання)

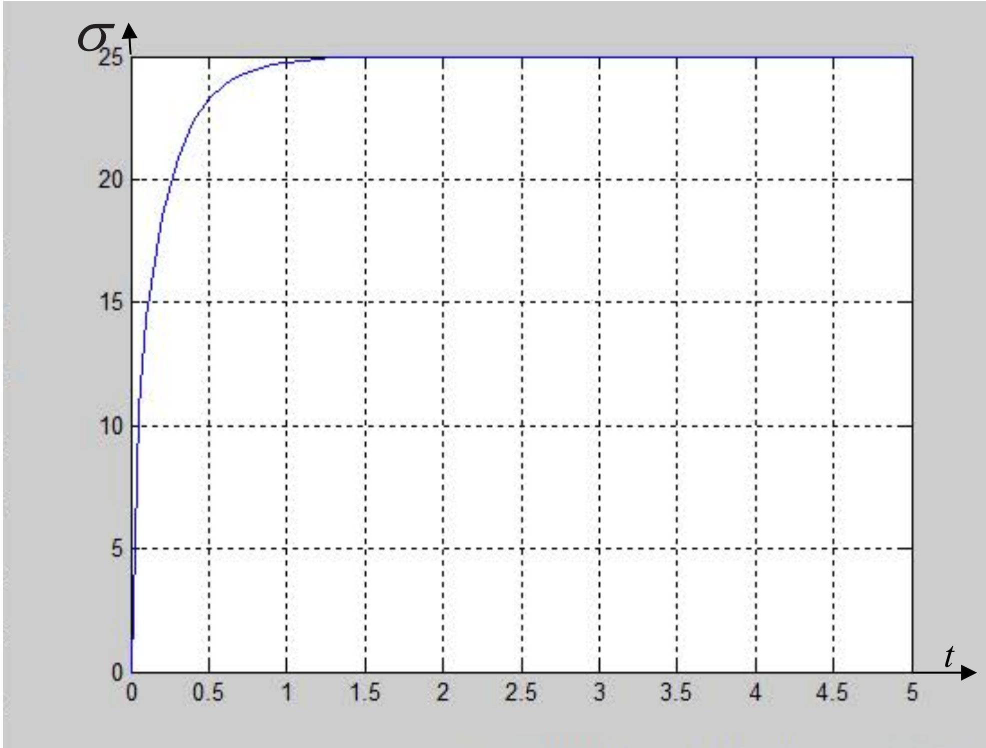

Рис. 3. Стандарти (середні квадратичні помилки) визначення кількості непошкоджених і знищених пунктів полігонометрії (нівелювання)

Як видно з рис. 2, (табл. 2), починаючи з моменту часу t = 4,0 роки і надалі середня кількість справних (не пошкоджених) пунктів складає 1250, а знищених 1250 (табл. 2) з середньо квадратичними відхиленнями $\sigma(t) = \pm 25{,}0$. Природньо, що така кількість справних пунктів в перспективі на 10 років не буде задовольняти топографо-геодезичному виробництву, тому що збережеться тільки 50% загальної кількості пунктів. В такому випадку необхідно іти шляхом збільшення інтенсивності відновлення кількості пунктів μ полігонметрії в місті.

Висновки. 1.Запропонована нова схема побудови теорії надійності геодезичних вимірювань. Її основою є ймовірнісне визначення надійності, системи допусків та методи виявлення грубих помилок. Надійність визначено як імовірнісний захід однорідності вимірів, які не пройшли контроль. Кількісно надійність оцінюється чотирма показниками: диференціальним, інтегральним, міні-максимумом грубої помилки та виявленням систематичних помилок за критерієм Аббе. Для встановлення допуску рекомендується критерій Неймана - Пірсона. Ця теорія дозволяє проектувати геодезичні мережі із заданою надійністю.

2.Розраховано середню кількість непошкоджених і знищених пунктів міської полігонометріїї в перспективі на майбутнє. Одержані рівняння для визначення середньої чисельності станів пунктів полігонометрії та їх стандартів.

Знаючи, яка кількість пунктів буде в непошкодженому стані, можливо зробити висновок про те, чи буде така кількість задовольняти своєчасному виконанню топографо-геодезичних і розмічувальних робіт в місті.

Список літератури

1. Baarda W.A testing procedure for use in geodetic networcs. Netherlands Geodetic Commission. – 1968. –V.2, №5. – P. 28-35.

2. Гладилин В.Н. Точность геодезических измерений при выверке промышленного оборудования. /Гладилин В.Н./К.: Техніка, 1996. – 224 с.

3. Вальд А. Последовательный анализ. – М. Физматгиз, 1960. – 328 с.

4. Вентцель Е. С.Исследование операций. М.: Советское радио, 1972

5. Гладілін В. М., Гончаренко О.С., Шудра Н.С. Моделювання імовірності розподілу кутових нев’язок в мережі тріангуляції. //Вісник астрономічної школи. - 2014. – Т. 10, № 1. – С. 79 – 84.

6. Гладілін В.М., Шудра Н.С., Дубкова А.О. Ймовірнісно-статистичний послідовний аналіз результатів геодезичних вимірів.//Вісник астрономічної школи. - 2017. – Т. 13, № 2. – С. 116 – 122.

7. Гладілін В.М. Моделі визначення деформацій/ В.М. Гладілін //Вісник астрономічної школи. – 2016 – Т 12 № 2 – С. 185-189

8. Надійність техніки. Терміни та визначення: ДСТУ 2860-94. К.: Держстандарт України, 1994. – 36 с.

9. Інструкція з топографічного знімання у масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 та 1:500. ГКНТА-2.04-02-98. – К.: Укргеодезкартографія, 1999. – 156 с.

10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некоректных задач. – М.: Наука, 1974. – 254 с.

11. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.

12. Успенский М.С. Условия устойчивости геодезических центров и реперов. М.: Геодезиздат, 1955. – 94 с.

13. Математическое моделирование. /В.И. Скурихин, В.Б. Шифрин, В.В. Дубровский. – К.: Техніка, 1983. – 270 с.

14. Ткаченко Ю.Ф. Критерии обнаружения аномальных результатов в геодезических данных (минимаксный и Неймана-Пирсона) Ив.-Франков. Ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1993. – 7 с. – Деп. В УкрИНТЭИ.

15. Ткаченко Ю.Ф. Вероятнострые модели функций геодезических измерений. Ив.-Франков. Ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1993. – 6 с. – Деп. В УкрИНТЭИ.

16. Korn Granino A., Korn T.M. Handbook of mathematics for scientific workers and engineers. – McGraw-HillBook Company Inc New York, Toronto, London, 1961. –720 p.

17. Broun P., Maison P., Flamgolc E. Handbook of Operations Research. Models and Applications 2. Van Nostrend Reinhold company N. York, Cincinnati, Atlanta, Dallas, San Francisko, London, Toronto, Melbourn, 1978. – 677 p.

18. Viduev N.G., Kondra G.S. Probabilistic - statistical analysis of measurement errors. - M.: Недра, 1969. - 320 с.

Ph. D., associate professor **Gladilin Valeriy,**
Dr. Tech. Sciences, professor **Anatolij Maznitskij,**
Ph. D., associate professor **Tatiana Siroshtan,**
Senior Lecturer **Tetyana Sviderska,**
Ph. D., associate professor **Gamalij Irina,**
Department of Geodetsy and Land Management
Bilotserkov National Agrarian University
Senior Lecturer **Natalia Shudra,**
Senior Lecturer **Chulanov Petro,**
Department of Engineering Geodesy
Kyiv National University of Construction and Architecture

THE PROBLEM OF RELIABILITY OF GEODESIC NETWORKS

Nowadays, the theory of reliability is widely used in the construction industry, and it is also used in the field of geodesy. By abstracting its position, it can be successfully transferred to systems that, it would seem, are not in a dynamic state. Let's take, for example, the points of the polygonal (leveling) network in the city. It would seem that such a network is in a static state, but over time it undergoes changes, that is, it is in imperceptible dynamics and its reliability gradually decreases.

Reliability in the broadest sense of the word means the ability of a technical device (system, network) to operate without interruption (failure) for a given period of time under certain conditions. Such a period of time is usually determined by the time of execution of some task, which is carried out by the device or system and is part of the general operational task.

Currently, the problem of reliability is becoming one of the central problems of engineering and management organization. Ensuring the reliable operation of all system elements is of primary importance.

The modern interpretation of the term "reliability" in geodesy is associated with Baard's reliability theory, according to which reliability is defined as "the ability of the network to self-monitor against gross errors [1]. One of the indicators of reliability is the minimum amount of gross error that can be detected after statistical analysis of the corrections obtained after equalization. On this path, many difficulties arise, most of which remain unsolved, namely the impossibility of localizing a gross error, quantitative assessment of reliability, methods of designing reliable geodetic networks. The unsatisfactory state of reliability theory limits its practical application, but at the same time, the problem of product reliability is the main one in modern production and its importance is growing all the time. In this regard, there is an acute problem in highlighting new views on solutions to this problem in the field of designing and creating geodetic networks.

A new scheme for constructing the theory of reliability of geodetic measurements is proposed. Its basis is a probabilistic determination of reliability, a system of tolerances, and methods of localizing gross errors. Reliability is defined as a probabilistic measure of the homogeneity of measurements that have passed control. Quantitative reliability is estimated by three indicators: differential, integral and the minimum gross error. The Neumann-Pearson criterion is recommended for establishing tolerance. This theory makes it possible to design geodetic networks with a given reliability.

Keywords: reliability; points of a polygonal (leveling) network, Structural functions, calculation of the number of points

REFERENCES

1. Baarda W.A testing procedure for use in geodetic networcs. Netherlands Geodetic Commission. – 1968. –V.2, №5. – P. 28-35. {in English}

2. Gladylyn V.N. Tochnost heodezycheskykh yzmerenyi pry vыverke promыshlennoho oborudovanyia. /Gladylyn V.N./ K.: Tekhnika, 1996. – 224 s. {in Russian}

3. Vald A. Posledovatelnыi analyz. – M. Fyzmathyz, 1960. – 328 s. {in Russian}

4. Venttsel E.S. Yssledovanye operatsyi. M.: Sovetskoe radyo, 1972. {in Russian}

5. Gladilin V.M., Goncharenko O.S., Shudra N.S. Modeliuvannia imovirnosti rozpodilu kutovykh neviazok v merezhi trianhuliatsii. //Visnyk astronomichnoi shkoly. - 2014. – T. 10, № 1. – S. 79 – 84.{in Ukrainian}

6. Gladilin V.M., Shudra N.S., Dubkova A.O. Ymovirnisno-statystychnyi poslidovnyi analiz rezultativ heodezychnykh vymiriv.//Visnyk astronomichnoi shkoly. - 2017. – T. 13, № 2. – S. 116 – 122. {in Ukrainian}

7. Gladilin V.M. Modeli vyznachennia deformatsii/ V.M. Hladilin //Visnyk astronomichnoi shkoly. – 2016 – T 12 № 2 – S. 185-189. {in Ukrainian}

8. Nadiinist tekhniky. Terminy ta vyznachennia: DSTU 2860-94. K.: Derzhstandart Ukrainy, 1994. – 36 s. {in Ukrainian}

9. Instruktsiia z topohrafichnoho znimannia u masshtabakh 1:5000, 1:2000, 1:1000 ta 1:500. HKNTA-2.04-02-98. – K.: Ukrheodezkartohrafiia, 1999. – 156 s. {in Ukrainian}

10. Tykhonov A. N., Arsenyn V.Ya. Metodы reshenyia nekorektnыkh zadach. – M.: Nauka, 1974. – 254 s. {in Russian}

11. Tykhonov V.Y., Myronov M.A. Markovskye protsessы. – M.: Sovetskoe radyo, 1977. – 488 s. {in Russian}

12. Uspenskyi M.S. Uslovyia ustoichyvosty heodezycheskykh tsentrov y reperov. M.: Heodezyzdat, 1955. – 94 s. {in Russian}

13. Matematycheskoe modelyrovanye. /V. Y. Skurykhyn, V. B. Shyfryn, V. V. Dubrovskyi. – K.: Tekhnika, 1983. – 270 s. {in Russian}

14. Tkachenko Yu.F. Kryteryy obnaruzhenyia anomalnыkh rezultatov v heodezycheskykh dannыkh (mynymaksnыi y Neimana-Pyrsona) Yv.-Frankov. Yn-t nefty y haza. – Yvano-Frankovsk, 1993. – 7 s. – Dep. V UkrINTEY. {in Russian}

15. Tkachenko Yu.F. Veroiatnostrыe modely funktsyi heodezycheskykh yzmerenyi. Yv.-Frankov. Yn-t nefty y haza. – Yvano-Frankovsk, 1993. – 6 s. – Dep. V UkrINTEY. {in Russian}

16. Korn Granino A., Korn T.M. Handbook of mathematics for scientific workers and engineers.–McGraw-HillBook Company Inc New York, Toronto, London, 1961.–720 p. {in English}

17. Broun P., Maison P., Flamgolc E. Handbook of Operations Research. Models and Applications 2. Van Nostrend Reinhold company N. York, Cincinnati, Atlanta, Dallas, San Francisko, London, Toronto, Melbourn, 1978. – 677 p. {in English}

18. Viduev N.G., Kondra G.S. Probabilistic - statistical analysis of measurement errors. - M.: Nedra, 1969. - 320 p.{in English}