ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.24:62-50

Працьовитий Микола Вікторович
доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу фрактального аналізу, Інститут математики НАН України
Дрозденко Віталій Олександрович
кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри інформаційних систем і технологій, Білоцерківський національний аграрний університет
Працевитый Николай Викторович
доктор физико-математических наук ,профессор, заведующий отделом фрактального анализа, Институт математики НАН Украины
Дрозденко Виталий Александрович
кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры информ. систем и технологий, Белоцерковский национальный аграрный университет
Pratsiovytyi M.V.
doctor of mathematics, professor,
Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Ukraine
Drozdenko V.O.
assistant of the department of information systems and technologies
Bila Tserkva National Agrarian University

ХАРАКТЕРИЗАЦІЙНА ТЕОРЕМА ДЛЯ ВЛАСТИВОСТІ КОНЗИСТЕНТНОСТІ ШВЕЙЦАРСЬКОГО ПРИНЦИПУ ПІДРАХУНКУ ВАРТОСТІ СТРАХОВИХ КОНТРАКТІВ

ХАРАКТЕРИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СВОЙСТВА КОНСИСТЕНТНОСТИ ШВЕЙЦАРСКОГО ПРИНЦИПА ПОДСЧЁТА СТОИМОСТИ СТРАХОВЫХ КОНТРАКТОВ

CHARACTERIZATION THEOREM FOR THE CONSISTENCY PROPERTY OF THE SWISS INSURANCE PREMIUM CALCULATION PRINCIPLE

Анотація: В роботі представлено та доведено характеризаційну теорему для виконання властивості конзистентності швейцарським принципом підрахунку вартості страхових контрактів. Теорема сформульована у вигляді необхідних та достатніх умов (залежних від параметра збалансованості між принципом середнього значення та принципом нульової корисності страховика) володіння властивістю конзистентності накладених на гладкі допоміжні функції, які, при заданому значенні параметра збалансованості, повністю задають швейцарський принцип страхового оцінювання.

Ключові слова: страхове оцінювання, швейцарський принцип, властивість конзистентності, характеризація, необхідні та достатні умови.

Аннотация: В работе сформулировано и доказано характеризационную теорему для выполнения свойства консистентности швейцарским принципом подсчёта стоимости страховых контрактов. Теорема сформулирована в виде необходимых и достаточных условий (зависимых от параметра сбалансированности между принципом среднего значения и принципом нулевой полезности страховика) владения свойством консистентности наложенных на гладкие вспомогательные функции, которые, при заданном значении параметра сбалансированности, полностью задают швейцарский принцип страхового оценивания.

Ключевые слова: страховое оценивание, швейцарский принцип, свойство консистентности, характеризация, необходимые и достаточные условия.

Summary: In the article we formulate and prove characterization theorem for holding of the consistency property which can be possessed or not possessed by the Swiss insurance premium calculation principle. The theorem is formulated in a form of necessary and sufficient conditions (depending on the balancing parameter between the mean value premium principle and the insurer zero utility premium principle) of holding of the consistency property imposed on the smooth auxiliary functions which, under fixed value of the balancing parameter, entirely define the Swiss insurance premium calculation principle.

Key words: insurance pricing, Swiss premium principle, consistency property, characterization, necessary and sufficient conditions.

1. Вступ

Нехай випадкова величина X, з функцією розподілу $F_X(x)$, відображає розмір страхової компенсації, пов'язаної з певною страховою угодою. Премію, яку слід заплатити при укладанні угоди за покриття ризику X, позначатимемо $\pi[X]$.

Здебільшого, випадкова величина X вважається невід'ємною випадковою величиною, тобто, вона прийматиме значення нуль у випадку коли контракт не призводить до страхової події, та рівна розміру страхової компенсації у випадку появи страхової події. Проте від'ємні значення випадкової величини X інколи допускаються та трактуються як компенсації, що надходять від застрахованого до страхової компанії, скажімо, як штрафні санкції за невиконання умов контракту.

Означимо тепер декілька методів/принципів підрахунку вартості страхових контрактів, які ми збираємось аналізувати.

Нетто премія для ризику X, яку в статті позначатимемо $\pi_{\text{í åòòî}}[X]$, означається як математичне сподівання розміру страхової компенсації, асоційованої з ризиком X, тобто

$$\pi_{\text{í åòòî}}[X] := \mathsf{E}[X].$$

Експоненційна премія, залежна від параметра β, для ризику X, яку в статті позначатимемо $\pi_{\text{åêñï}.(\beta)}[X]$, означається наступним чином

$$\pi_{\text{åêñï}.(\beta)}[X] := \frac{1}{\beta}\log\left(\mathsf{E}[e^{\beta X}]\right), \quad \text{äëÿ} \quad \beta > 0.$$

Премія середнього значення для ризику X (яку в статті позначатимемо $\pi_{\text{ñ.ç.}}[X]$) основана на функції $v(x) \in C^2(\mathbb{R})$ такій, що $v'(x) > 0$ та $v''(x) \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$, означається як розв'язок рівняння

$$v(\pi_{\text{ñ.ç.}}[X]) = \mathsf{E}[v(X)]. \qquad (1)$$

Премія нульової корисності страховика для ризику X, яку позначатимемо як $\pi_{\text{í.ê.ñ.}}[X]$, означається як розв'язок рівняння

$$U(0) = \mathsf{E}[U(\pi_{\text{í.ê.ñ.}}[X] - X)] \qquad (2)$$

де функція $U(x) \in C^2(\mathbb{R})$ − це функція корисності страховика, тобто є такою, що $U'(x) > 0$ та $U''(x) \leq 0$, для $x \in \mathbb{R}$.

Швейцарська премія для ризику X (яку в статті позначатимемо як $\pi_{\text{ø âåéö.}}[X]$) залежна від параметру $\Delta \in [0,1]$ та основана на функції $V(x) \in C^2(\mathbb{R})$ такій, що $V'(x) > 0$ та $V''(x) \geq 0$, для $x \in \mathbb{R}$, означається як розв'язок рівняння

$$V((1-\Delta)\pi_{\text{ø âåéö.}}[X]) = \mathsf{E}[V(X - \Delta\pi_{\text{ø âåéö.}}[X])]. \quad (3)$$

Звернемо увагу на те, що у випадку $\Delta = 0$ швейцарська премія еквівалентна премії середнього значення в якій $v(x) := V(x)$. Звернемо також увагу на те, що у випадку $\Delta = 1$ рівняння (3) можна переписати в наступному вигляді

$$-V(0) = \mathsf{E}[-V(-(\pi[X] - X))].$$

Отже, у випадку $\Delta = 1$, швейцарська премія є еквівалентною премії нульової корисності страховика з функцією корисності $U(x) := -V(-x)$.

У випадках, коли принцип середнього значення, принцип нульової корисності страховика та швейцарський принцип застосовується до деяких спеціальних класів ризиків (в якості прикладу таких класів можна обрати клас усіх невід'ємних ризиків, в якості альтернативи можна згадати клас усіх невід'ємних ризиків, обмежених зверху деяким фіксованим позитивним дійсним значенням) достатньо означати функції $v(x)$, $U(x)$ та $V(x)$ на підмножинах $\mathbb{R}$ зі збереженням властивостей монотонності та опуклості, а також збереженням коректного математичного змісту рівнянь (1)−(3) для всіх ризиків з розглянутого класу.

Говоритимемо, що метод підрахунку вартості страхових контрактів $\pi[X]$ володіє *властивістю консистентності*, якщо для будь-якого ризику X та довільної дійсної сталої c (у випадках, коли метод страхового оцінювання означений лише для невід'ємних ризиків, стала c може вважатися невід'ємною з метою уникнення ситуацій, коли $X + c < 0$, тобто ситуацій, коли величина $\pi[X + c]$ неозначена) виконується тотожність

$$\pi[X + c] = \pi[X] + c. \qquad (4)$$

Більш детально про методи підрахунку вартості страхових контрактів, а також про властивості, якими вони можуть володіти або не володіти, можна почитати, наприклад, в роботах Asmussen та Albrecher (2010), Boland (2007), Bowers та інші (1997), Bühlmann (1970), Dickson (2005), Gerber (1979), De Vylder та інші (1984), De Vylder та інші (1986), Kaas та інші (2008), Kremer (1999), Rolski та інші (1998), Straub (1988).

Варто зауважити, що дослідження, пов'язані з теоремами характеризаційного типу для властивостей, якими можуть володіти або не володіти методи підрахунку вартості страхових контрактів означені з використанням гладких допоміжних функцій, були ініційовані швейцарським математиком Хансом Гербером (ch: Hans-Ulrich Gerber), див. Gerber (1979).

2. Характеризаційна теорема для властивості консистентності

Наступна теорема, в залежності від параметра $\Delta \in [0,1]$, демонструє необхідні та достатні умови накладені на функцію $V(x)$ володіння властивістю консистентності швейцарським принципом підрахунку вартості страхових контрактів.

Теорема 1. (a) Якщо $\Delta = 1$, то швейцарський принцип страхового оцінювання володіє властивістю консистентності при довільному виборі функції $V(x)$.

(b) Якщо $\Delta \in [0{,}1)$, то швейцарський принцип страхового оцінювання володіє властивістю консистентності тоді й лише тоді, коли $V(x) = ax + b$, для $a > 0$, чи $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, тобто, лише у випадках коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.

Звернемо увагу на те, що клас функцій $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, містить в собі, зокрема, всі функції виду $v(x) = \tau^x$, для $\tau > 1$.

Доведення. Почнемо з доведення твердження теореми у випадку $\Delta = 1$. В зазначеному випадку рівняння (3) спрощується до наступного

$$V(0) = \mathsf{E}[V(X - \pi_{\text{ø âåéö.}}[X])]. \qquad (5)$$

Для будь-якого ризику X, довільної допустимої функції $V(x)$, та довільної дійсної сталої c, з рівняння (5) слідує

$$\begin{aligned} V(0) &= \mathsf{E}[V((X + c) - \pi_{\text{ø âåéö.}}[X + c])] = \\ &= \mathsf{E}[V(X - (\pi_{\text{ø âåéö.}}[X + c] - c))] = \\ &= \mathsf{E}[V(X - \pi_{\text{ø âåéö.}}[X])] = V(0), \qquad (6) \end{aligned}$$

отже

$\pi_{\text{ø âåéö.}}[X] = \pi_{\text{ø âåéö.}}[X + c] - c,$ àáî , ù î òå ñàì å,

$\pi_{\text{ø âåéö.}}[X + c] = \pi_{\text{ø âåéö.}}[X] + c.$

Тобто, як бачимо, у випадку $\Delta = 1$ швейцарський принцип страхового оцінювання володіє властивістю консистентності при довільному допустимому виборі функції $V(x)$.

Перейдемо до доведення твердження теореми у випадку $\Delta \in [0{,}1)$. Почнемо з твердження достатності. У випадку $V(x) = ax + b$, при $a > 0$, для довільного ризику X та довільного $\Delta \in [0{,}1)$ рівняння (3) набуватиме наступного вигляду

$$\begin{aligned} a(1 - \Delta)\pi_{\text{ø âåéö.}}[X] + b &= \mathsf{E}[a(X - \Delta\pi_{\text{ø âåéö.}}[X]) + b] = \\ &= a\mathsf{E}[X] - a\Delta\pi_{\text{ø âåéö.}}[X] + b, \end{aligned}$$

отже, в розглянутому випадку,

$$\pi_{\text{ø âåéö.}}[X] = \mathsf{E}[X] = \pi_{\text{í åòòî}}[X]. \qquad (7)$$

З іншого боку, для обраної функції $V(x)$, того ж X, довільної дійсної сталої c, та $\Delta \in [0{,}1)$ рівняння (3) для ризику $X + c$ набуватиме наступного вигляду

$$\begin{aligned} a(1 - \Delta)\pi_{\text{ø âåéö.}}[X + c] + b &= \\ = \mathsf{E}[a(X + c - \Delta\pi_{\text{ø âåéö.}}[X + c]) + b], \end{aligned}$$

отже, використовуючи тотожність (7), отримуємо

$$\begin{aligned} \pi_{\text{ø âåéö.}}[X + c] &= \mathsf{E}[X] + c = \\ &= \pi_{\text{í åòòî}}[X] + c = \pi_{\text{ø âåéö}}[X] + c, \end{aligned}$$

тобто, швейцарський принцип страхового оцінювання у випадку $\Delta \in [0{,}1)$ володіє властивістю консистентності при лінійному виборі функції $V(x)$.

Перейдемо до розгляду випадку $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, при $\min[\alpha, \beta] > 0$. При вказаному виборі функції $V(x)$ для довільного ризику X та $\Delta \in [0{,}1)$ рівняння (3) набуватиме наступного вигляду

$$\begin{aligned} \alpha e^{\beta(1-\Delta)\pi_{\text{ø âåéö.}}[X]} + \gamma &= \mathsf{E}[\alpha e^{\beta(X - \Delta\pi_{\text{ø âåéö.}}[X])} + \gamma] = \\ &= \alpha \cdot \mathsf{E}[e^{\beta X}] \cdot e^{-\beta\Delta\pi_{\text{ø âåéö.}}[X]} + \gamma, \end{aligned}$$

з чого слідує, що у вказаному випадку

$$\pi_{\text{ø âåéö.}}[X] = \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X}]) = \pi_{\text{åêñï .}(\beta)}[X]. \qquad (8)$$

З іншого боку, для вказаного вибору функції $V(x)$, того ж ризику X, довільної дійсної сталої c, та $\Delta \in [0{,}1)$ з рівняння (3) отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha e^{\beta(1-\Delta)\pi_{\text{ø âåéö.}}[X+c]} + \gamma &= \mathsf{E}[\alpha e^{\beta(X + c - \Delta\pi_{\text{ø âåéö.}}[X+c])} + \gamma] = \\ &= \alpha \cdot \mathsf{E}[e^{\beta X}] \cdot e^{\beta c} \cdot e^{-\beta\Delta\pi_{\text{ø âåéö.}}[X+c]} + \gamma, \end{aligned}$$

отже, використовуючи тотожність (8), отримуємо

$$\begin{aligned} \pi_{\text{ø âåéö.}}[X + c] &= \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X}]) + c = \\ &= \pi_{\text{ø âåéö.}(\beta)}[X] + c = \pi_{\text{ø âåéö.}}[X] + c, \end{aligned}$$

тобто, у випадку $\Delta \in [0{,}1)$ швейцарський принцип страхового оцінювання володіє властивістю консистентності при експоненційному виборі функції $V(x)$.

Доведення твердення достатності теореми для випадку $\Delta \in [0{,}1)$ завершене, тому перейдемо до доведення твердження необхідності для цього ж випадку.

Звернемо увагу на те, що швейцарський принцип підрахунку вартості страхових контрактів є інваріантним по відношенню до лінійних перетворень функції $V(x)$, тобто, принцип оснований на конкретно обраній функції $V(x)$ та принцип оснований на функції $\bar{V}(x) := l_1 V(x) + l_2$, для $l_1 > 0$, породжуватимуть однакові премії. Тут умова $l_1 > 0$ накладається для збереження припущення позитивності першої похідної функції $\bar{V}(x)$.

З метою спрощення обчислень під час пошуку необхідних умов консистентності швейцарського принципу, отримаємо спочатку всі допустимі представлення у випадку наявності консистентності для нормованої функції $\bar{V}(x)$ з наступним вибором нормуючих коефіцієнтів

$$l_1 = 1/V'(0) \quad \text{òà} \quad l_2 = -V(0)/V'(0), \qquad (9)$$

а потім повернемося до відповідного загального вигляду функції $V(x)$.

Звернемо увагу на те, що нормована функція $\bar{V}(x)$ з коефіцієнтами виду (9) задовольняє наступні граничні умови

$$\bar{V}(0) = 0, \quad \bar{V}'(0) = 1 \quad \text{òà} \quad \bar{V}''(0) = \kappa,$$

для деякої дійсної сталої $\kappa \geq 0.$

Для того, щоб показати, що у випадку $\Delta \in [0,1)$ швейцарський принцип оснований на функції $V(x)$ відмінній від лінійної чи експоненційної не володітиме властивістю консистентності, розглянемо бернулівську випадкову величину X, яка прийматиме значення t (тут t − це ненульовий дійсний параметр) та 0 з ймовірностями p та $1-p$ відповідно. Будучи випадковою функцією параметрів p та t ризик X в межах доведення теореми 1 позначатиметься як X_p^t.

Рівняння (3) основане на функції $\bar{V}(x)$ для ризику X_p^t та довільного $\Delta \in [0,1)$ набуватиме наступного вигляду

$$\bar{V}((1-\Delta)\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t]) = \bar{V}(t - \Delta\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t])p + \\ + \bar{V}(-\Delta\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t])(1-p). \qquad (10)$$

Підставивши $p = 0$ в рівняння (10), отримуємо

$$\bar{V}((1-\Delta)\pi_{ø\,âåéö.}[X_0^t]) = \bar{V}(-\Delta\pi_{ø\,âåéö.}[X_0^t]). \qquad (11)$$

Так як $\bar{V}'(x) > 0$ для всіх $x \in □$, то з рівняння (11) слідує

$$\pi_{ø\,âåéö.}[X_0^t] = 0. \qquad (12)$$

Перейдемо до частинних похідних відносно параметра p з обох сторін рівняння (10)

$$\bar{V}'((1-\Delta)\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t]) \cdot (1-\Delta) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t] = \\ = \bar{V}(t - \Delta\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t]) - \bar{V}(-\Delta\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t]) - \\ - \Delta \cdot \bar{V}'(t - \Delta\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t]) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t] \cdot p - \\ - \Delta \cdot \bar{V}'(-\Delta\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t]) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t] \cdot (1-p). \qquad (13)$$

Підставивши $p = 0$ в рівняння (13), отримуємо

$$\bar{V}'((1-\Delta)\pi_{ø\,âåéö.}[X_0^t]) \cdot (1-\Delta) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t]\Big|_{p=0} = \\ = \bar{V}(t - \Delta\pi_{ø\,âåéö.}[X_0^t]) - \bar{V}(-\Delta\pi_{ø\,âåéö.}[X_0^t]) - \\ - \Delta \cdot \bar{V}'(-\Delta\pi_{ø\,âåéö.}[X_0^t]) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t]\Big|_{p=0}. \qquad (14)$$

Скомбінувавши (14) та (12), отримуємо

$$\bar{V}'(0) \cdot (1-\Delta) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t]\Big|_{p=0} = \\ = \bar{V}(t) - \bar{V}(0) - \Delta \cdot \bar{V}'(0) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t]\Big|_{p=0}. \qquad (15)$$

Підставивши граничні умови $\bar{V}(0) = 0$ та $\bar{V}'(0) = 1$ в рівняння (15) ми отримуємо представлення для частинної похідної швейцарської премії відносно параметра p в точці $p = 0$, а саме,

$$\frac{\partial}{\partial p}\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t]\Big|_{p=0} = \bar{V}(t). \qquad (16)$$

У випадку консистентного швейцарського принципу підрахунку вартості страхових контрактів, для будь-якого ризику X та довільної дійсної сталої c повинна виконуватися тотожність

$$\pi_{ø\,âåéö.}[X + c] = \pi_{ø\,âåéö.}[X] + c.$$

Отже, у випадку консистентного швейцарського принципу, рівняння (3) для ризику X_p^t, при $\Delta \in [0,1)$ та $c \in □$ основане на функції $\bar{V}(x)$ набуватиме вигляду

$$\bar{V}((1-\Delta)\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t] + (1-\Delta)c) = \\ = \mathsf{E}[\bar{V}(X_p^t + c - \Delta\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t] - \Delta c)].$$

Перепишемо його в наступній еквівалентній формі

$$\bar{V}((1-\Delta)\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t] + (1-\Delta)c) = \\ = \bar{V}(t + c - \Delta\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t] - \Delta c) \cdot p + \\ + \bar{V}(c - \Delta\pi_{ø\,âåéö.}[X_p^t] - \Delta c) \cdot (1-p). \qquad (17)$$

Перейдемо до частинних похідних відносно p з обох сторін рівняння (17)

$$\bar{V}'((1-\Delta)\pi_{\text{ø âåéö.}}[X_p^t]+(1-\Delta)c)\cdot(1-\Delta)\cdot$$
$$\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{ø âåéö.}}[X_p^t]=-\Delta\bar{V}'(t+c-\Delta\pi_{\text{ø âåéö.}}[X_p^t]-$$
$$-\Delta c)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{ø âåéö.}}[X_p^t]\cdot p-\Delta\bar{V}'(c-\Delta\pi_{\text{ø âåéö.}}[X_p^t]-$$
$$-\Delta c)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{ø âåéö.}}[X_p^t]\cdot(1-p)+\bar{V}(t+c-$$
$$-\Delta\pi_{\text{ø âåéö.}}[X_p^t]-\Delta c)-$$
$$-\bar{V}(c-\Delta\pi_{\text{ø âåéö.}}[X_p^t]-\Delta c). \qquad (18)$$

Підставивши $p=0$ в рівняння (18), а також використавши тотожності (12) та (16), отримуємо

$$\bar{V}'((1-\Delta)c)\cdot\bar{V}(t)=$$
$$=\bar{V}(t+(1-\Delta)c)-\bar{V}((1-\Delta)c). \qquad (19)$$

Так як параметр c приймав значення з □, а також з урахуванням того, що $1-\Delta\neq 0$ (бо ми досліджуємо випадок, коли $\Delta\neq 1$), то рівняння

(19) можна переписати в наступному еквівалентному вигляді

$$\bar{V}'(h)\cdot\bar{V}(t)=\bar{V}(t+h)-\bar{V}(h),$$
$$\text{äëÿ } h\in\Box,\quad \text{òà}\quad t\in\Box\setminus\{0\}. \qquad (20)$$

Перейдемо до частинних похідних відносно h з обох сторін рівняння (20)

$$\bar{V}''(h)\cdot\bar{V}(t)=\bar{V}'(t+h)-\bar{V}'(h). \qquad (21)$$

Перейшовши до границі при h прагнучому до нуля в рівнянні (21), а також використавши граничні умови $\bar{V}(0)=0$ та $\bar{V}''(0)=\kappa$ ми отримуємо рівняння, яке функція $\bar{V}(\cdot)$ повинна задовольняти у випадку конзистентного швейцарського принципу, а саме

$$\bar{V}'(t)=\kappa\bar{V}(t)+1. \qquad (22)$$

Параметр t приймав значення з $\Box\setminus\{0\}$, але завдяки неперервності (яка слідує з диференційовності) функцій $\bar{V}'(\cdot)$ та $\bar{V}(\cdot)$ рівняння (22) можна переписати в термінах вихідного параметра $x\in\Box$.

У випадку $\kappa=0$ з рівняння (22), використавши граничну умову $\bar{V}(0)=0$, отримуємо

$$\bar{V}(x)=x. \qquad (23)$$

Скомбінувавши представлення (23) з перехідною тотожністю

$$\bar{V}(x)=l_1V(x)+l_2,\quad \text{äëÿ}\quad l_1=1/V'(0)$$
$$\text{òà}\quad l_2=-V(0)/V'(0), \qquad (24)$$

ми отримуємо співвідношення, що містить в собі вихідну функцію $V(x)$

$$x=\frac{V(x)}{V'(0)}-\frac{V(0)}{V'(0)},$$

яке можна переписати в наступній еквівалентній формі

$$V(x)=V'(0)x+V(0),$$

отже, функція $V(x)$ мусить бути функцією виду

$$V(x)=ax+b$$

з деякими дійсними сталими a та b. Припущення позитивності першої похідної функції $V(x)$ дає додаткові обмеження для параметра a: параметр a мусить бути строго позитивною сталою.

У випадку $\kappa>0$, скомбінувавши рівняння (22) з граничною умовою $\bar{V}(0)=0$, отримуємо

$$\bar{V}(x)=\frac{e^{\kappa x}-1}{\kappa}. \qquad (25)$$

Взявши до уваги $\bar{V}''(0)=\kappa$, використавши співвідношення (25) та перехідну тотожність (24), ми отримуємо відповідне допустиме представлення для вихідної функції $V(x)$ у випадку $\kappa>0$, а саме

$$V(x)=\frac{V'(0)}{\bar{V}''(0)}e^{\bar{V}''(0)x}-\frac{V'(0)}{\bar{V}''(0)}+V(0). \qquad (26)$$

З представлення (26) слідує, що у випадку $\bar{V}''(0)>0$ функція $V(x)$ мусить бути функцією виду

$$V(x)=\alpha e^{\beta x}+\gamma$$

з деякими дійсними сталими α, β та γ. Більш того, умови $V'(0)>0$ та $\bar{V}''(0)>0$ вимагають додаткових обмежень для параметрів α та β, а саме, обидва зазначені параметри мусять бути строго позитивними сталими, або, що те саме, $\min[\alpha,\beta]>0$.

Це завершує доведення теореми 1. □

Покажемо тепер, що для будь-якого фіксованого значення параметра $\Delta\in[0,1)$, швейцарський принцип страхового оцінювання співпадає з нетто принципом тоді й лише тоді, коли $V(x)=ax+b$, для $a>0$, та співпадає з експоненційним принципом тоді й лише тоді, коли $V(x)=\alpha e^{\beta x}+\gamma$, для $\min[\alpha,\beta]>0$.

Для цього нам знадобиться наступна нерівність

$$\pi_{\text{âêñï}.(\beta)}[X]=\frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X}])\geq\frac{1}{\beta}\log(e^{\beta\mathsf{E}[X]})=$$
$$=\mathsf{E}[X]=\pi_{\text{í åòòî}}[X]$$

і більш того, строга рівність в нерівності $E[e^{\beta X}]\geq e^{\beta E[X]}$ з'являється тоді й лише тоді, коли $\mathsf{P}\{X=C\}=1$ для деякої сталої $C\in\Box$. Отже, взагалі кажучи, нетто принцип не є частковим випадком експоненційного принципу, і навпаки.

Припустимо тепер, що для деякого фіксованого значення параметра $\Delta\in[0,1)$ та деякої функції $V(x)$, відмінної від експоненційної функції, швейцарський принцип страхового оцінювання буде еквівалентним експоненційному принципу. Тоді, завдяки консистентності експоненційного принципу, такий метод страхового оцінювання мусить бути консистентним. Проте, як щойно було показано в межах доведення теореми 1, для фіксованого значення параметра $\Delta \in [0,1)$, швейцарський принцип страхового оцінювання володіє властивістю консистентності тоді й лише тоді, коли $V(x) = ax + b$, для $a > 0$, або $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$. Тут випадок $V(x) = ax + b$, для $a > 0$, відповідає нетто принципу, який, як щойно було показано, не є частковим випадком експоненційного принципу. Тобто, як бачимо, вихідне припущення існування функції $V(x)$, відмінної від експоненційної функції, яка б для фіксованого значення параметра $\Delta \in [0,1)$ породжувала б швейцарський принцип еквівалентний експоненційному принципу приводить до протиріччя. Тому, для $\Delta \in [0,1)$, випадок $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, дійсно є єдиним можливим випадком співпадання швейцарського принципу з експоненційним принципом.

Користуючись схожою технікою від противного можна показати, що, при $\Delta \in [0,1)$, випадок $V(x) = ax + b$, для $\mathrm{a} > 0$, є єдиним можливим випадком співпадання швейцарського принципу з нетто принципом.

Аргументація стосовно співпадання швейцарського принципу з експоненційним принципом лише у випадку експоненційної функції $V(x)$

та співпадання з нетто принципом лише при лінійній функції $V(x)$ має місце також для випадку $\Delta = 1$, проте в цьому випадку для доведення можна використати, наприклад, аналогічну характеризаційну теорему або для властивості адитивності, або для властивості ітеративності.

Список літератури

1. Asmussen S. Ruin Probabilities (2nd Edition) / S. Asmussen, H. Albrecher. − Singapore: World Sientific, 2010. − 620 p.
2. Boland P.J. Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science / Boland P.J. — Boca Raton: Chapman & Hall, 2007. — 368 p.
3. Actuarial Mathematics (2nd Edition) / |N.L. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C.J. NesbitJ], — Illinoice: The Society of Actuaries, 1997.
4. Bühlmann H. Mathematical Methods in Risk Theory / Bühlmann H. - Berlin: Springer, 1970. - 210 p.
5. Dickson D.C.M. Insurance Risk and Ruin / Dickson D.C.M. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. — 229 p.
6. Gerber H.U. An Introduction to Mathematical Risk Theory / Gerber H.U. — Philadelpia: Huebner S. S. Foundation for Insurance Education, 1979. — 164 p.
7. de Vylder F.E. Premium Calculation in Insurance (collection of articles) / de Vylder F.E., Goovaerts M., Haezendonck J. (editors) − Boston: Kluwer Academic Publishers, 1984. — 576 p.
8. de Vylder F.E., Goovaerts M., Haezendonck J. (editors) Insurance and Risk Theory (collection of articles) / de Vylder F.E., Goovaerts M.,Haezendonck J. (editors) — Boston: Kluwer Academic Publishers, 1986. — 500 p.
9. Modern Actuarial Risk Theory using R / [Kaas R., Goovaerts M., Dliaene J., Denuit M.]. — Berlin: Springer, 2008. — 381 p.
10. Kremer E. Applied Risk Theory / Kremer E. — Aachen: Shaker, 1999. - 218 p.
11. Stochastic Processes for Insurance and Finance / [Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J.]. − Chichester: John Wiley & Sons, 1999. - 654 p.
12. Straub E. Non-Life Insurance Mathematics / Straub E. — Berlin: Springer, 1988. — 136 p.