

МАТЕМАТИКА

УДК: 519.21

ЙМОВІРНІСТЬ БАНКРУТСТВА В КЛАСИЧНІЙ МОДЕЛІ РИЗИКУ ПРОТЯГОМ СКІНЧЕННОГО ІНТЕРВАЛУ ЧАСУ

ВЕРОЯТНОСТЬ БАНКРОТСТВА В КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РИСКА В ТЕЧЕНИИ КОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА ВРЕМЕНИ

PROBABILITY OF RUIN IN THE CLASSICAL RISK MODEL WITHIN FINITE TIME HORIZON

Дрозденко Віталій Олександрович

кандидат фіз.-мат. наук, асистент каф. вищої математики та фізики
Білоцерківський національний аграрний університет

Дрозденко Виталий Александрович

кандидат физ.-мат. наук, ассистент каф. высшей математики и физики
Белоцерковский национальный аграрный университет

Vitaliy O. Drozdenko

candidate of physical and mathematical sciences,
assistant of the department of higher mathematics and physics
Bila Tserkva National Agrarian University

Анотація. У роботі здійснено опис класичної моделі ризику, яка слугує для опису еволюції в часі сумарного капіталу страхової компанії. Сформульовано принцип двоїстості та представлення Дваса–Дінгеса для траєкторій процесів з переставними приростами, а також отримані інтегральні представлення для ймовірностей не банкрутства протягом скінченного інтервалу часу страхових компаній з нульовим та позитивним початковими капіталами.

Аннотация. У работе представлено описание классической модели риска которая служит для анализа эволюции во времени суммарного капитала страховой компании. Сформулирован принцип двойственности и представление Дваса–Дингеса для траекторий процессов с переставными приращениями, а так же получены интегральные представления для вероятностей не банкротства в течении конечного интервала времени страховых компаний с нулевым и позитивным начальными капиталами.

Abstract. The classical risk model which is used for analysis of time evolution of the total capital of an insurance company is described in the article. We also present the duality principle and the Dwass–Dinges representations for trajectories of a process with exchangeable increments. Beyond this, the integral representations for the probabilities of no-ruin within finite time horizon for an insurance company with zero and positive initial capitals are obtained in the article.

Ключові слова: класична модель ризику, ймовірність банкрутства, скінченний інтервал часу, принцип двоїстості, представлення Дваса–Дінгеса.

Ключевые слова: классическая модель риска, вероятность банкротства, конечный интервал времени, принцип двойственности, представление Дваса–Дингеса.

Key words: classical risk model, ruin probability, finite time horizon, duality principle, Dwass–Dinges representation.

1. Класична модель ризику

Розглянемо страхову компанію, поточний капітал якої в момент часу $t \geq 0$ позначатимемо R_t . Нехай $R_0 = x$ — це початковий капітал компанії, який вважатимемо відомим та невід'ємним. Так як розмір капіталу в майбутньому не відомий, $\{R_t\}$ вважатиметься випадковим процесом з неперервним часом. Більш точно, припускати, що $R_t = x + ct - S_t$. Тут $c > 0$ деяка константа, яка трактується як розмір

страхових внесків за одиницю часу. Тобто, ct — це розмір внесків зібраних на проміжку часу $(0, t)$. З іншого боку, S_t — це загальний розмір страхових виплат на проміжку часу $(0, t)$. Припускати, що $\{S_t\}$ — це складно-пуасонівський процес з параметром інтенсивності λ (очікувана кількість заявок на виплати за одиницю часу) та розподілом індивідуальних виплат $P(\cdot)$. Типова реалізація

траєкторії процесу R_t представлена на рисунку 1.

Нехай також $p_k := \int_0^{+\infty} x^k dP(x)$ для $k = 1, 2$.

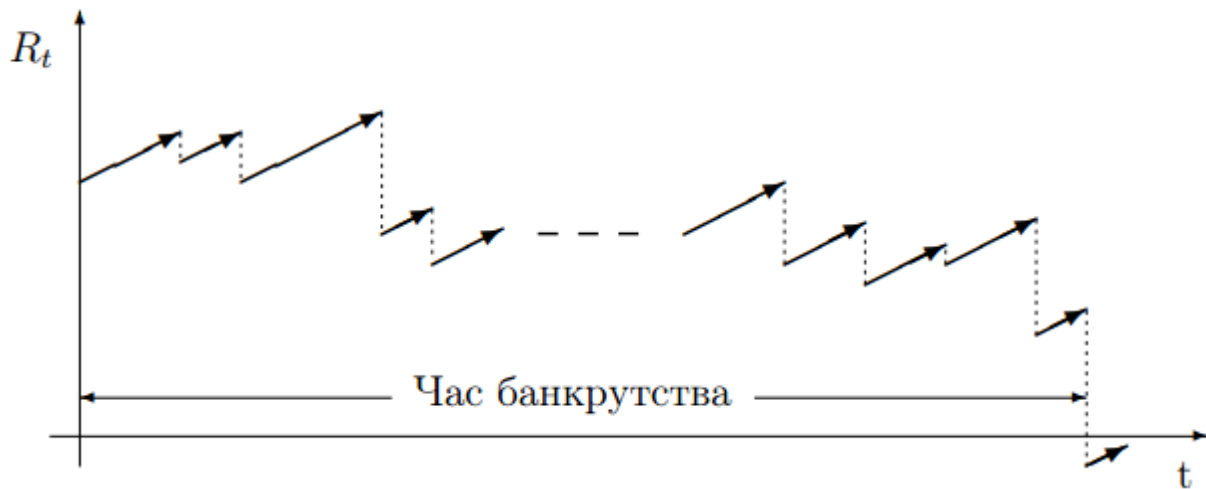


Рис. 1. Класичний процес ризику.

Припускаємо, що $c > \lambda p_1$, тобто премії зібрані за одиницю часу перевищують сумарний об'єм виплат за одиницю часу. Отже, відносна надбавка на ризик $\Lambda := c / \lambda p_1 - 1$ вважається позитивною. Ключове питання в такій моделі, це дослідження настання банкрутства, тобто, чи прийматиме R_t негативне значення для деякого t . Нехай $\psi(x)$ це ймовірність такої події, яку вважатимемо функцією початкового капіталу x . Більш загально, нехай $\psi(x, t)$ — це ймовірність банкрутства при початковому капіталі x , яке настає до моменту часу t . Для того, щоб зробити означення більш строгими, нехай $T := \inf\{t : R_t < 0\}$ — це час настання банкрутства; при цьому вважатимемо, що $T = +\infty$, якщо $R_t > 0$ для всіх t . Тоді $\psi(x) = P\{T < +\infty\}$ та $\psi(x, t) = P\{T < t\}$.

Зручно ввести також позначення для ймовірностей зворотніх подій. Нехай $U(x) = 1 - \psi(x)$ — ймовірність не банкрутства протягом нескінченного інтервалу часу, а $U(x, t) = 1 - \psi(x, t)$ — ймовірність не банкрутства протягом інтервалу часу $(0, t)$. Нехай також $F(\cdot, t)$ — функція розподілу величини S_t . Згідно попередніх припущень

$$F(y, t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} P^{*k}(y) \quad (1)$$

Слід відзначити, що нерівність $c > \lambda p_1$ гарантує, що для довільної реалізації процесу R_t , капітал компанії прямуватиме до нескінченності при $t \rightarrow +\infty$. Питання лише в тому, чи це

відбуватиметься без перетинання t — осі. При настанні банкрутства, величина R_t відображатиме від'ємний розмір капіталу в момент настання банкрутства.

Як слідує з реалізації процесу R_t , див. рисунок 1, в межах цієї публікації ми розглядаємо лише випадки реальних виплат, тобто $P(0) = 0$.

З різними аспектами класичної моделі ризику можна ознайомитись наприклад в роботах: Asmussen and Albrecher (2010), Boland (2007), Bowers et al (1997), Bühlmann (1970), Dickson (2005), De Vylder et al (1984, 1986), Kaas et al (2008), Kremer (1999), Rolski et al (1998), Seal (1969, 1978), Straub (1988).

2. Принцип двоїстості та представлення Дваса--Дінгеса

Нехай $\{S_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ — це випадковий процес з дискретним часом, такий, що $S_0 = x$ деяка константа. Говоритимемо, що прирости $X_n = S_n - S_{n-1}$ є переставними, якщо для довільного $n \in \mathbb{N}^+$ та довільної перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ послідовності $(1, 2, \dots, n)$ сукупний розподіл $X_1, \dots, X_n$ співпадає з сукупним розподілом $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$.

Нехай $\{S_n\}$ процес з переставними приростами, такий, що $S_0 = 0$ для довільного позитивного інтервалу $[a, b]$

$$P\{S_n > S_i \text{ äëü } i = 1, \dots, n-1 \text{ òà } a \leq S_n \leq b\} = P\{S_i > 0 \text{ äëü } i = 1, \dots, n-1 \text{ òà } a \leq S_n \leq b\} \quad (2)$$

Представлення (2) називають принципом двоїстості. Для доведення див. Feller (1966) параграф 12.2.

Наступний результат справедливий при таких припущеннях: $\{S_n\}$ має переставні прирости, дискретний фазовий простір та без стрибків вверх розміру більше одиниці, тобто, можливі лише прирости вигляду $1, 0, -1, -2, \dots$. Припустимо також, що $S_0 = x$ деяке ціле число. Тоді, для довільного цілого $y > x$,

$$P\{S_n = y \text{ à } S_i < y \text{ à } i = 1, \dots, n-1\} = \frac{y-x}{n} P\{S_n = y\} \quad (3)$$

Із доведенням можна ознайомитися в Dwass (1962) або Dinges (1962). Цінність формули (3) полягає в тому, що вона поєднує ймовірність досить складної події, а саме, того що процес вперше досягне рівня y в момент n з ймовірністю

$$P\{R_t \in I, R_u \geq 0 \text{ à } 0 \leq u \leq t\} = P\{R_t \in I, R_u < R_t \text{ à } 0 \leq u < t\} = \frac{y}{ct} P\{R_t \in I\}.$$

Інтегруючи по y від 0 до ct , отримуємо

$$U(0, t) = \frac{1}{ct} \int_0^{ct} y P\{R_t \in I\}. \quad (4)$$

Так як у випадку $x = 0$ маємо $R_t = ct - S_t$, то $P\{R_t \in I\} = P\{S_t \in (z, z + dz)\}$ де $z = ct - y$. Підставивши це в (4) та проінтегрувавши частинами, отримуємо бажану формулу

$$U(0, t) = \frac{1}{ct} \int_0^{ct} F(z, t) dz \quad (5)$$

де функція $F(\cdot, t)$ була означена в (1).

Якщо замінити $F(z, t)$ представленням $1 - (1 - F(z, t))$ інтеграл в (5) можна переписати наступним чином

$$\begin{aligned} \int_0^{ct} F(z, t) dz &= ct - \int_0^{ct} (1 - F(z, t)) dz = \\ &= ct - \int_0^{+\infty} (1 - F(z, t)) dz + \int_{ct}^{+\infty} (1 - F(z, t)) dz = \\ &= ct - \lambda t p_1 + \int_{ct}^{+\infty} (1 - F(z, t)) dz. \end{aligned}$$

Із урахуванням цього, рівняння (5) можна переписати наступним чином

$$U(0, t) = \frac{\Lambda}{1 + \Lambda} + \frac{1}{ct} \int_{ct}^{+\infty} (1 - F(z, t)) dz. \quad (6)$$

Із цього представлення можна отримати $U(0)$ — ймовірність не банкрутства протягом нескінченного проміжку часу з нульовим

$$1 - F(z, t) = P\{S_t > z\} \leq P\{|S_t - \lambda t p_1| \geq z - \lambda t p_1\} \leq \lambda t p_2 / (z - \lambda t p_1)^2.$$

Підставивши цю нерівність в рівняння (6) отримуємо оцінку зверху для $U(0, t)$, а саме

$$U(0, t) \leq \frac{\Lambda}{1 + \Lambda} + \frac{1}{ct} \frac{\lambda p_2}{c - \lambda p_1}.$$

Із чого слідує, що перейшовши до границі при $t \rightarrow +\infty$, з рівняння (6) отримуємо

$$U(0) = \frac{\Lambda}{1 + \Lambda}.$$

досить простої події, а саме, що процес буде на рівні y в момент n .

3. Ймовірність банкрутства протягом скінченного інтервалу часу

У цьому параграфі розглядається питання представлення ймовірності банкрутства протягом скінченного проміжку часу в термінах складно-пуасонівського розподілу. Ідея полягає в тому, щоб використовуючи чисельні методи інтегрування в рівнянні (5) отримати $U(0, t)$, а потім підставити отримане в рівняння (8) для обчислення $U(x, t)$ при $x > 0$.

Спочатку припустимо, що $x = 0$ (початковий капітал компанії рівний нулю). Нехай I це деякий нескінченно малий інтервал $(y, y + dy)$, де $y \geq 0$. Використовуючи неперервні в часі аналоги формул (2) та (3), отримуємо

стартовим капіталом компанії. Спочатку використаємо нерівність Чебишева для отримання обмеження зверху для функції що інтегрується

Цей результат є важливим, бо він показує, що даному частковому випадку ймовірність не банкрутства (а також ймовірність банкрутства) залежить лише від значення відносної надбавки на ризик, і не залежить від конкретного вигляду розподілу індивідуальних виплат (тобто, залежить лише від математичного сподівання цього розподілу).

Тепер розглянемо випадок позитивного початкового капіталу компанії X . В даному випадку маємо

$$U(x, t) = P\{R_t \geq 0\} - P\{R_t \geq 0, R_s = 0 \text{ для } s < t\}. \quad (7)$$

Якщо розрізняти випадки відносно моменту часу $s \in (0, t)$, коли $R_s = 0$ востаннє, від'ємний член в рівнянні (7) можна записати наступним чином

$$\int_0^t P\{R_t \geq 0, R_s = 0 \text{ для } s \in (\omega, \omega + d\omega), R_u > 0 \text{ для } s < u < t\}.$$

Тобто, формула (7) набуватиме наступного вигляду

$$U(x, t) = F(x + ct, t) - \int_0^t U(0, t - \omega) \{F(x + c\omega + cd\omega, \omega) - F(x + c\omega, \omega)\}.$$

Якщо розподіл індивідуальних виплат є абсолютно неперервним, це значить, що

$$U(x, t) = F(x + ct, t) - c \int_0^t U(0, t - \omega) f(x + c\omega, \omega) d\omega \quad (8)$$

де $f(y, t) := \frac{\partial}{\partial y} F(y, t)$ для $y > 0$.

Іншими словами, обчислення ймовірності не банкрутства до часу t компанії з початковим капіталом X у випадку, коли потік виплат описується складно-пуасонівським процесом може бути зведено до двокрокового інтегрування, див формули (5) та (8).

Література

1. Дрозденко В.О. Методи підрахунку вартості страхових контрактів при відомих розподілах збитків, Lambert Academic Publishing, Düsselndorf, 2017.
2. S. Asmussen, H. Albrecher, Ruin Probabilities (second edition), World Scientific, Singapore, 2010.
3. P.J. Boland, Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science, Chapman & Hall, Boca Raton, 2007.
4. N.L. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C.J. Nesbit, Actuarial Mathematics (second edition), The Society of Actuaries, Illinois, 1997.
5. H. Bühlmann, Mathematical Methods in Risk Theory, Springer, Berlin, 1970.
6. D.C.M. Dickson, Insurance Risk and Ruin, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
7. H. Dinges, Eine kombinatorische Überlegung und ihre masstheoretische Erweiterung, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 1962, 1, 278–287.

8. M. Dwass, A fluctation theorem for cyclic random variables, Ann. Math. Statist., 1962, 33, 1450–1454.

9. F.E. De Vylder, M. Goovaerts, J. Haezendonck (editors), Premium Calculation in Insurance (collection of articles), Kluwer Academic Publishers, Boston, 1984.

10. F.E. De Vylder, M. Goovaerts, J. Haezendonck (editors), Insurance and Risk Theory (collection of articles), Kluwer Academic Publishers, Boston, 1986.

11. W. Feller, An Introduction to Probability and Its Applications, Wiley, New York, Vol.2. 1966.

12. R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit, Modern Actuarial Risk Theory using R, Springer, Berlin, 2008.

13. E. Kremer, Applied Risk Theory, Shaker, Aachen, 1999.

14. T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, J. Teugels, Stochastic Processes for Insurance and Finance, John Wiley & Sons, Chichester, 1999.

15. Seal H.L. Stochastic Theory of Risk Business, New York: John Wiley & Sons, 1969.

16. Seal H.L. Survival Probabilities, Chichester: John Wiley & Sons, 1978.

17. E. Straub, Non-Life Insurance Mathematics, Springer, Berlin, 1988.