Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (1). — С. 95–108.

Характеризаційна теорема для властивості адитивності швейцарського принципу підрахунку вартості страхових контрактів

М. В. Працьовитий, В. О. Дрозденко
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. В роботі представлено та доведено характеризаційну теорему для виконання властивості адитивності швейцарським принципом підрахунку вартості страхових контрактів. Теорема сформульована у вигляді необхідних та достатніх умов (залежних від параметра збалансованості між принципом середнього значення та принципом нульової корисності страховика) володіння властивістю адитивності накладених на гладкі допоміжні функції які, при заданому значенні параметра збалансованості, повністю задають швейцарський принцип страхового оцінювання.

Abstract. In the article we formulate and prove characterization theorem for holding of the additivity property which can be possessed or not possessed by the Swiss insurance premium calculation principle. The theorem is formulated in a form of necessary and sufficient conditions (depending on the balancing parameter between the mean value premium principle and the insurer zero utility premium principle) of holding of the additivity property imposed on the smooth auxiliary functions which, under fixed value of the balancing parameter, entirely define the Swiss insurance premium calculation principle.

1. Вступ

Нехай випадкова величина X, з функцією розподілу $F_X(x)$, відображає розмір страхової компенсації, пов'язаної з певною страховою угодою. Премію, яку слід заплатити при укладанні угоди за покриття ризику X, позначатимемо $\pi[X]$.

Здебільшого, випадкова величина X вважається невід'ємною випадковою величиною, тобто, вона прийматиме значення нуль у випадку коли контракт не призводить до страхової події, та рівна розміру страхової компенсації у випадку появи страхової події. Проте, від'ємні значення випадкової величини X інколи допускаються, та трактуються як компенсації, що надходять від застрахованого до страхової компанії, скажімо, як штрафні санкції за невиконання умов контракту.

Означимо тепер декілька методів/принципів підрахунку вартості страхових контрактів, які ми збираємось аналізувати.

Нетто премія для ризику X, яку в статті позначатимемо $\pi_{\text{нетто}}[X]$, означається як математичне сподівання розміру страхової компенсації, асоційованої з ризиком X, тобто

$$\pi_{\text{нетто}}[X] := \mathsf{E}[X].$$

Експоненційна премія, залежна від параметра β, для ризику X, яку в статті позначатимемо $\pi_{\text{експ.}(\beta)}[X]$, означається наступним чином

$$\pi_{\text{експ.}(\beta)}[X] := \frac{1}{\beta}\log\left(\mathsf{E}[e^{\beta X}]\right), \quad \text{для} \quad \beta > 0.$$

Премія середнього значення для ризику X (яку в статті позначатимемо $\pi_{\text{с.з.}}[X]$) основана на функції $v(x) \in C^2(\mathbb{R})$ такої, що $v'(x) > 0$ та $v''(x) \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$, означається як розв'язок рівняння

$$v(\pi_{\text{с.з.}}[X]) = \mathsf{E}[v(X)]. \tag{1}$$

Премія нульової корисності страховика для ризику X, яку позначатимемо як $\pi_{\text{н.к.с.}}[X]$, означається як розв'язок рівняння

$$U(0) = \mathsf{E}[U(\pi_{\text{н.к.с.}}[X] - X)] \tag{2}$$

де функція $U(x) \in C^2(\mathbb{R})$ — це функція корисності страховика, тобто є такою, що $U'(x) > 0$ та $U''(x) \leq 0$, для $x \in \mathbb{R}$.

Швейцарська премія для ризику X (яку в статті позначатимемо як $\pi_{\text{швейц.}}[X]$) залежна від параметру $\Delta \in [0, 1]$ та основана на функції $V(x) \in C^2(\mathbb{R})$ такій, що $V'(x) > 0$ та $V''(x) \geq 0$, для $x \in \mathbb{R}$, означається як розв'язок рівняння

$$V((1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[X]) = \mathsf{E}[V(X - \Delta\pi_{\text{швейц.}}[X])]. \tag{3}$$

Звернемо увагу на те, що у випадку $\Delta = 0$ швейцарська премія еквівалентна премії середнього значення в якій $v(x) := V(x)$. Звернемо також увагу на те, що у випадку $\Delta = 1$ рівняння (3) можна переписати в наступному вигляді

$$-V(0) = \mathsf{E}[-V(-(\pi[X] - X))].$$

Отже, у випадку $\Delta = 1$, швейцарська премія є еквівалентною премії нульової корисності страховика з функцією корисності $U(x) := -V(-x)$.

У випадках, коли принцип середнього значення, принцип нульової корисності страховика та швейцарський принцип застосовується до деяких спеціальних класів ризиків (в якості прикладу таких класів можна обрати клас усіх невід'ємних ризиків, в якості альтернативи можна згадати клас усіх невід'ємних ризиків, обмежених зверху деяким фіксованим позитивним дійсним значенням) достатньо означати функції

$v(x)$, $U(x)$ та $V(x)$ на підмножинах $\mathbb{R}$ зі збереженням властивостей монотонності та опуклості, а також збереженням коректного математичного змісту рівнянь (1)–(3) для всіх ризиків з розглянутого класу.

Говоритимемо, що метод підрахунку вартості страхових контрактів $\pi[X]$ володіє *властивістю адитивності*, якщо для будь-яких двох незалежних ризиків X_2 та X_2 має місце рівність

$$\pi[X_1 + X_2] = \pi[X_1] + \pi[X_2]. \tag{4}$$

Більш детально про методи підрахунку вартості страхових контрактів, а також про властивості, якими вони можуть володіти або не володіти, можна почитати, наприклад, в роботах Asmussen та Albrecher (2010), Boland (2007), Bowers та інші (1997), Bühlmann (1970), Dickson (2005), Gerber (1979), De Vylder та інші (1984), De Vylder та інші (1986), Kaas та інші (2008), Kremer (1999), Rolski та інші (1998), Straub (1988).

Варто зауважити, що дослідження, пов'язані з теоремами характеризаційного типу для властивостей, якими можуть володіти або не володіти методи підрахунку вартості страхових контрактів означені з використанням гладких допоміжних функцій, були ініційовані швейцарським математиком Хансом Гербером (ch: Hans-Ulrich Gerber), див. Gerber (1979).

2. Характеризаційна теорема для властивості адитивності

Наступна теорема демонструє необхідні та достатні умови володіння властивістю адитивності швейцарським принципом підрахунку вартості страхових контрактів.

Теорема 1. *Для будь-якого фіксованого значення параметра* $\Delta \in [0, 1]$, *швейцарський принцип страхового оцінювання володіє властивістю адитивності тоді й лише тоді, коли* $V(x) = ax + b$, *для* $a > 0$, *чи* $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, *для* $\min[\alpha, \beta] > 0$, *тобто, лише у випадках співпадання або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Звернемо увагу на те, що клас функцій $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, містить в собі, зокрема, всі функції виду $v(x) = \tau^x$, для $\tau > 1$.

Доведення. Почнемо з доведення твердження достатності. У випадку $V(x) = ax + b$, при $a > 0$, для довільного ризику X та довільного $\Delta \in [0, 1]$, вихідне рівняння (3) набуватиме наступного вигляду

$$a(1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[X] + b \;=\; a\mathsf{E}[X] - a\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X] + b,$$

отже, в розглянутому випадку,

$$\pi_{\text{швейц.}}[X] \;=\; \mathsf{E}[X] \;=\; \pi_{\text{нетто}}[X]. \tag{5}$$

З іншого боку, при зазначених умовах, з рівняння (3) для будь-яких двох незалежних ризиків $X_1 + X_2$ слідує

$$a(1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[X_1+X_2]+b=\mathsf{E}[a(X_1+X_2-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_1+X_2])+b], \tag{6}$$

отже, використавши тотожності (5), з рівняння (6) отримуємо

$$\pi_{\text{швейц.}}[X_1+X_2]=\mathsf{E}[X_1]+\mathsf{E}[X_2]=\pi_{\text{швейц.}}[X_1]+\pi_{\text{швейц.}}[X_2].$$

Тобто, для будь-якого значення параметра $\Delta \in [0,\,1]$, швейцарський принцип страхового оцінювання володіє властивістю адитивності у випадку лінійної функції $V(x)$.

Перейдемо до розгляду випадку $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, при $\min[\alpha,\,\beta] > 0$. При вказаному виборі функції $V(x)$, для довільного ризику X та $\Delta \in [0,\,1]$, рівняння (3) набуватиме наступного вигляду

$$\alpha\, e^{\beta(1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[X]}+\gamma \;\; = \;\; \alpha\cdot\mathsf{E}[e^{\beta X}]\cdot e^{-\beta\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X]}+\gamma,$$

з чого слідує, що у зазначеному випадку

$$\pi_{\text{швейц.}}[X]=\frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X}]) \;\; = \;\; \pi_{\text{експ.}(\beta)}[X]. \tag{7}$$

З іншого боку, при вказаних умовах, для будь-яких двох незалежних ризиків X_1 та X_2 з рівняння (3) слідує

$$\alpha\,\exp(\beta(1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[X_1+X_2])+\gamma=\mathsf{E}[\alpha\,\exp(\beta(X_1+X_2-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_1+X_2]))+\gamma],$$

тобто, використавши тотожності (7), зі щойно представленого рівняння отримуємо

$$\pi_{\text{швейц.}}[X_1+X_2]=\frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta\,X_1}])+\frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta\,X_2}])=\pi_{\text{швейц.}}[X_1]+\pi_{\text{швейц.}}[X_2].$$

Отже, як бачимо, при будь-якому фіксованому значенні параметра $\Delta \in [0,\,1]$, швейцарський принцип страхового оцінювання володіє властивістю адитивності також у випадку експоненційної функції $V(x)$.

Доведення твердження достатності завершене, тому перейдемо до доведення твердження необхідності.

Звернемо увагу на те, що швейцарський принцип страхового оцінювання є інваріантним по відношенню до лінійних перетворень функції $V(x)$, тобто, принцип оснований на конкретно обраній функції $V(x)$ та принцип оснований на функції $\overline{V}(x) := l_1V(x)+l_2$, для $l_1 > 0$, породжуватимуть однакові премії. Тут умова $l_1 > 0$ накладається для збереження припущення позитивності першої похідної функції $\overline{V}(x)$.

З метою спрощення обчислень під час пошуку необхідних умов адитивності швейцарського принципу, отримаємо спочатку всі допустимі представлення у випадку наявності адитивності для нормованої функції $\overline{V}(x)$ з наступним вибором нормуючих коефіцієнтів

$$l_1 = 1/V'(0) \quad \text{та} \quad l_2 = -V(0)/V'(0), \tag{8}$$

а потім повернемося до відповідного загального вигляду функції $V(x)$.

Звернемо увагу на те, що нормована функція $\overline{V}(x)$ з коефіцієнтами виду (8) задовольняє наступні граничні умови

$$\overline{V}(0) = 0, \quad \overline{V}'(0) = 1 \quad \text{та} \quad \overline{V}''(0) = \kappa,$$

для деякої дійсної сталої $\kappa \geq 0$.

Для того, щоб показати, що для довільного фіксованого значення параметра $\Delta \in [0,\,1]$ швейцарський принцип оснований на функції $V(x)$ відмінній від лінійної чи експоненційної не володітиме властивістю адитивності, розглянемо бернулівську випадкову величину X, яка прийматиме значення t (тут t — це ненульовий дійсний параметр) та 0 з ймовірностями p та $1-p$ відповідно. Будучи випадковою функцією параметрів p та t ризик X в межах публікації позначатиметься як X_p^t.

Рівняння (3) основане на функції $\overline{V}(x)$ для ризику X_p^t та довільного $\Delta \in [0,\,1]$ набуватиме наступного вигляду

$$\overline{V}((1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]) = \overline{V}(t - \Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t])p + \overline{V}(-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t])(1-p). \tag{9}$$

Підставивши $p = 0$ в рівняння (9), отримуємо

$$\overline{V}((1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[X_0^t]) = \overline{V}(-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_0^t]). \tag{10}$$

Так як $\overline{V}'(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то з рівняння (10) слідує

$$\pi_{\text{швейц.}}[X_0^t] = 0. \tag{11}$$

Перейдемо до частинних похідних відносно параметра p з обох сторін рівняння (9)

$$\begin{aligned}
\overline{V}'((1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]) \cdot (1-\Delta) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t] \; = \\
= \; \overline{V}(t - \Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]) \; - \; \overline{V}(-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]) \; - \\
- \; \Delta \cdot \overline{V}'(t - \Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t] \cdot p \; - \\
- \; \Delta \cdot \overline{V}'(-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t] \cdot (1-p).
\end{aligned} \tag{12}$$

Підставивши $p = 0$ в рівняння (12), отримуємо

$$\begin{aligned}
\overline{V}'((1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[X_0^t]) \cdot (1-\Delta) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} \; = \\
= \; \overline{V}(t - \Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_0^t]) \; - \; \overline{V}(-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_0^t]) \; - \\
- \; \Delta \cdot \overline{V}'(-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_0^t]) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Зкомбінувавши (13) та (11), отримуємо

$$\overline{V}'(0) \cdot (1-\Delta) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} \; = \; \overline{V}(t) - \overline{V}(0) - \Delta \cdot \overline{V}'(0) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0}. \tag{14}$$

Підставивши граничні умови $\overline{V}(0) = 0$ та $\overline{V}'(0) = 1$ в рівняння (14) ми отримуємо представлення для частинної похідної швейцарської премії відносно параметра p в точці $p = 0$, а саме,

$$\left.\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\right|_{p=0} = \overline{V}(t). \tag{15}$$

Розглянемо також бернулівську випадкову величину Y, незалежну по відношенню до ризику X_p^t, яка прийматиме значення h (тут h — це ненульовий дійсний параметр) та 0 з ймовірностями q та $1-q$ відповідно. Будучи випадковою функцією параметрів h та q, ризик Y в межах публікації позначатиметься як Y_q^h.

Використовуючи аргументацію схожу до щойно представленої для ризику X_p^t, отримуємо наступні тотожності

$$\pi_{\text{швейц.}}[Y_0^h] = 0, \quad \text{та} \quad \left.\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]\right|_{q=0} = \overline{V}(h). \tag{16}$$

Легко бачити, що ризик $X_p^t + Y_q^h$ прийматиме значення $t+h$, t, h та 0 з ймовірностями pq, $p(1-q)$, $(1-p)q$ та $(1-p)(1-q)$ відповідно.

У випадку адитивного швейцарського принципу страхового оцінювання повинна виконуватись наступна тотожність

$$\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t + Y_q^h] = \pi_{\text{швейц.}}[X_p^t] + \pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h].$$

Тобто, при наявності адитивності, вихідне рівняння (3) основане на нормованій функції $\overline{V}(x)$ при довільному фіксованому $\Delta \in [0, 1]$ для ризику $X_p^t + Y_q^h$ може бути представлене в наступному вигляді

$$\begin{aligned} \overline{V}((1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t] + (1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]) &= \\ = \; & \overline{V}(t + h - \Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t] - \Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]) \cdot pq \\ + \; & \overline{V}(t - \Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t] - \Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]) \cdot p(1-q) \\ + \; & \overline{V}(h - \Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t] - \Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]) \cdot (1-p)q \\ + \; & \overline{V}(-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t] - \Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]) \cdot (1-p)(1-q). \end{aligned} \tag{17}$$

Перейдемо до частинних похідних відносно параметра p з обох сторін рівняння (17)

$$\begin{aligned}
&\overline{V}'((1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]+(1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot(1-\Delta)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t] \ = \\
&\quad = \ -\overline{V}'(t+h-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\cdot pq \\
&\qquad + \ \overline{V}(t+h-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot q \\
&\qquad - \ \overline{V}'(t-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\cdot p(1-q) \\
&\qquad + \ \overline{V}(t-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot(1-q) \qquad\qquad (18)\\
&\qquad - \ \overline{V}'(h-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\cdot(1-p)q \\
&\qquad - \ \overline{V}(h-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot q \\
&\qquad - \ \overline{V}'(-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\cdot(1-p)(1-q) \\
&\qquad - \ \overline{V}(-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot(1-q).
\end{aligned}$$

Перейдемо тепер до частинних похідних відносно параметра q з обох сторін рівняння (18)

$$\begin{aligned}
&\overline{V}''((1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]+(1-\Delta)\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot(1-\Delta)^2\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h] \ = \\
&= \ \overline{V}''(t+h-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta^2\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]\cdot pq \\
&\ - \ \overline{V}'(t+h-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\cdot p \\
&\ - \ \overline{V}'(t+h-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]\cdot q
\end{aligned}$$

(продовження рівняння на наступній сторінці)

(початок рівняння на попередній сторінці)

$$
\begin{aligned}
&+\ \overline{V}\,(t+h-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\\
&+\ \overline{V}\,''(t-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta^2\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]\cdot p(1-q)\\
&+\ \overline{V}\,'(t-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\cdot p\\
&-\ \overline{V}\,'(t-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]\cdot(1-q)\\
&-\ \overline{V}\,(t-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\\
&+\ \overline{V}\,''(h-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta^2\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]\cdot(1-p)q\\
&-\ \overline{V}\,'(h-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\cdot(1-p)\\
&+\ \overline{V}\,'(h-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]\cdot q\\
&-\ \overline{V}\,(h-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\\
&+\ \overline{V}\,''(-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta^2\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]\cdot(1-p)(1-q)\\
&+\ \overline{V}\,'(-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]\cdot(1-p)\\
&+\ \overline{V}\,'(-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h])\cdot\Delta\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]\cdot(1-q)\\
&+\ \overline{V}\,(-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[X_p^t]-\Delta\pi_{\text{швейц.}}[Y_q^h]).
\end{aligned}
$$

Підставивши $p=q=0$ в щойно отримане рівняння та використавши тотожності (11), (15), (16), а також граничні умови $\overline{V}(0)=0$, $\overline{V}\,'(0)=1$ та $\overline{V}\,''(0)=\kappa$, ми отримуємо рівняння, яке нормована функція $\overline{V}(\cdot)$ повинна задовольняти у випадку адитивного швейцарського принципу, а саме,

$$
\begin{aligned}
\kappa\cdot(1-\Delta)^2\cdot\overline{V}(t)\overline{V}(h)=\overline{V}(t+h)-\Delta\overline{V}\,'(t)\overline{V}(h)-\Delta\overline{V}\,'(h)\overline{V}(t)-\overline{V}(t)-\overline{V}(h)\\
+\kappa\Delta^2\overline{V}(t)\overline{V}(h)+\Delta\overline{V}(t)+\Delta\overline{V}(h).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Розв'язуючи рівняння (19) ми розглядатимемо окремо випадки $\Delta=1$ та $\Delta\neq1$ зкомбіновані з окремим розглядом значень $\kappa=0$ та $\kappa>0$. Почнемо з випадку $\Delta\neq1$ та $\kappa=0$. В цьому випадку рівняння (19) спрощується до наступного

$$
\overline{V}(t+h)=\Delta\overline{V}\,'(t)\overline{V}(h)+\Delta\overline{V}\,'(h)\overline{V}(t)+(1-\Delta)\overline{V}(t)+(1-\Delta)\overline{V}(h).\tag{20}
$$

Перейшовши до часткових похідних відносно параметра h в рівнянні (19), ми отримуємо наступне рівняння

$$
\overline{V}\,'(t+h)=\Delta\overline{V}\,'(t)\overline{V}\,'(h)+\Delta\overline{V}\,''(h)\overline{V}(t)+(1-\Delta)\overline{V}\,'(h)\tag{21}
$$

Перейшовши до границі при h прагнучому до нуля в рівнянні (21) та використавши граничні умови $\overline{V}'(0) = 1$ та $\overline{V}''(0) = 0$ ми отримуємо рівняння

$$(1-\Delta)\overline{V}'(t) = 1-\Delta. \tag{22}$$

Параметр t приймав значення в $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, проте, завдяки неперервності (яка слідує з диференційовності) функції $\overline{V}(\cdot)$, рівняння (22) можна переписати в термінах вихідного параметра $x \in \mathbb{R}$. Більш того, так як в даний момент ми розглядаємо випадок $\Delta \neq 1$, то рівняння (22) можна спростити до наступного вигляду

$$\overline{V}'(x) = 1. \tag{23}$$

Зкомбінувавши рівняння (23) з граничною умовою $\overline{V}(0) = 0$, отримуємо допустиме представлення для нормованої функції $\overline{V}(x)$ у випадку $\Delta \neq 1$ та $\kappa = 0$, а саме,

$$\overline{V}(x) = x. \tag{24}$$

Використовуючи щойно отримане допустиме представлення (24) та перехідну тотожність

$$\overline{V}(x) = l_1 V(x) + l_2, \quad \text{для} \quad l_1 = 1/V'(0) \quad \text{та} \quad l_2 = -V(0)/V'(0), \tag{25}$$

ми отримуємо рівняння, яке вихідна функція $V(x)$ повинна задовольняти у випадку $\Delta \neq 1$ та $\kappa = 0$ при наявності адитивності швейцарського принципу, а саме,

$$V(x) = V'(0)x + V(0). \tag{26}$$

З рівняння (26) слідує, що функція $V(x)$ повинна бути функцією виду $V(x) = ax + b$ з деякими дійсними сталими a та b. Умова $V'(0) > 0$ вимагає додаткового обмеження для параметра a, а саме, параметр a мусить бути строго позитивною сталою.

Перейдемо до розгляду рівняння (19) у випадку $\Delta \neq 1$ та $\kappa > 0$.

Перейшовши дослідовно до частинних похідних відносно параметра t а потім відносно парамеьра h з обох сторін рівняння (19), отримуємо

$$\kappa(1-2\Delta)\overline{V}'(t)\overline{V}'(h) = \overline{V}''(t+h) - \Delta\overline{V}''(t)\overline{V}'(h) - \Delta\overline{V}''(h)\overline{V}'(t). \tag{27}$$

Перейшовши до границі при h прагнучому до нуля в рівнянні (27), та використавши граничні умови $\overline{V}'(0) = 1$ та $\overline{V}''(0) = \kappa$, отримуємо рівняння

$$(1-\Delta)\overline{V}''(t) = \kappa(1-\Delta)\overline{V}'(t). \tag{28}$$

Так як в даний момент ми розглядаємо випадок $\Delta \neq 1$ то рівняння (28) спрощується до наступного

$$\overline{V}''(t) = \kappa\overline{V}'(t). \tag{29}$$

З рівняння (29), використавши граничні умови $\overline{V}(0) = 0$ та $\overline{V}'(0) = 1$ (тут, завдяки неперервності функцій $\overline{V}(\cdot)$ та $\overline{V}'(\cdot)$, величини $\overline{V}(0)$ та $\overline{V}'(0)$ можуть бути означені як $\lim_{t\to 0}\overline{V}(t)$ та $\lim_{t\to 0}\overline{V}'(t)$ відповідно), ми отримуємо допустиме представлення для нормованої функції $\overline{V}(\cdot)$ у випадку $\overline{V}''(0) > 0$. Параметр t приймав значення в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, проте, завдяки неперервності, функція $\overline{V}(\cdot)$ може бути представлена в термінах вихідного параметра $x \in \mathbb{R}$, а саме,

$$\overline{V}(x) = \frac{e^{\kappa x} - 1}{\kappa}, \quad \text{для} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

Приймаючи до уваги те, що $\overline{V}''(0) = \kappa$, використавши представлення (30), та перехідну тотожність (25), ми отримуємо відповідне допустиме представлення для вихідної функції $V(x)$, а саме,

$$V(x) = \frac{V'(0)}{\overline{V}''(0)} e^{\overline{V}''(0)x} - \frac{V'(0)}{\overline{V}''(0)} + V(0). \tag{31}$$

З представлення (31) слідує, що у випадку $\overline{V}''(0) > 0$ функція $V(x)$ мусить бути функцією виду $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$ з деякими дійсними сталими α, β та γ. Більш того, умови $V'(0) > 0$ та $\overline{V}''(0) > 0$ вимагають додаткових обмежень для параметрів α та β, а саме, обидва згадані параметри повинні бути позитивними сталими, або, що те саме, $\min[\alpha, \beta] > 0$.

Перейдемо тепер до розгляду випадку $\Delta = 1$. В цьому випадку рівняння (19) спрощується до наступного

$$0 = \overline{V}(t+h) - \overline{V}'(t)\overline{V}(h) - \overline{V}'(h)\overline{V}(t) + \kappa \overline{V}(t)\overline{V}(h). \tag{32}$$

Розв'язуючи рівняння (32) ми знову розглядатимемо окремо випадки $\kappa = 0$ та $\kappa > 0$. Почнемо з випадку $\kappa > 0$. Так як функція $\overline{V}(\cdot)$ є опуклою вниз, то з урахуванням граничної умови $\overline{V}(0) = 0$, справедливою є наступна нерівність

$$\overline{V}(2t) \ \geq \ 2\overline{V}(t). \tag{33}$$

Підставивши $t = h$ в рівняння (32), отримуємо

$$0 = \overline{V}(2t) - 2\overline{V}'(t)\overline{V}(t) + \kappa \overline{V}^2(t). \tag{34}$$

З метою дослідження поведінки нормованої функції $\overline{V}(t)$ на мінус нескінченності, без втрати загальності, припускатимемо деякий час, що параметр t приймає лише строго негативні значення. Як вже зазначалося у вступі до даної публікації, у випадку $\Delta = 1$ швейцарський принцип є еквівалентним принципу нульової корисності страховика з функцією корисності $U(x) := -V(-x)$. Тобто, завдяки рівності $V(x) = -U(-x)$, дослідження поведінки нормованої функції $\overline{V}(\cdot)$ на мінус нескінченності відповідає дослідженню функції корисності страховика при нескінченно зростаючому значенні капіталу страховика.

З рівняння (34), взявши до уваги нерівність (33), отримуємо

$$2\overline{V}'(t)\overline{V}(t) \ \geq \ 2\overline{V}(t) + \kappa \overline{V}^2(t). \tag{35}$$

Так як $\overline{V}(0) = 0$ та $\overline{V}'(x) > 0$ для $x \in \mathbb{R}$, то, для всіх $t < 0$ отримуємо $\overline{V}(t) < 0$. Отже, з нерівності (35) у випадку $t < 0$ слідує (після ділення на $2\overline{V}(t)$)

$$\overline{V}'(t) \ \leq \ 1 + \frac{\kappa}{2}\overline{V}(t). \tag{36}$$

Так як $\kappa > 0$ то з нерівності (36) слідує, що функція $\overline{V}(t)$ повинна бути обмеженою знизу, бо в противному разі величина $1 + \kappa\overline{V}(t)/2$ була б від'ємною для достатньо малих значень параметра t, а це б протирічило припущенню позитивності першої похідної функції $V(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Так як $\overline{V}(0) = 0$, а також з урахуванням того, що функція $\overline{V}(t)$ є спадною та обмеженою для спадаючих значень параметра t, робимо висновок, що існують наступні границі

$$\lim_{t\to-\infty} \overline{V}'(t) = 0, \quad \text{та} \quad \lim_{t\to-\infty} \overline{V}(t) = \text{constant} < 0, \tag{37}$$

більш того, для будь-якого фіксованого $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ має місце наступне граничне співвідношення

$$\lim_{t\to-\infty} \overline{V}(t+h)\big/\overline{V}(t) \ = \ \lim_{t\to-\infty} \overline{V}(t+h) \ \Big/ \lim_{t\to-\infty} \overline{V}(t) \ = \ 1. \tag{38}$$

Поділивши ліку й праву частини рівняння (32) на $\overline{V}(t)$, перейшовши до границі при t прагнучому до мінус нескінченності, та використавши граничні співвідношення (37) та (37) отримуємо наступне рівняння

$$\overline{V}'(h) = \kappa\overline{V}(h) + 1. \tag{39}$$

З рівняння (39) взявши до уваги граничну умову $\overline{V}(0) = 0$, отримуємо

$$\overline{V}(x) = \frac{e^{\kappa x} - 1}{\kappa}, \quad \text{для} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{40}$$

Представлення (40) співпадає з представленням (30). Отже, повторивши викладки застосовані до (40), робимо вичсновок, що єдиним допустимим представленням для функції $V(x)$ для наявності адитивності швейцарського принципу у випадку $\Delta = 1$ та $\kappa > 0$ є наступне $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$.

Перейдемо до розгляду випадку $\Delta = 1$ та $\kappa = 0$. В цьому випадку рівняння (19) спрощується до наступного

$$0 = \overline{V}(t+h) - \overline{V}'(t)\overline{V}(h) - \overline{V}'(h)\overline{V}(t). \tag{41}$$

Припустимо, що в зазначеному випадку функція $\overline{V}(t)$ є обмеженою знизу для спадаючих значень параметра t. Якщо так, то завдяки позитивності першої похідної функції $V(x)$ та граничній умові $\overline{V}(0) = 0$ існують границі

$$\lim_{t\to-\infty} \overline{V}'(t) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} \overline{V}(t) = \text{constant} < 0, \quad \text{та} \quad \lim_{t\to-\infty} \overline{V}(t+h)/\overline{V}(t) = 1, \tag{42}$$

для будь-якого фіксованого $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Поділивши ліву й праву частину рівняння (41) на $\overline{V}(t)$ перейшовши до границі при t прагнучому до мінус нескінченності та використавши граничні співвідношення (42), отримуємо

$$\overline{V}'(h) = 1, \quad \text{для всіх } h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{43}$$

Тотожність (43) протирічить першій з границь в (42). Тобто, як бачимо, припущення обмеженості знизу функції $\overline{V}(t)$ для спадаючих значень параметра t приводить до протиріччя, а тому має місце наступне граничне співвідношення

$$\lim_{t\to-\infty} \overline{V}(t) = -\infty. \tag{44}$$

Так як ми аналізуємо граничну поведінку рівняння (41) у випадку коли параметр t прагне до мінус нескінченності, то для довільного фіксованого $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, без втрати загальності, для зручності викладок ми припускатимемо, що $t < \min[0, h]$. Взявши до уваги це зауваження, робимо висновок, що у випадку $h > 0$ справедливі наступні нерівності $t < t + h < h$. Тому, завдяки опуклості вниз функції $\overline{V}(\cdot)$, отримуємо для довільного $\theta \in [0, 1]$

$$\overline{V}(\theta t + (1-\theta)h) \ \le \ \theta\overline{V}(t) + (1-\theta)\overline{V}(h). \tag{45}$$

Підставивши $\theta = t/(t-h)$ в нерівність (45), отримуємо

$$\overline{V}(t+h) \ \le \ \frac{t}{t-h}\overline{V}(t) - \frac{h}{t-h}\overline{V}(h). \tag{46}$$

Звернемо увагу на те, що, для довільного фіксованого $h > 0$,

$$\frac{t}{t-h}\overline{V}(t) - \frac{h}{t-h}\overline{V}(h) \ \sim \ \overline{V}(t), \quad \text{при} \quad t \to -\infty, \tag{47}$$

тут позначення $g_1(x) \sim g_2(x)$, при $x \to -\infty$, значить $\lim_{x\to-\infty} g_1(x)/g_2(x) = 1$.

Так як для $h > 0$ має місце нерівність $\overline{V}(t+h) > \overline{V}(t)$, то з рівняння (46) слідують наступні нерівності

$$\overline{V}(t) \ < \ \overline{V}(t+h) \ \le \ \frac{t}{t-h}\overline{V}(t) - \frac{h}{t-h}\overline{V}(h). \tag{48}$$

Перейшовши до границі при t прагнучому до мінус нескінченносі в нерівностях (48), та використавши граничне співвідношення (47), приходимо до наступного висновку

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\overline{V}(t+h)}{\overline{V}(t)} = 1, \quad \text{для всіх } h > 0. \tag{49}$$

У випадку $h < 0$, припускаючи, з метою проведення асимптотичного аналізу, без втрати загальності, що $t < h$, як наслідок ми отримуємо наступні нерівності $t + h < t < h$. Тому, приймаючи до уваги опуклість вниз функції $\overline{V}(\cdot)$, для довільного $\theta \in [0, 1]$ має місце нерівність

$$\overline{V}(\theta(t+h) + (1-\theta)h) \ \le \ \theta\overline{V}(t+h) + (1-\theta)\overline{V}(h). \tag{50}$$

Підставивши $\theta = (t-h)/h$ в (50), та взявши до уваги те, що $\overline{V}(t+h) < \overline{V}(t)$ для $h < 0$, отримуємо наступні нерівності

$$\overline{V}(t) \;>\; \overline{V}(t+h) \;\geq\; \frac{t}{t-h}\overline{V}(t) - \frac{h}{t-h}\overline{V}(h). \tag{51}$$

Звернемо увагу на те, що для довільного фіксованого $h < 0$,

$$\frac{t}{t-h}\overline{V}(t) - \frac{h}{t-h}\overline{V}(h) \;\sim\; \overline{V}(t), \quad \text{при} \quad t \to -\infty. \tag{52}$$

Перейшовши до границі при t прагнучому до мінус нескінченності в (51) та використавши граничне співвідношення (52), отримуємо

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\overline{V}(t+h)}{\overline{V}(t)} = 1, \quad \text{для всіх } h < 0. \tag{53}$$

Так як $\overline{V}\,'(t)$ є незростаючою функцією для спадаючих значень параметра t, то, приймаючи до уваги $\overline{V}\,'(0) = 1$ та $\overline{V}\,'(t) > 0$ використовуючи (44) отримуємо наступне граничне співвідношення

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\overline{V}\,'(t)}{\overline{V}(t)} \;=\; 0 \tag{54}$$

Поділивши обидві частини рівняння (41) на $\overline{V}(t)$, перейшовши до границі при t прагнучому до мінус нескінченності, використавши граничні співвідношення (49), (53), (54), та взявши до уваги неперервність функції $\overline{V}\,'(\cdot)$ в нулі, приходимо до висновку

$$\overline{V}\,'(x) = 1, \quad \text{для } x \in \mathbb{R}. \tag{55}$$

Представлення (55) співпадає з представленням (23), тому повторивши викладки проведені для (23), робимо висновок, що єдиним допустимим представленням для функції $V(x)$ у випадку адитивного швейцарського принципу при $\Delta = 1$ та $\kappa = 0$ є наступне $V(x) = ax + b$, для $a > 0$.

Це завершує доведення теореми 1. □

Покажемо тепер, що для будь-якого фіксованого значення параметра $\Delta \in [0, 1]$, швейцарський принцип страхового оцінювання співпадає з нетто принципом тоді й лише тоді, коли $V(x) = ax + b$, для $a > 0$, та співпадає з експоненційним принципом (з параметром β) тоді й лише тоді, коли $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$.

Для цього нам знадобиться наступна нерівність

$$\pi_{\text{експ.}(\beta)}[X] \;=\; \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X}]) \;\geq\; \frac{1}{\beta}\log(e^{\beta\,\mathsf{E}[X]}) \;=\; \mathsf{E}[X] \;=\; \pi_{\text{нетто}}[X]$$

і більш того, строга рівність в нерівності $\mathsf{E}[e^{\beta X}] \;\geq\; e^{\beta\,\mathsf{E}[X]}$ з'являється тоді й лише тоді, коли $\mathsf{P}\{X = C\} = 1$ для деякої сталої $C \in \mathbb{R}$. Отже, взагалі кажучи, нетто принцип не є частковим випадком експоненційного принципу, і навпаки.

Припустимо тепер, що для деякого фіксованого значення параметра $\Delta \in [0, 1]$ та деякої функції $V(x)$, відмінної від експоненційної функції, швейцарський принцип страхового оцінювання буде еквівалентним експоненційному принципу. Тоді, завдяки адитивності експоненційного принципу, такий метод страхового оцінювання мусить бути адитивним. Проте, як щойно було показано в межах доведення теореми 1, для фіксованого значення параметра $\Delta \in [0, 1]$, швейцарський принцип страхового оцінювання володіє властивістю адитивності тоді й лише тоді, коли $V(x) = ax + b$, для $a > 0$, або $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$. Тут випадок $V(x) = ax + b$, для $a > 0$, відповідає нетто принципу, який, як щойно було показано, не є частковим випадком експоненційного принципу. Тобто, як бачимо, вихідне припущення існування функції $V(x)$, відмінної від експоненційної функції, яка б для фіксованого значення параметра $\Delta \in [0, 1)$ породжувала б швейцарський принцип еквівалентний нетто принципу приводить до протиріччя. Тому, для кожного фіксованого $\Delta \in [0, 1]$, випадок $V(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, дійсно є єдиним можливим випадком співпадання швейцарського принципу з експоненційним принципом.

Користуючись схожою технікою від противного можна показати, що, для кожного фіксованого значення $\Delta \in [0, 1]$, випадок $V(x) = ax + b$, для $a > 0$, є єдиним можливим випадком співпадання швейцарського принципу з нетто принципом.

Література

[1] *Asmussen S., Albrecher H.* Ruin Probabilities (second edition). World Sientific, Singapore, 2010.

[2] *Boland P.J.* Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science. Chapman & Hall, Boca Raton, 2007.

[3] *Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbit C.J.* Actuarial Mathematics (second edition). The Society of Actuaries, Illinoice, 1997.

[4] *Bühlmann H.* Mathematical Methods in Risk Theory. Springer, Berlin, 1970.

[5] *Dickson D.C.M.* Insurance Risk and Ruin. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[6] *Gerber H.U.* An Introduction to Mathematical Risk Theory. S. S. Huebner Foundation for Insurance Education, Philadelpia, 1979.

[7] *De Vylder F.E., Goovaerts M., Haezendonck J. (editors)* Premium Calculation in Insurance (collection of articles). Kluwer Academic Publishers, Boston, 1984.

[8] *De Vylder F.E., Goovaerts M., Haezendonck J. (editors)* Insurance and Risk Theory (collection of articles). Kluwer Academic Publishers, Boston, 1986.

[9] *Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M.* Modern Actuarial Risk Theory using R. Springer, Berlin, 2008.

[10] *Kremer E.* Applied Risk Theory. Shaker, Aachen, 1999.

[11] *Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J.* Stochastic Processes for Insurance and Finance. John Wiley & Sons, Chichester, 1999.

[12] *Straub E.* Non-Life Insurance Mathematics. Springer, Berlin, 1988.