ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК: 519.21

ОРТОГОНАЛЬНІ ТА СПОРІДНЕНІ З НИМИ АПРОКСИМАЦІЇ СУМАРНИХ ОБ'ЄМІВ ВИПЛАТ СТРАХОВИХ КОМПАНІЙ
ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И РОДСТВЕННЫЕ ИМ АППРОКСИМАЦИИ СУМАРНИХ ОБЪЕМОВ ВЫПЛАТ СТРАХОВЫХ КОМПАНИЙ
ORTHOGONAL AND RELEVANT TO THEM APPROXIMATIONS OF AGGREGATE CLAIM AMOUNTS OF INSURANCE COMPANIES

Дрозденко Віталій Олександрович
кандидат фіз.-мат. наук, асистент каф. вищої математики та фізики
Білоцерківський національний аграрний університет
Дрозденко Виталий Александрович
кандидат фіз.-мат. наук, ассистент каф. высшей математики и физики
Белоцерковский национальный аграрный университет
Vitaliy O. Drozdenko
candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of higher mathematics and physics
Bila Tserkva National Agrarian University

Анотація. У роботі розглядаються методи наближеного представлення сумарних об'ємів виплат страхових компаній, які використовують лише перші декілька моментів випадкової величини, а також урізані ортогональні розклади ймовірносних щільностей та функцій розподілу. В якості прикладів застосувань представлені апроксимації Бауерса, Грама–Харлієра, Ед'єворса та Есшера. Подано інформацію про першоджерела та зроблено посилання на літературу з розглянутої тематики.

Аннотация. В работе рассматриваются методы приближенного представления суммарных объемов выплат страховых компаний, которые используют всего лишь первые несколько моментов случайной величины, а также усеченные ортогональные разложения вероятносных плотностей и функций расспределения. В качестве примеров применений рассматриваются аппроксимации Бауэрса, Грама–Харлиера, Эдъеворса и Эсшера. Представлена информации о первоисточниках и литературе по этой тематике.

Abstract. In the article approximate representations of the aggregate claim amounts of the insurance companies using only first several moments of random variables as well as truncated orthogonal expansions of the probability densities and distribution functions are presented. In a form of examples of possible applications we consider approximations of Bowers, Gram–Charlier, Edgeworth and Esscher. References to the initiating articles and the more general literature are also given.

Ключові слова: страхова компанія, сумарний об'єм виплат, апроксимація, лінійна комбінація, моменти випадкової величини, ортогональні поліноми.

Ключевые слова: страховая компания, суммарный объем выплат, аппроксимация, линейная комбинация, моменты случайной величины, ортогональные полиномы.

Key words: insurance company, aggregate claim amount, approximation, linear combination, moments of random variable, orthogonal polynomials.

1. Вступ

Нехай функція $f(x)$ задана на $[0,+\infty)$. Нехай, також, $w(x)>0$ є непе-рервною функцією, такою, що ін-теграл $\int_0^{+\infty}\pi(x)w(x)dx$ існує для довіль-ного полінома $\pi(x)$. Припустимо, що $\pi_0(x),\ \pi_1(x),\ \pi_2(x),\ \cdots$ – послідов-ність ортогональних поліномів (іс-нує досить багато рикурсивних алго-ритмів для отримання таких послі-довностей) відносно вагової функції $w(x)$, тобто, $\int_0^{+\infty}\pi_i(x)\pi_j(x)w(x)dx=0$ для $i\neq j$; тут $\pi_k(x)$ – поліном ступеню k.

При досить регулярних припу-щеннях (деталі легко уточнюються в підручниках з дійсного аналізу) от-римуємо розклад

$$f(x)=K_0\pi_0(x)w(x)+K_1\pi_1(x)w(x)+ +\ldots+K_n\pi_n(x)w(x)+\ldots, \qquad (1)$$

де $K_i=a_i^{-1}\int_0^{+\infty}\pi_i(x)f(x)dx$ та $a_i:=\int_0^{+\infty}\pi_i^2(x)w(x)dx$ для $i=0,1,2\cdots$. З чого слідує, що коефіцієнт K_i є лі-нійною комбінацією перших i мо-ментів, включаючи нульовий, функ-ції $f(x)$. У випадку, коли функція $f(x)$ є щільністю сумарних об'ємів виплат S страхової компанії, має місце представлення $K_i = a_i^{-1}\mathrm{E}[\pi_i(S)]$.

Урізаючи розклад (1), отри-мується апроксимація щільності $f(x)$ із використанням лише перших N моментів випадкової величини S, а саме

$$f(x) \approx K_0\pi_0(x)w(x) + K_1\pi_1(x)w(x) + + \ldots + K_N\pi_N(x)w(x). \qquad (2)$$

У такий спосіб отримуються досить багато широко вживаних ап- роксимацій сумарних об'ємів ви-плат страхових компаній (скажімо, сумарний об'єм річних виплат, су-марний об'єм виплат згенерований певним типом контрактів, тощо), на-приклад, апроксимація гамма-фун-кцією Бауерса, нормальна апрокси-мація Грама–Харлієра, Nor-mal I та Normal II, тощо. Нижче представлені апроксимація Ед'єворса та апрокси-мація Есшера це дещо інший тип апроксимацій, які теж досить широ-ко використовуються в тому числі й при оцінюванні сумарних об'ємів страхових виплат.

У подальших секціях публіка-ції ми більш детально, проте в сти-сло-компактній формі, зупинимося на апроксимаціях Бауерса, Грама–Харлієра, Ед'єворса, Есшера; дамо посилання на літературу стосовно Normal I та II, зробимо посилання на першоджерела, а також літературу, в якій здійснено порівняльний аналіз подібного роду наближень.

2. Апроксимація гамма-фун-кцією Бауерса

У апроксимації Бауерса (en: Bowers' gamma function approxima-tion) абсолютно неперервна випад-кова величина S, яку можна тракту-вати як сумарний об'єм страхових виплат, спочатку нормується $S_{\text{norm}} := \Delta S$, де $\Delta = \mathrm{E}[S]/\mathrm{Var}[S]$, а потім замінюється $\mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda)$ випадковою величиною, щільність якої познача-тимемо $f_{\text{norm}}^{\text{gamma}}(x)$, так, що її перші два моменти співпадають з відповідни-ми моментами S_{norm}. Після цього, до щільності $f_{\text{norm}}^{\text{gamma}}(x)$ застосовується процедура описана у вступі до даної публікації з використанням

$$w(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}/\Gamma(\alpha),$$

а в якості поліномів використову-ються поліноми Лагера (en: Laguerre polynomials)

$$L_k(x) = (-1)^k x^{1-\alpha} e^x \frac{d^k}{dx^k}\left(x^{k+\alpha-1}e^{-x}\right),$$

які, як відомо, є ортогональними від-носно гамма-щільності. При цьому, перші коефіцієнти розкладу мати-муть вигляд

$$K_0 = K_1 = K_2 = 0,$$

$$K_3 = \frac{\Gamma(\alpha)}{6\Gamma(\alpha+3)}\left[\mathrm{E}\left[S_{\text{norm}}^3\right] - \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\right],$$

а наближення (2) для $N = 3$ матиме наступний вигляд

$$f_{\text{norm}}^{\text{gamma}}(x) \approx w(x) + K_3L_3(x)w(x),$$

відповідну функцію розподілу, при цьому, можна наблизити наступним чином

$$F_{\text{norm}}^{\text{gamma}}(x) \approx W(x) + K_3\int_0^x L_3(y)w(y)dy,$$

де $W(x)$ це $Gamma(\alpha,1)$ функція роз-поділу.

Деталі обчислень досить легко уточнюються в роботі Bowers (1967).

3. Нормальна апроксимація Грама–Харлієра

У апроксимації Грама–Харлі-єра (en: Gram–Charlier approximation) розглядається нормована випадкова величина з середнім 0 та дисперсією 1, з функцією розподілу $G(z)$. Об-ласть інтегрування всіх інтегралів у вступі до даної публікації зміню-ється з $[0,+\infty)$ на $(-\infty,+\infty)$, у якості вагової функції $w(x)$ використову-ється стандартна нормальна щіль-ність $\varphi(x)$, а в якості ортогональних поліномів – поліноми Ерміта

(en: Hermit's polynomials)

$$H_k(x) = \varphi^{(k)}(x)/\varphi(x) \text{ для } k = 0,1,2,\cdots.$$

У даному випадку маємо

$$K_0 = 1, \quad K_1 = K_2 = 0, \quad K_3 = -\mathrm{E}[Z^3]/3!,$$
$$K_4 = (\mathrm{E}[Z^4] - 3)/4!.$$

Для отримання наближень щі-льності використовують розклад

$$dG(z) = \varphi(z) + K_3\varphi^{(3)}(z) + K_4\varphi^{(4)}(z) + \ldots,$$

а для наближень функції розподілу – розклад

$$G(z) = \Phi(z) + K_3\Phi^{(3)}(z) + K_4\Phi^{(4)}(z) + \ldots,$$

де $\Phi(\cdot)$ – стандартна нормальна фун-кція розподілу.

У монографії Gerber (1979) на-ведено результати застосування що-йно описаного алгоритму до моде-лювання сумарних об'ємів виплат страхової компанії за допомогою складно-пуасонівського процесу з ві-домим параметром інтенсивності та відомим розподілом індивідуальних виплат.

Метод названо на честь датсь-кого математика Йоргена Грама (dk: Jшrgen Gram) та швецького астроно-ма Карла Харлієра (sw: Carl Charlier). Першоджерелами вважа-ють роботи Gram (1883) та Charlier (1905-06).

4. Апроксимація Ед'єворса

У апроксимації Ед’єворса (en: Edgeworth approximation) розглядає-ться нормована випадкова величина Z (із середнім 0 та дисперсією 1) з функцією розподілу $G(z)$ та генера-трисою $M(t)$. Стартуючи від розкла-ду в ряд Тейлора логарифму генера-триси в околі нуля $\log M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, тут

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = 1/2, \quad a_3 = \mathrm{E}[Z^3]/6,$$
$$a_4 = (\mathrm{E}[Z^4]-3)/24,$$

отримуємо, виділивши основну ком-поненту в окремий множник,

$$M(t) = \exp(t^2/2)\cdot\exp\left(a_3t^3 + a_4t^4 + \ldots\right).$$

Замінивши другий множник щойно отриманого представлення його ж розкладом Тейлора в околі нуля, отримуємо

$$M(t) = \exp(t^2/2)\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{1 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_3^2t^6/2 + \ldots\right\}.$$

Прийнявши до уваги те, що $t^k\exp(t^2/2)$ є генератрисою для $(-1)^k\varphi^(k)(x)$, де $\varphi(x)$ це стандартна нормальна щільність, із останнього представлення отримуємо

$$dG(z) = \varphi(z) - a_3\varphi^{(3)}(z) + a_4\varphi^{(4)}(z) +$$
$$+a_3^2\varphi^{(6)}/2 + \ldots,$$

або, в термінах функції розподілу,

$$G(z) = \Phi(z) - a_3\Phi^{(3)}(z) + a_4\Phi^{(4)}(z) +$$
$$+a_3^2\Phi^{(6)}/2 + \ldots,$$

що й називають розкладом Ед’євор-са, де $\Phi(x)$ – страндартна нормальна функція розподілу.

Звернемо увагу на те, що пер-ші три доданки розкладу Ед’єворса співпадають із відповідними трьома доданками розкладу Грама–Харлі-єра, проте подальші доданки відмін-ні.

Ініціюючою вважають роботу Edgeworth (1905). Із описом еволюції подібних методик можна ознайоми-тись, наприклад, у роботі Blinnikov та Moessner (1998). У роботі Goovaerts та ін. (1977) отримано ана-лог апроксимації Ед’єворса для роз-поділів із важкими хвостами. Апро-ксимації Ед’єворса присвячений Appendix B підручника Beard та ін. (1969), де, зокрема, представлений альтернативний спосіб отримання розкладу Ед’єворса шляхом викори-стання характеристичних функцій.

5. Апроксимація Есшера

Нагадаємо, що перетворенням Есшера функції розподілу $F(x)$ випа-дкової величини S називають

$$\overline{F}_h(x) := \int_{-\infty}^{x} e^{hy}dF(y)/\mathrm{E}[e^{hS}];$$

перетворенням Есшера величини S , у свою чергу, називають випадкову величину $\overline{S}_h := Se^{hS}/\mathrm{E}[e^{hS}]$.

Апроксимація Ед’єворса дає досить гарне наближення при x із близького околу $E[S]$, і точність її може бути гіршою при значних від-хиленнях x від $\mathrm{E}[S]$. Як наслідок, ідея апроксимації Есшера (en: Esscher approximation) полягає в то-му, що при потребі оцінки величини $F(x) = \mathrm{P}\{S \le x\}$, для фіксованого x, спочатку здійснюють перетворення Есшера з вибором $h^*(x)$ так, що $\mathrm{E}[\overline{S}_{h^*}(x)] = x$, а потім застосовують апроксимацію Ед’єворса не до $F(\cdot)$, а до $\overline{F}_{h^*}(x)(\cdot)$ і виконують обернене пе-ретворення.

У випадку, коли S має скла-дно-пуассонівський розподіл із пара-метром інтенсивності λ та генера-трисою розміру індивідуальних вип-лат $m(t)$ апроксимація Есшера в роз-кладі до третього доданка, при $h > 0$, дає наступне наближення

$$F(x) \approx 1 -$$
$$-e^{\lambda[m(h)-1]-hx}\left\{E_0(u) - \frac{m'''(h)}{6\lambda^{1/2}(m''(h))^{3/2}}E_3(u)\right\},$$

де $u := h(\lambda m''(h))^{1/2}$, а h є розв’язком рівняння $\lambda m'(h) = x$. Крім того,

$$E_k(u) = \int_0^{+\infty} e^{-uz}\varphi^{(k)}(z)dz, \quad \text{äëÿ} \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

це так звані функції Есшера, а $\varphi(x)$ – страндартна нормальна щільність.

Першоджередами апроксима-ції Есшера вважають роботи Esscher (1932) та Esscher (1963). Normal I та Normal II апроксимації добре опи-сані в роботі Beard та ін. (1969). Порівняльний аналіз апроксимацій сумарних об’ємів виплат страхових компаній здійснено, зокрема, в робо-ті Bohman та Esscher (1963). У роботі Pratsiovytyi та Drozdenko (2016) здій-снено опис граничної поведінки усе-редненого перетворення Есшера, ві-домого в актуарній літературі під назвою *премія Есшера*, (продемон-стровано збіжність усереднення ви-падкової величини, що трансформу-ється, до істотного супремуму/інфі-муму) при параметрі перетворення $h \to \pm\infty$. З загальними концепціями ортогональних наближень можна оз-найомитись, наприкла, в роботі Szegö (1975).

Список літератури

1. R. E. Beard, T. Pentikäinen, E. Pesonen, *Risk Theory*, Lon-don: Methuen, (1969).
2. H. Bohman, F. Esscher, *Studies in risk theory with numerical illustrations concerning distribu-tion functions and stop loss premiums*, Skand. Aktuar. J., **46** (1963), 173–225.

3. S. Blinnikov, R. Moessner, *Expansions for nearly Gaussian distributions*, Astron. and Ast-roph. Suppl. Ser., **130** (1998), 193–205.

4. N. L. Bowers, *Expansion of probability density functions as a gamma densities with applica-tion in risk theory*, Trans. of the Soc. of Actuar., **18** (1967), 125–137.

5. C. V. L. Charlier, *Übber das Fehlergesetz*, Ark. Math. Astr. och Phys., **2** (9) (1905–06), 1–9.

6. F. Y. Edgeworth, *The law of error*, Cambridge Philos. Soc., **20** (1905), 36–66 and 113–141.

7. F. Esscher, *On the probability function in the collective theory of risk*, Scand. Actuar. J., **15** (1932), 175–195.

8. F. Esscher, *On approximate computations when the correspo-nding characteristic functions are known*, Scand. Actuar. J., **46** (1963), 78–86.

9. H. U. Gerber, *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, Philadelphia: S. S. Huebner Fo-undation for Insurance Educa-tion, (1979).

10. M. J. Goovaerts, L. D'Hooge, P. Van Goethem, *An analytical approach to the generalized Poisson process in case of claim distributions with infinite skew-ness*, Mitteil. der Verein. Schweiz. Versicherungsmath., **77** (1977), 59–69.

11. J. P. Gram, *Übber die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen Mitteln der Methode der kleinsten Quadrate*, J. reine angew. Math., **94** (1883), 41–73.

12. M. V. Pratsiovytyi, V. O. Droz-denko, *Limit behavior of the Esscher premium*, J. Rand. Oper. and Stoch. Equat., **24** (2) (2016), 143–146.

13. G. Szegö, *Orthogonal Polyno-mials, 4-th ed.*, Amer. Math. Soc., (1975).

14. М. В. Працьовитий, В. О. Дро-зденко, *Методи підрахунку вартості страхових контрактів при відомих розподілах збитків*, Київ: видавництво НПУ ім. М. П. Драгоманова, (2017), (to appear).

ЛОЖНОСТЬ ЭПР ПАРАДОКСА И ВСЕХ ПОСЛЕДУЮЩИХ РАЗВИТИЙ ЕГО

Игнатович В.К.

Лаборатория нейтронной физики Объединенного Института Ядерных Исследований.

Аннотация.

Развивается утверждение [1] о псевдо научности парадокса Эйнштейна, Подольского, Розена (ЭПР), неравенства Белла и экспериментов, свидетельствующих о нелокальности квантовой механики.

Ключевые слова: Квантовая механика, ЭПР парадокс, переплетенные состояния, поляризация

Abstract

Pseudoscience of such notions as the paradox of Einstein, Podolsky, Rosen (EPR), Bell inequality and experiments proving nonlocality of quantum mechanics

Keywords: quantum mechanics, EPR paradox, entangled states, polarization

Вместо предисловия

Первые 2 раздела частично были опубликованы в работе [1], но для связности рассказа эту часть в несколько измененной форме необходимо повторить здесь.

1. Исходный ЭПР парадокс.

Суть ЭПР парадокса [2] состоит в следующем. Две взаимодействующие частицы в квантовой механике (КМ) описываются общей волновой функцией (ВФ) и потому, когда после взаимодействия частицы далеко разлетаются друг от друга, они все еще оказываются связанными, т.е. переплетенными, друг с другом.

В статье [2] 1935 г. авторы придумали такую ВФ, что, если измерить координату или импульс одной частицы, то у второй, сколь далеко она бы ни была, мгновенно появляется или то или другое. Но т.к. сверхсветовой обмен информациями невозможен, то вторая частица должна иметь и то и другое одновременно, независимо от измерений первой, что противоречит КМ, т.к. в КМ иметь одновременно точно определенные положение и импульс запрещено соотношениями неопределенности. В этом и состоит парадокс. Согласиться с существованием этого парадокса значит признать нелокальность КМ.

На самом деле никакого парадокса нет. Все дело в неправильном определении, которое утвердилось во всех учебниках по КМ. Считается, что импульс -- это собственное значение оператора импульса $\hat{\mathbf{p}}$, т.е. импульс существует только у частиц, ВФ которых является плоской волной: $\psi(x) = \exp(ikx)$. Тогда оператор импульса имеет собственное значение $p = \hbar k$. При этом оказывается полностью неопределенным положение частицы. ЭПР совершенно неприемлемо определили «относительную вероятность» найти частицу в интервале (ab) как $\int_a^b dx|\psi(x)|^2 = b-a$, т.е. вероятность в размерном виде. В учебниках по КМ предлагается исправить эту ошибку, ограничив пространство масштабом L и приняв собственную функцию оператора импульса в виде $\exp(ikx)/\sqrt{L}$. Тогда вероятность равна $(b-a)/L$. Однако ВФ внутри ограниченного интервала равна $\psi(x) = \sin(\pi n\, x/L)$ и не является собственной для оператора импульса.

Для выхода из тупика нужно изменить определение. Описывать частицы нужно не плоской волной, а волновым пакетом $\psi(x)$, и считать импульсом среднее $p = \int dx \psi^*(x)\hat{p}\psi(x)$. При таком определении, правда, возникает дисперсия Δp. Однако эта дисперсия есть дополнительный параметр,